

$$(四) y = -5 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{8}x^3 - \frac{15}{11}x^4 - \frac{24}{13}x^5$$

三 定積分と不定積分

不定積分から定積分ヲ求メル方法ヲ考ヘヨウ。

不定積分ニ於ケル積分定數ハ、函數ヲドコカラ x マデ積分スルカニヨツテ定マル數デアル。次ノ不定積分ヲ例ニトシテ考ヘヨウ。

$$\int 3x^2 = x^3 + k$$

デ、0カラ x マデ積分スルモノトスレバ、 $x=0$ ニ對スル原始函數ノ値ハ0デナケレバナラナイ。隨ツテ、コノ場合ニハ、 $k=0$ ト定マル。

-5カラ x マデ積分スルモノトスレバ、 $x=-5$ ニ對スル原始函數ノ値ハ0デナケレバナラナイ。隨ツテ、コノ場合ニハ、 $k=125$ ト定マル。

問一 函數 $y = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$ ノ原始函數ヲ言ヘ。次ニ、コレヲ用ヒテ、次ノ積分ヲセヨ。

$$(一) \int_2^{10} \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x + 4 \right) dx \quad (二) \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x + 4 \right) dx$$

問二 次ノ定積分ヲ求メヨ。

$$(一) \int_1^2 (x^2 - 5x + 4) dx \quad (二) \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx$$

$$(三) \int_1^{\infty} (x^2 - 5x + 4) dx$$

問三 前問(二)、(三)ノ定積分ノ値ハ、圖表ノ上デドンナモノヲ表スカ。函數 $y = x^2 - 5x + 4$ ノ圖表ヲ書イテ調べヨ。

中等數學

四

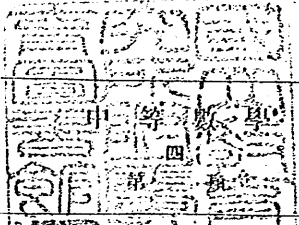
第一類

文 部 省

[後] ¥ 95

文部省調査普及局刊行課寄贈

(61)



昭和21年5月29日印刷
 昭和21年5月29日発行 同日印刷発行 定價 95 錢
 (昭和21年5月29日 文部省検査済)

APPROVED BY MINISTRY
 OF EDUCATION
 (DATE MAY 23, 1946)

著作権所有

著者 文 部 省
 発行 者 中 等 学 校 教 科 書 株 式 会 社
東京葛西田原町三番地
 代 表 加 野 庄 吾
 印刷 者 大 日 本 印 刷 株 式 会 社
東京都千代田市谷加賀町一丁目十二番地
 代 表 佐 久 間 長 吉 郎

發行所 中等學校教科書株式會社

教
育
書
番
號
四
三

問四 x の函数 $f(x)$ の原函数 $F(x)$ を求め、
 結果、次の関係が成ることを証明せよ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

一 次ノ函数ノ原函数ヲ言へ。

- (一) $y = x^2$ (二) $y = x^4$
- (三) $y = x^3$ (四) $y = x^5$
- (五) $y = \frac{1}{x^2}$ (六) $y = \frac{1}{x^3}$
- (七) $y = x^{-2}$ (八) $y = x^{-15}$
- (九) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (十) $y = x^{\frac{3}{2}}$
- (十一) $y = \sqrt{x^3}$ (十二) $y = \sqrt[5]{x^3}$
- (十三) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ (十四) $y = x^{-\frac{1}{4}}$
- (十五) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (十六) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- (十七) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ (十八) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

二 次ノ函数ノ原函数ヲ言へ。

- (一) $5x+3$ (二) $-\frac{1}{2}x+4$
- (三) $3x^2+2x-1$ (四) $-\frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} + 5$
- (五) $3\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$ (六) $3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
- (七) $\frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{15}x^{-\frac{2}{3}}$ (八) $-\frac{3}{10}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{5}{8}x^{-\frac{1}{2}}$

(九) $\sqrt{x}(x-x^2)$ (十) $\sqrt[3]{x}(-x^2-x^3)$

三 函數 $y=2x-3x^2$ ノ原始函數ノヲ

(一) $x=0$ ノ時, 0 トナルモノ

(二) $x=0$ ノ時, 15 トナルモノ

(三) $x=2$ ノ時, 0 トナルモノ

ヲ求メヨ。

四 次ノ直線ト拋物線トデ圍マレル面積ヲ計算セヨ。

$$y=2x-8, \quad y=x^2$$

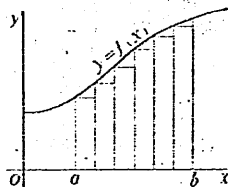
五 次ノ定積分ヲ求メヨ。

(一) $\int_1^2 x^2 dx$ (二) $\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4\right) dx$

(三) $\int_1^3 (x^2-2x-3) dx$ (四) $\int_1^3 (x^2-2x-3) dx$

(五) $\int_1^2 (x-1)(x-2)^2 dx$ (六) $\int_{-1}^3 (x+1)^2(x-3) dx$

六 曲線 $y=f(x)$ ハ x 軸ノ上方ニアルモノトスル。ヨノ曲線ノ x 軸及ビ二直線 $x=a, x=b$ ガ圍ム圖形ヲ, x 軸ノ周リニ一回轉スルト, 一ツノ立體ガ出來ル。ソノ體積 V ハ次ノ等式デ書キ表サレル。



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

次ニ通ベルコトヲ參考ニシテ, 上ノ等式ヲ證明セヨ。

x 軸上デ a カラ b マデノ間ヲ n 等分シ, 各分點ヲ通ル縦線ヲ

引イテ, 前頁ノ圖ノヤウニ $(n-1)$ 箇ノ矩形ヲ作ル。コノ矩形ガ x 軸ノ周リヲ一回轉シテ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ。

七 次ノ立體ノ體積ヲ求メヨ。

- (一) 球 (二) 直圓錐

六 三角函數ノ微分

今マデニ, 多項式及ビ分數式デ表サレル函數ヲ, 微分及ビ積分スル仕方ニ就イテ考ヘタ。

前節デツカッタヤウニ, 或ル函數ヲ積分スルニハ, 微分シテ與ヘラレタ函數ニナルモノガ見出サレルトヨイ。隨ツテ, 多クノ函數ノ微分ヲ知ツテキレバ, ソレダケ積分デキル函數ノ範圍ガ廣クナル。コノ節及ビ續ク二節ニ於イテ, 種々ノ函數ノ導函數ヲ求メヨウ。

先ヅ, 三角函數ヲ微分シテミヨウ。

問一 $y=\sin x$ ノ圖表ヲ書ケ。

(一) 横軸ノ單位ヲ 1 弧度トシテ, ソノ導函數ノ圖表ヲ書キ加ヘヨ。

(二) 横軸ノ單位ヲ 1 度トスルト, 導函數ノ圖表ハドウナルカ。

問二 正弦ノ導函數ヲ求メル場合ニ, 横軸ノ單位ヲ 1 弧度トスルノガヨイカ。又ハ, 1 度トスルノガヨイカ。前問ヲ參考ニシテ調べヨ。

ココデハ, 角ヲ弧度法デ表スモノトスル。

x が Δx だけ増加する時, y が Δy だけ変化スルモノトスル

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

等式 $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ ヲ用ヒテ, 上ノ
平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ヲ, 次ノヤウニ變形スルコトガデキル,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

随ツテ, $y = \sin x$ ノ微分スルニ, 結局 θ が 0 = 限リナク近
ヅク時ニ於ケル $\frac{\sin \theta}{\theta}$ ノ極限ヲ知ラナケレバナラナイ, 既ニ學
ンダヤウニ, ソノ極限值ハ 1 デアル,

問三 $y = \sin x$ ノ導函数ヲ求メヨ,

問四 $y = \cos x$ ノ導函数ヲ求メヨ,

三角函数ノ微分ニ就イテ, 次ノコトガワカツク,

$$y = \sin x \text{ ノ時, } \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x \text{ ノ時, } \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

問五 次ノ函数ヲ微分セヨ,

$$(一) y = 5 \sin x \quad (二) y = -8 \cos x$$

問六 次ノ函数ノ原始函数ヲ求メヨ,

$$(一) y = \sin x \quad (二) y = \cos x$$

一 次ノ函数ヲ微分セヨ,

$$(一) y = 10 \sin x \quad (二) y = \frac{1}{2} \cos x$$

$$(三) y = \sin 2x \quad (四) y = \cos 2x$$

$$(五) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (六) y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

二 次ノ函数ヲ積分セヨ,

$$(一) y = -2 \sin x \quad (二) y = -\frac{1}{2} \cos x$$

$$(三) y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (四) y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

三 $y = \tan x$ ノ導函数ヲ求メヨ,

四 曲線 $y = \sin x$ 及ビ x 軸ノ 0 カラ π マデノ部分ガ圍ム圖
形ノ面積ヲ求メヨ,

五 次ノ函数ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ,

$$(一) y = \sin x \quad (二) y = \cos x$$

$$(三) y = \sin x + \cos x \quad (四) y = \sin x - \cos x$$

$$(五) y = 3 \sin x + 4 \cos x \quad (六) y = 3 \sin x - 4 \cos x$$

七 種々ナ微分ノ仕方

一 函数ノ函数

前節ノ問題一デ

$$y = \sin 2x \text{ ノ時, } \frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$$

$$y = \cos 2x \text{ ノ時, } \frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x$$

デアツク,

問一 函數 $y = \sin(\alpha x + \beta)$ (α, β ハ定數)ノ導函數ヲ求メヨ。

上ノ函數 $y = \sin(\alpha x + \beta)$ ヲ、モツト容易ニ積分スルコトガデキナイダラウカ。ソノ函數ハ、次ノヤウニミルコトガデキル。

$$y = \sin z, \quad z = \alpha x + \beta$$

明ラカニ、 y ハ z ノ函數デ、 z ハ x ノ函數デアアル。

函數 $z = \alpha x + \beta$ ニ於テ、 x ヲ Δx ダケ増加サセルト、 z ハ Δz ダケ變化シタトスル。又、函數 $y = \sin z$ ニ於テ、 z ガ Δz ダケ變化シタトスルト、 y ハ Δy ダケ變化シタトスル。

y ノ平均變化率ハ、次ノヤウニ書キ表スコトガデキル。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Δx ガ 0 ニ限リナク近ヅクト、 $\Delta z \neq 0$ ニ限リナク近ヅク、又 $\Delta y \neq 0$ ニ限リナク近ヅク。故ニ、 Δx ガ 0 ニ限リナク近ヅクト、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad \text{及ビ} \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx \frac{dz}{dx} \quad \text{ハソレゾレ} \quad \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \text{限リナク}$$

近ヅク。

上デ得ラレタ結果ハ、次ノヤウニ書キ表スコトガデキル。

z ガ x ノ函數デ、 y ガ z ノ函數デアアルト、次ノ等式ガ成立シ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

問二 上ノ關係ヲ用ヒテ、 $y = \sin(\alpha x + \beta)$ ノ導函數ヲ求メヨ。

問三 函數 $y = \cos(\alpha x + \beta)$ ヲ微分セヨ。

問四 函數 $y = (x^2 + x)^2$ ヲ微分セヨ。

問五 次ノ函數ヲ微分セヨ。

$$(一) \quad y = \sin 2x \qquad (二) \quad y = \cos 2x$$

$$(三) \quad y = \sin\left(\frac{3}{4}\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (四) \quad y = (\sin x)^2$$

二 函數ノ積

一ツノ函數ガ、導函數ノ既ニワカツテキルニツ或ハソレ以上ノ函數ノ積トミラレルコトガアル。例ヘバ、 $y = x^2 \sin x$ ハ、導函數ノワカツテキルニツノ函數 $y_1 = x^2$ 及ビ $y_2 = \sin x$ ノ積トミラレル。一般ニ

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = g(x)$$

トスル。

今、 x ガ Δx ダケ増加シタトスル、コノ時ニ於ケル y ノ變化ヲ Δy トシ、 y_1 及ビ y_2 ノ變化ヲソレゾレ Δy_1 、 Δy_2 トスル。

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + y_2 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2$$

Δx ヲ 0 ニ限リナク近ヅケルト、 $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ 及ビ $\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$ ハソレゾレ

$$\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \text{近ヅク。又、} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \text{ ハ或ル定マツタ値ニ限リナク近}$$

ヅキ、 $\Delta y_2 \rightarrow 0$ ニ限リナク近ヅクカラ、 $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} \cdot \Delta y_2 \rightarrow 0$ ニ限リナク近ヅク。

上テ得ラレタ結果ハ、次ノヤウニ書キ表スコトガデキル。

y_1 及ビ y_2 ハ共ニ x ノ函數デ、 $y=y_1 \cdot y_2$ デアルト、次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx}$$

問一 函數 $y=x^2 \sin x$ ヲ微分セヨ。

問二 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ デアル。コノ等式ヲ用ヒテ、

$y = \sin 2x$ ヲ微分セヨ。

三 函數ノ商

前節ノ問題三デ、 $y = \tan x$ ノ微分ヲ求メタ。 $\tan x$ ハ、導函數ノワカツテキル二ツノ函數 $y_1 = \sin x$ 、 $y_2 = \cos x$ ノ商トシテ書キ表スコトガデキル。一般ニ、或ル函數ガ、導函數ノ既ニワカツテキル二ツノ函數ノ商トミラレル場合ガアル。即チ

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = g(x)$$

$$y = \frac{y_1}{y_2}$$

今、 y ヲ $y_1 \times \frac{1}{y_2}$ トミナシテ、 $\frac{1}{y_2}$ ヲ改メテ y_3 トスレバ、 y ハ、 y_1 ト y_3 トノ積トミラレル。故ニ

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dy_3}{dx} + y_3 \frac{dy_1}{dx}$$

$$= y_1 \frac{dy_3}{dx} + \frac{1}{y_2} \cdot \frac{dy_1}{dx}$$

隨ツテ、 y ノ導函數ヲ求メルニハ、 y_3 ノ導函數ヲ y_2 及ビ y_1 ノ導函數ニヨツテ書キ表スコトガデキレバヨイ。

x ガ dx ガ増加シタ時、 y_2 及ビ y_3 ガソレゾレ Δy_2 、 Δy_3 タ

ケ變化シタトスル。 y_3 ノ平均變化率ヲ y_2 及ビ Δy_2 デ書キ表スコト

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_3}{\Delta x} &= \frac{1}{y_2 + \Delta y_2} \cdot \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \\ &= \frac{-\Delta y_2}{y_2(y_2 + \Delta y_2)} \\ &= -\frac{1}{y_2(y_2 + \Delta y_2)} \cdot \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \end{aligned}$$

Δx ヲ 0 ニ限りナク近ヅケルト、 $\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$ ハ $\frac{dy_2}{dx}$ ニ限りナク近ヅク。

又、 $y_2 + \Delta y_2$ ハ、 y_2 ニ限りナク近ヅク。隨ツテ、

$$\frac{dy_3}{dx} = -\frac{1}{y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

上テ得ラレタ結果ハ、次ノヤウニマツメルコトガデキル。

$$y_3 = \frac{1}{y_2} \text{ ナラバ } \frac{dy_3}{dx} = -\frac{1}{y_2^2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

又、上ノ結果ヲ用ヒルト、次ノ等式ガ得ラレル。

$$y = \frac{y_1}{y_2} \text{ ナラバ、 } \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y_2^2}$$

問一 上ノ結果ノ後半ヲ證明セヨ。

問二 $y = \tan x$ ヲ微分セヨ。

問三 函數 $y = x^n$ ガアル。但シ、 n ヲ正ノ整數トスル。 $y = x^n$ ヲ $y = x \cdot x^{n-1}$ トミテ微分セヨ。

コノ方法ニヨツテ、 n ガ正ノ整數デアル場合ニ、 $y = x^n$ ノ導函

数 $y' = nx^{n-1}$ デアルコトヲ證明セヨ。

一 次ノ函數ヲ微分セヨ。

- | | |
|--|---|
| (一) $y = (x-5)^3$ | (二) $y = (-x-7)^4$ |
| (三) $y = (2x+3)^5$ | (四) $y = \left(-\frac{x}{2} + \frac{7}{3}\right)^7$ |
| (五) $y = \left(\frac{5}{3}x + \frac{5}{6}\right)^3$ | (六) $y = \left(-\frac{7}{10}x + \frac{1}{2}\right)^{10}$ |
| (七) $y = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)^4$ | (八) $y = \left(\frac{7}{2}x + \frac{1}{3}\right)^5$ |
| (九) $y = \left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{5}\right)^{-3}$ | (十) $y = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{10}\right)^{-5}$ |
| (十一) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ | (十二) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (十三) $y = \sin\left(-x - \frac{\pi}{6}\right)$ | (十四) $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (十五) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ | (十六) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (十七) $y = \cos\left(-x - \frac{\pi}{6}\right)$ | (十八) $y = \cos\left(-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (十九) $y = \tan\left(-x - \frac{\pi}{6}\right)$ | (二十) $y = \tan\left(-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ |

二 函數 $f(x)$ ノ導函數 $g(x)$ トスル。次ノ函數ノ導函數ヲ式ニ書き表セ。

- | | |
|-------------------|----------------------|
| (一) $y = f(x+b)$ | (二) $y = f(-x+b)$ |
| (三) $y = f(ax)$ | (四) $y = f(ax+b)$ |
| (五) $y = f(ax^2)$ | (六) $y = f(ax+bx+c)$ |

三 次ノ函數ヲ微分セヨ。

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (一) $y = \sqrt{x-8}$ | (二) $y = \sqrt{-x+9}$ |
| (三) $y = \sqrt[3]{3x-8}$ | (四) $y = \sqrt[3]{(-2x+8)^5}$ |
| (五) $y = \sqrt{x^2-1}$ | (六) $y = \sqrt{1-x^2}$ |
| (七) $y = \sqrt{3x^2-2}$ | (八) $y = \sqrt{5-\frac{x^2}{3}}$ |
| (九) $y = \frac{1}{\sqrt{9-2x^2}}$ | (十) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}}$ |

四 次ノ函數ヲ微分セヨ。

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| (一) $y = x \sin x$ | (二) $y = x^2 \sin x$ |
| (三) $y = \frac{1}{2}x^2 \sin x$ | (四) $y = \frac{1}{3}x^3 \sin x$ |
| (五) $y = x \cos x$ | (六) $y = x^2 \cos x$ |
| (七) $y = \frac{1}{4}x^4 \cos x$ | (八) $y = -\frac{1}{3}x^3 \cos x$ |
| (九) $y = \sin^2 x$ | (十) $y = -\frac{1}{2} \sin^2 x$ |
| (十一) $y = \cos^2 x$ | (十二) $y = -\frac{1}{3} \cos^2 x$ |
| (十三) $y = \tan^2 x$ | (十四) $y = -\frac{1}{2} \tan^2 x$ |
| (十五) $y = \cot x$ | (十六) $y = \cot^2 x$ |
| (十七) $y = \sec x$ | (十八) $y = \sec^2 x$ |
| (十九) $y = \operatorname{cosec} x$ | (二十) $y = \operatorname{cosec}^2 x$ |

五 函數 $y = \sin x$ ヲ、次ノ方法ヲ微分セヨ。

- (イ) $z = \sin x$, $y = z^2$ トミテ、計算ヲセヨ。
 (ロ) $y = \sin x (\sin^2 x)$ トミテ、計算ヲセヨ。

次ニ、上ノ二ツノ方法ノ優劣ヲ比較セヨ。

六 次ノ函數ヲ微分セヨ。

$$\begin{array}{ll} (一) y = \sin^2 x & (二) y = -\sin^2 x \\ (三) y = \cos^2 x & (四) y = -\frac{2 \cos^2 x}{3} \\ (五) y = \tan^2 x & (六) y = -\tan^2 x \end{array}$$

七 函數 $f(x)$ ノ原始函數ヲ $F(x)$ トスル。二ノ結果ヲ參考ニシテ、次ノ函數ノ原始函數ヲ言へ。

$$\begin{array}{ll} (一) y = f(x+b) & (二) y = f(-x+b) \\ (三) y = f(ax) & (四) y = f(ax+b) \end{array}$$

八 次ノ函數ヲ積分セヨ。

$$\begin{array}{ll} (一) y = (x+3)^5 & (二) y = (-x+3)^5 \\ (三) y = (2x+3)^4 & (四) y = (-2x+5)^4 \\ (五) y = (x+3)^{\frac{1}{2}} & (六) y = (-x+7)^{\frac{1}{3}} \\ (七) y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & (八) y = \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (九) y = \frac{5}{7} \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{2}} & (十) y = -\frac{1}{6} \left(-\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ (十一) y = \sin 2x & (十二) y = -\frac{1}{2} \sin 3x \\ (十三) y = \sin \frac{x}{2} & (十四) y = -3 \sin \frac{x}{3} \\ (十五) y = \cos 2x & (十六) y = -4 \cos 4x \\ (十七) y = \cos \left(-\frac{x}{2}\right) & (十八) y = -\cos \left(-\frac{x}{3}\right) \\ (十九) y = \sin \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) & (二十) y = \cos \left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

九 函數 $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$ ヲ積分セヨ。次ノ等式ヲ參考ニ

シテ、ソノ方法ヲ工夫セヨ。

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

十 曲線 $y = \sin 2x$ ト x 軸上ノ 0 カラ π マデノ直線トデ圍ム圓形ヲ、 x 軸ノ周リニ回轉スルト、一ツノ立體ガ出來ル。ソノ立體ノ體積ヲ求メヨ。

十一 x ノ函數ヲ $y = x^n$ トシ、 n ヲ正ノ整數トスル。コノ階級關係ハ、次ノヤウニ書キ表サレル。

$$1 \quad y^n = x$$

(イ) 兩邊ヲ x デ微分セヨ。

(ロ) (イ) ノ結果ヲ用ヒテ、 y ノ導函數ヲ求メヨ。

十二 x ノ函數ヲ $y = x^p$ トシ、 p ヲ任意ノ正或ハ負ノ分數トスル。前問ト同様ノ方法デ、ソノ導函數ヲ求メヨ。

十三 十一、十二デ、 x ハ y ノ函數トミラレル。 $\frac{dx}{dy}$ ヲ求メ、コレヲ $\frac{dy}{dx}$ ト比ベヨ。

十四 變數 x, y ガアツテ、 $x^2 + y^2 = 25$ トスル。次ニ示シク二ツノ方法デ、 x ニ就イテ y ノ導函數ヲ求メヨ。

(イ) $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$ トシテ、右邊ヲ x ニ就イテ微分スル。

(ロ) $x^2 + y^2 = 25$ ノ兩邊ヲ x ニ就イテ微分スル。

十五 圓 $x^2 + y^2 = 25$ ガアル。ソノ上ノ點 $(3, 4)$ ニ於ケル接線ノ方程式ヲ作レ。

十六 次ノ函數デ、 y ノ極大・極小ヲ求メヨ。

$$(一) y = x(a-x)^2 \quad (a > 0)$$

$$(二) y = (x-a)^2(x-2a)^2 \quad (a > 0)$$

$$(三) y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10} \quad (四) y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$(五) y = \sin x(1 + \cos x) \quad (六) y = \cos x(1 - \sin x)$$

八 指数函数・対数函数

一 対数函数

x の函数 y を $y = \log_a x$ とスル、但シ、 a は正ノ数トスル、

コノヤウナ函数ヲ、 a 底トスル 対数函数 トイフ、

問一 x が 1 から 10 マデノ範囲ニトツテ

$$y = \log_{10} x$$

ノ圖表ヲ書ケ、次ニ、ソノ導函数ノ圖表ヲ書き加ヘヨ、

$y = \log_a x$ ノ平均變化率ハ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta x}{x}$ を h トスルト、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{x} \log(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

対数函数ノ導函数ヲ求メルニハ、 Δx が 0 = 限リナク近ヅイタ時、即チ、 h が 0 = 限リナク近ヅイタ時ニ於ケル $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ノ極限ヲ求メルトヨイ、

問二 h が 0.1, 0.01, 0.001 トシテ $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ノ値ヲ計算セヨ、

h が 0 = 限リナク近ヅク時ニ於ケル、 $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ノ極限值ハ、一ツノ無理数デアツテ、普通 e ト書キ表サレル、

$$e = 2.71828 \dots$$

デアル、

$$y = \log_a x \text{ ノ時、} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

特ニ、対数ノ底ヲ e = スルト、次ノヤウニナル、

$$y = \log_e x \text{ ノ時、} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

コレデ、第五節デ保留シテオイタ問題ガ解カレタ、随ツテ、函数 $y = x^n$ ノ積分ニ關シテ、次ノヤウニマツメルコトガデキル、

$$n \text{ が } -1 \text{ = 等シクナイナラバ、} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \text{ が } -1 \text{ = 等シイナラバ、} \quad \int \frac{dx}{x} = \log_e x + C$$

対数函数ノ微分ヲ考ヘル時、底ヲ e = 取ルト、ソノ導函数ノ形ガ簡單ニナル、ソレ故、対数ニヨル數計算以外デハ、対数函数ノ底トシテ e ヲ用ヒルコトガ多イ、

e ヲ底トスル對數ヲ 自然對數 トイフ。

今後、自然對數デハ、ソノ底ヲ省クコトニスル。

問三 問一デ書イタ導函數ノ圖表ハ、大體

$$y = \frac{1}{x} \log 2.72$$

ノ圖表トミナサレル。コレヲ調べヨ。

問四 次ノ函數ノ原始函數ヲ求メヨ、但シ、 x ハ正ノ範圍ニアルモノトスル。

$$(一) y = \frac{1}{x}$$

$$(二) y = \frac{5}{x}$$

二 指數函數

x ノ函數 y ヲ $y = \log_e x$ トスル。 x, y ノ關係ハ $x = e^y$ トモ書キ表サレルカラ、 x ハ y ノ函數デアルトミラレル。 x, y ヲ入れ換へテ、 $y = e^x$ ヲ得ル。

一般ニ、 $y = a^x$ ノヤウナ函數ヲ 指數函數 トイフ。

ココデ、指數函數 $y = e^x$ ノ導函數ヲ求メヨウ。

$y = e^x$ デアルト、 $\log y = x$ トナル。コノ兩邊ヲ x ニ就イテ微分スルト

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$= e^x$$

トナル。

問一 次ノ函數ヲ微分セヨ。

$$(一) y = e^{2x}$$

$$(二) y = e^{3x}$$

$$(三) y = e^{2x}$$

$$(四) x = e^{-x} \quad (五) y = e^{-2x} \quad (六) y = e^{-\frac{x}{2}}$$

問二 $y = a^x$ ヲ微分セヨ。次ノ等式ヲ參考ニシテ、ソノ方法ヲ考ヘヨ。

$$\log y = x \log a, \quad y = e^{x \log a}$$

上デ得ラレタ結果ハ、次ノヤウニマトメルコトガデキル。

$$y = e^x \text{ ナラバ、} \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = a^x \text{ ナラバ、} \quad \frac{dy}{dx} = a^x \log a$$

一 積分 $\int_1^x \frac{1}{x} dx$ デ、 p ヲ變數トスルト、コレハ p ノ函數デアル。コノ關係ヲ圖表ニ示セ。

コノ圖表ヲ用ヒテ、 $\int_1^x \frac{1}{x} dx$ ノ値ヲ 1 ニスル値ハ約 2.72 デアルコトヲ確カメヨ。

二 次ノ函數ヲ微分セヨ。

$$(一) y = \log 2x$$

$$(二) y = \log \frac{x}{2}$$

$$(三) y = \log (2x+1)$$

$$(四) y = \log \left(-\frac{x}{2} + 5 \right)$$

$$(五) y = \log (7-3x)$$

$$(六) y = \log \left(9 - \frac{x}{3} \right)$$

$$(七) y = \log (ax+b)$$

$$(八) y = \log (ax^2+bx+c)$$

$$(九) y = \log_{10} (x+1)$$

$$(十) y = \log_{10} (-2x+10)$$

$$(十一) y = \log \sin x$$

$$(十二) y = \log \cos x$$

- (十三) $y = \log_n \sin x$
- (十四) $y = \log_{10} \cos x$
- (十五) $y = e^{-x}$
- (十六) $y = e^{-1/x}$
- (十七) $y = e^{ax+b}$
- (十八) $y = e^{ax^2+bx+c}$
- (十九) $y = e^{ax} + e^{bx}$
- (二十) $y = e^{ax} + e^{-ax}$

三 次ノ函数ヲ積分セヨ。

- (一) $y = \frac{1}{x+1}$
- (二) $y = -\frac{1}{x-1}$
- (三) $y = \frac{1}{2x+3}$
- (四) $y = \frac{1}{5-3x}$
- (五) $y = e^x$
- (六) $y = e^{2x}$
- (七) $y = e^{2x}$
- (八) $y = e^{-x}$
- (九) $y = e^{2x}$
- (十) $y = e^{-ax}$
- (十一) $y = \tan x$
- (十二) $y = \cot x$

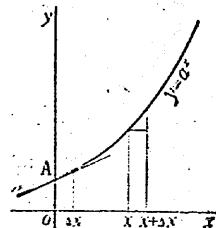
四 次ノ定積分ヲ求メヨ。

- (一) $\int_0^m \frac{dx}{x+5}$
- (二) $\int \frac{dx}{10-x}$
- (三) $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^x dx$
- (四) $\int_{-\log 2}^{\log 2} (e^x + e^{-x}) dx$

五 次ノ函数ヲ微分セヨ。

- (一) $y = x \log x$
- (二) $y = x^2 \log x$
- (三) $y = e^x \sin x$
- (四) $y = e^{-x} \sin x$
- (五) $y = e^{2x} \sin 3x$
- (六) $y = e^{-2x} \sin 3x$
- (七) $y = e^x \cos x$
- (八) $y = e^{-x} \cos x$
- (九) $y = e^{2x} \cos 2x$
- (十) $y = e^{-2x} \cos 4x$
- (十一) $y = e^{px+q} \cos(px+q)$
- (十二) $y = e^{px+q} \sin(px+q)$

六 曲線 $y = a^x$ ノ $x=0$ ノ點ニ於ケル接線ノ勾配ハ、 a ノ函数デアル。接線ノ勾配ガ 1 ニナルヤウナ a ノ値ハ e デアル。コレヲ證明セヨ。



七 元金 p 圓ヲ年利率 r 、一年ゴトノ複利デ x 年間預ケタトスル。ソノ時ノ元利合計ヲ A_1 圓トスルト

$$A_1 = p(1+r)^x$$

トナル。今、半年毎、四分ノ一年毎、八分ノ一年毎、……ノ複利ニ改メルト、ソノ元利合計 A_2, A_3, A_4, \dots ノ

$$A_2 = p \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2x}$$

$$A_3 = p \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4x}$$

$$A_4 = p \left(1 + \frac{r}{8}\right)^{8x}$$

.....

トナル。(切上げ、切捨てハシナイモノトスル)

上ノヤウニ、利息ヲ元金ニ雜リ込ム期間ヲ次第ニ短クシテ行クト、元利合計ヲ表ス式ハドノヤウナモノニ近ヅクカ。

九 微分・積分ノ應用

一 近似式

簡單ナ式ニ就イテ、ソノ近似式ヲ作ルコトハ既ニ學ンダ。例

$$y_1 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

デ、 x ノ絶対値が十分小さい時ハ、上ノ式ノ代リニ、次ノ式ヲ用ヒテモヨイ、

$$y_1 = 1 + 2x$$

又、
$$y_2 = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

デ、 x ノ絶対値が1ヨリ小さい時ハ、

$$y_2 = 1 + x$$

或ハ
$$y_2 = 1 + x + x^2$$

ヲ近似式トシテ用ヒルコトガアル。

問一 1.024ノ逆数ヲ求メヨ、 $\frac{1}{1+x}$ ノ近似式トシテ、 $1-x$ 及ビ $1-x+x^2$ ヲ用ヒテ計算セヨ。

又、各ノ相對誤差ヲ計算セヨ。

x ノ絶対値が十分=小さい時、 $y = \sqrt{1+x}$ ノ近似式ヲ求メヨ。

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

ト置クコトガデキルモノトスル。

問二 上ノ等式ノ兩邊 $x=0$ ヲ代入シテ、 a_0 ノ値ヲ定メヨ。

次ニ、兩邊ヲ x デ微分シ、得ラレタ式ヲ用ヒテ、 a_1 ノ値ヲ定メヨ。

a_2 ノ値ハドノヤウニシテ定メレバヨイカ。

問三 x ノ絶対値が1ヨリ小さい時、次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

コノ式ヲ基ニシテ、1.024及ビ0.976ノ平方根ヲ求メヨ。

又、各ノ相對誤差ヲ求メヨ。

問四 函數 $y = \sin x$ ニ於イテ

$$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

ト置クコトガデキル。

係數 a_0, a_1, a_2, \dots ノ値ノ定メ方ヲ述ベヨ。

問五 前問デ、係數 a_0, a_1, a_2, \dots ノ絶対値が1ヲ超エルコトハナイ。コレヲ證明セヨ。

問六 問四ノ結果ヲ用ヒテ、 x ノ三次以上ノ項ヲ捨テ、 $y = \sin x$ ノ近似式ヲ作レ。

次ニ、 $x = 0.01$ ニ對スル $\sin x$ ノ値ヲ計算セヨ、又、ソノ誤差ノ限界ヲ求メヨ。

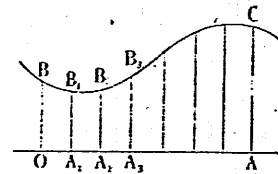
$\sin 0.01$ ノ値ヲ小数以下第四位マデ正シク求メルニハ、ドノヤウナ近似式ニヨツテ計算スレバヨイカ。

二 面積・體積ノ近似計算

第一節デ、不規則ナ形ヲシタ圖形ノ面積・體積ノ近似値ヲ求メル方法ヲ考ヘタ。ココデハ、更ニ精度ノ高い値ヲ求メル方法ヲ工夫ショウ。

例ヘバ、右ノ圖ニ示シタヤウナ

圖形ノ面積 $OACB$ ヲ、近似的ニ求メル方法ヲ考ヘヨウ。OAヲ幾ツカニ等分シ、分點ヲ A_1, A_2, A_3, \dots トスル、各分點ヲ通ツテOAニ垂線ヲ立テ、曲線トノ交點ヲ B_1, B_2, B_3, \dots トスル。



……トスル、各分點ヲ通ツテOAニ垂線ヲ立テ、曲線トノ交點ヲ B_1, B_2, B_3, \dots トスル。

OAヲ x 軸トシ、曲線 BB_1B_2 ノ y ノ程式ヲ $y = f(x)$ トスル、 $f(x)$

ノ近似式トシテ、三點 B, B_1, B_2 ヲ通ル二次式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ヲ用ヒルトスル。明ラカニ、コノ近似式デ示サレル曲線ハ、 OA = 垂直ナ直線ヲ對稱軸トスル拋物線デアアル。

問一 三點 B, B_1, B_2 ヲ通ル拋物線ノ式ヲ $y = px^2 + qx + r$ トスル。係數 p, q, r ヲ求メルニハ、座標軸ヲドコニトレバヨイ。

又、 $OB = y_1, A_1B_1 = y_2, A_2B_2 = y_3, OA_1 = A_1A_2 = d$ トシテ、係數 p, q, r ヲ定メヨ。

問二 A_1A_2 ヲ x 軸、 A_1B_1 ヲ y 軸ニトツタトスル。面積 OBB_2A_2 ヲ S トスル。次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-d}^d (px^2 + qx + r) dx \\ &= \frac{2}{3}d(pd + 3r) \\ &= \frac{d}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \end{aligned}$$

三 微分方程式

一直線上ヲ運動シテキル物體ガアル。ソノ定點カラノ距離 x ト、定マツタ時刻カラノ時間 t トノ間ニ、 $x = f(t)$ ノ關係ガアルトスル。明ラカニ、 $\frac{dx}{dt}$ ハソノ物體ノ速ヲ示ス。

$\frac{dx}{dt}$ ハ x ノ函數デアアル。コレノ導函數ヲ作ルト、導函數ハ速サノ變化ヲ示ス。

コノ函數ヲ $\frac{d^2x}{dt^2}$ ト書キ表ス。或ル t ノ定マツタ値ニ對スル $\frac{d^2x}{dt^2}$ ノ値ヲ、ソノ t = 對スル時刻ニ於ケル 加速度 トイフ。

高イ所カラ球ヲ落シタトスル。空氣ノ抵抗及ビ風ノ力ヲ無視スレバ、ソノ球ニ働ク力ハ一定デアアル。隨ツテ、運動ノ法則カラ、加速度ガ一定デアルトイヘル。コノ一定ノ値ヲ、通例 g ト書キ表ス。故ニ、次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

コノヤウニ、未知ノ函數ヲ微分シクモノヲ含ム等式ヲ 微分方程式 トイフ。ソノカラ未知ノ函數ヲ求メルコトヲ 微分方程式ヲ解ク トイフ。

問一 上ノ微分方程式ヲ解キ、時間ト距離トノ關係ヲ示式ヲ作レ。

前問デハ、空氣ノ抵抗ヲ無視シクガ、コレヲ考ヘニ入レテミヨウ。空氣ノ抵抗ハソノ速サニ比例スルモノトスル。コノ球ノ質量ヲ m 、速サヲ v トスル。

コノ球ニ働ク力ハ、 $m \frac{dv}{dt}$ ト書キ表サレル。又、重力 mg ハ下方ニ向キ、抵抗 kv (k ハ定數) ハ上方ニ向イテキル。今、下方ニ向カフ方向ヲ正トスレバ、ソノ球ニ働ク力ハ $mg - kv$ ト書キ表サレル。隨ツテ、次ノ微分方程式ガ得ラレル。

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

問二 上ノ微分方程式ハ、次ノヤウニ書キ表スコトガデキル。コレヲ證明セヨ。但シ $a = \frac{k}{m}$ トスル。

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a \\ \frac{g}{a} - v \end{aligned}$$

この両邊ヲテ積分スルト、次ノ等式ガ得ラレル。コレヲ證明セヨ。

$$-\log\left(\frac{g}{a}-v\right)=at+C \quad (C \text{ 定数})$$

問三 時間 t ヲ落下ノ始メカラ測ルモノトシテ、積分定数ヲ定メルト、次ノ等式ガ得ラレル。コレヲ證明セヨ。

$$v=\frac{g}{a}(1-e^{-at})$$

問四 速サハ時間ガ経ツニツレテ増加スル。然シ、ソノ大キサニ一定ノ限度ガアル。コレヲ證明セヨ。

一 函數 $y=\log(1+x)$ ニ於イテ、 $|x|<1$ ナラバ

$$\log(1+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

ト置フコトガデキル。

(一) 係數 a_0, a_1, a_2 ノ値ヲ定メヨ。

(二) x ノ三次以上ノ項ヲ捨テテ近似式ヲ作り、 $\log 1.05$ ノ値ヲ求メヨ。

二 函數 $y=e^x$ ニ於イテ

$$e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

ト置フコトガデキル。

(一) 係數 a_0, a_1, a_2 ノ値ヲ定メヨ。

(二) 係數 a_n ヲ n ノ式デ書キ表セ。

(三) x^n 及ビソノレヨリモ次數ノ高イ項ノ和ハ $\frac{x^n}{n!} \times \frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}$

ヨリモ小サイ、但シ、 $\left|\frac{x}{n}\right|<1$ トスル。

(四) e ノ値ヲ小數第五位マデ正シク求メヨ。

三 次ノ式ハ、 $\cos x$ ノ近似式ト考ヘラレル。コレヲ證明セヨ。

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$$

$\cos 10'$ ヲ上ノ近似式ヲ用ヒテ計算スルト、ソノ近似値ハドノ桁マデ正シイカ。

四 x ノ絶対値ガ十分小サイ時、 $\frac{1}{(1+x)^2}$ ノ近似式ヲ作レ。

又、コレヲ用ヒテ $\frac{1}{0.995^2}$ ノ近似値ヲ計算セヨ。

五 x ノ絶対値ガ十分小サイ時、 $f(x)$ ノ y

近似式トシテ

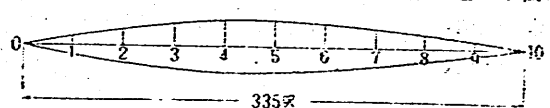
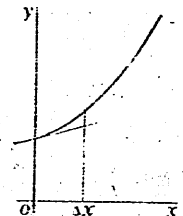
$$y=f(0)+f'(0)\Delta x$$

ガ得ラレル。 $y=f(x)$ ノ圖表デ、コノ近似式ハ何ヲ表シテキルカラ考ヘヨ。

六 半徑 10 輻ノ四分圓ヲ畫ケ。ソノ半徑ヲ十等分シ、各分點ヲ通ツテ半徑ニ垂線ヲ立テテ圓周ト交ハラセル。分割サレタ圓弧ノ各部ヲ直線デ近似シテ、コノ四分圓ノ面積ヲ求メヨ。又、ソノ近似値ノ相對誤差ヲ計算セヨ。

次ニ、本節デ述ベタヤウニ、圓弧ヲ拋物線ノ弧デ近似シテ、四分圓ノ面積ヲ求メヨ。又、ソノ近似値ノ相對誤差ヲ計算セヨ。

七 次ノ圖ト數表ハ、或ル船體ヲソノ吃水線ヲ通ル平面デ切



ツタ切り口ヲ示ス。

コノ船ノ吃水線ガ水面ノ上1呎ノ高サニアルトスレバ、コノ上ニ荷ドレホドノ重サノ貨物ヲ積ミ込ムコトガデキルカ。但シ、海水 35 立方呎ノ重サヲ 1 噸トシテ計算セヨ。

八 $y=f(x)$ ガ、次ノ二ツノ函數

$$y=px+q, \quad y=px^2+qx+r$$

ノウチノ何レカデアルトスル。曲線 $y=f(x)$ 、二直線 $x=a$ 、 $x=a+b$ 及ビ x 軸ヲ圍ム圖形ノ面積ハ、次ノ式ヲ示サレル。コレヲ證明セヨ。

$$\frac{b}{c} \left\{ K(a) + 4K\left(a + \frac{b}{2}\right) + K(a+b) \right\}$$

九 木製ノ球ガアツテ、ソノ重サハ 540 瓦、體積ハ 600 立方種デアアル。コレヲ水中ニ深ク沈メテ後放スト、下ノヤウナ運動ヲスルカ。但シ、水ノ抵抗ヲ摩擦ヲ無視シテ考ヘヨ。

又、水中デ放シテカラ 2 秒間ニ、コノ球ハドレダケ浮キ上ルカ。

十 或ル電車ガ驛ヲ出發シテカラ、一樣ニソノ速サヲ増シテ 20 秒後ニハ時速 60 軒ニ達シタ。ソノ後、2 分間ハ等速デ進行シ。次ニ、ソノ速サヲ一樣ニ減ジテ 5 秒後ニ停車シタ。

コノ電車ガ出發シテカラ 5 分間ニ、何程ノ距離ヲ進行シタコトニナルカ。

分點番號	線線 (呎)
1	7.0
2	15.1
3	19.3
4	20.8
5	21.0
6	20.0
7	16.5
8	11.5
9	6.0

統計ト確率

一 統計 (一)

我々中學生ノ體重ガ以前ニ比ベテ減少シテキルノデハナイカトイフ問題ガ起ツタトスル。

問一 體重ガ下ノヤウナ現狀ニアルカラ調べルノニ、次ノ何レノ方法ニヨルノガ適當デアルト考ヘラレルカ。

- (一) 我々ノ組ノ體重ノ平均ヲトル。
- (二) 我々ノ學年ノ體重ノ平均ヲトル。
- (三) 全校生徒ノ體重ノ平均ヲトル。
- (四) 全校生徒ノ體重ヲ、學年別ニ平均ヲトル。
- (五) 全校生徒ノ體重ヲ、年齢別ニ平均ヲトル。

問二 全校ノ生徒ニ就イテ、年齢別ニ體重ノ平均ヲ求メヨ。又、昭和十二年及ビ十六年ニ於ケル第四學年以下ノ全生徒ニ就イテ、體重ノ平均ヲ年齢別ニ計算シ、上デ求メタモノト比ベヨ。

問三 下ノ表ハ、昭和十二年ニ於ケル全國中學校生徒ノ身體検査ヲ基ニシテ作ツタ、體重ノ平均デアアル。

年齢	13	14	15	16	17	18
體重 (磅)	34.2	39.1	44.4	49.2	52.3	53.7

コレト前問デ得タ平均トヲ比較セヨ。

問一ノ (三) ノヤウニ、全校生徒ノ體重ノ平均ヲトルノデハ、

現在ト昭和十二年或ハ十六年トデ、生徒ノ年齢ノ構成ガ同ジテアルカドウカヲ知ラナイウチハ、輕率ナ判断ガデキナイ。

又、(一)ノヤウニ、單ニ一組ノ生徒ノミノ體重ノ平均ヲトメテ、特ニ體位ノ劣ツク數名ガ入ツテキルトイフヤウナ、偶然ナコトニヨツテ結果ガ左右サレルコトガアル。隨ツテ、ソノ結果ヲ輕率ニ用ヒテ、判断ヲ誤ルコトガアル。統計ヲトツタリ統計ノ結果ヲ用ヒタリスル場合ニハ、ソノ資料ガ目的トスル問題ニ適當シタモノデアアルカドウカニ注意スルガヨイ。

問四 問ニテ計算シタ平均値ヲ基ニシテ、全國ノ中學校生徒ノ體重ガドノヤウニナツテ來タカラ推定スルコトガデキルカ。

問五 全國ノ中學校生徒ノ體重ノ現狀ヲ知ラウト思フ。中學校生徒全體ニ就イテ、資料ヲ集メル餘裕ガナイ場合ニ、ドノヤウナ方法ガ考ヘラレルカ。

右ニ示シタノハ、大正十一年カラ昭和六年マデノ十年間ニ於イテ、落雷ニヨツテ出火シタ家屋ヲ、屋根ノ種類別ニ統計ヲトツテ得タ結果デアアル。

屋根	落雷件數	出火件數
草葺	630	463
板葺	60	23
瓦葺	358	76
金屬葺	50	14
不詳	314	154

(一) 草葺屋根ニ落雷シタ回数ガ一番多イ、コレカラ、草葺屋根ニ雷ガ落ち易イト判断シテヨイカ。

(二) コノ表カラドノヤウナコトガワカルカ。

二 次ノ表ハ、昭和十年ニ施行サレタ國勢調査ニヨル、東京府及ビ新潟縣ニ於ケル年齢階級別人口ヲ示ス。

各ノ分布圖表ヲ作り、異同ヲ調べヨ。

地方 年齢	東京府			新潟縣		
	總數	男	女	總數	男	女
0-4	78,1352	39,6651	38,4701	28,9253	14,6248	14,3005
5-9	66,1833	33,4874	32,6959	26,5754	13,3887	13,1867
10-14	60,8648	31,4515	29,4133	23,0785	11,8732	11,2053
15-19	77,7682	42,4876	35,2806	16,4467	8,5452	7,9015
20-24	77,6644	41,2556	36,4088	14,9311	7,2702	7,6609
25-29	61,3712	32,4052	28,9660	14,0648	6,8122	7,2526
30-34	50,6016	27,0869	23,5147	12,3410	6,1148	6,2262
35-39	40,1735	21,8458	18,3277	10,3919	5,1073	5,2446
40-44	31,1790	17,0073	14,1717	9,5518	4,7186	4,8332
45-49	26,5056	14,2150	12,2906	9,4840	4,6395	4,8445
50-54	21,2556	10,9320	10,3236	9,4661	4,5408	4,9253
55-59	17,4581	8,6639	8,7942	8,4145	3,9535	4,4610
60-64	11,4716	5,4375	6,0341	6,2327	2,7957	3,4370
65-69	7,8050	3,3925	4,4125	4,4909	1,9276	2,5633
70-74	4,6792	1,9061	2,7731	2,6347	1,0382	1,5965
75-79	2,4674	897	1,5702	1,6232	6007	1,0225
80以上	1,4082	4330	9752	9651	2987	6664

三 學校ニ近イ地域デ、住民約8000人ノウチ、十歳未満ノ幼者ト六十歳以上ノ老年者トノ概數ヲ知ル必要ガ起ツタトスル。階級ヲ詳シイ統計ナドヲ利用スルコトガデキナイ場合ニ、ドノ

ヤウニシテソノ概數ヲ求メルカ。

四 右ノ表ハ、昭和五年ニソガ國內地デ農業・工業・商業ニ従事シテキタ男子ノ年齢階級別人口ヲ示ス、職業ト年齢トノ關係ヲ比較セヨ。

五 下ニ示スノハ、昭和十年ノソガ國內地ニ於ケル不慮ノ傷

年齢階級	人数	年齢階級	人数
0-4	7280	45-49	1263
5-9	2378	50-54	1153
10-14	1028	55-59	1114
15-19	1944	60-64	949
20-24	2374	65-69	802
25-29	1982	70-79	1346
30-34	1678	80-89	527
35-39	1526	90以上	26
40-44	1347		

六十一頁ニアル年齢階級別人口ヲ用ヒテ計算セヨ。

二 分 布

各四十名ヅツノ甲、乙二ツノ組ガアル、ソノ生徒ノ體重ヲ測リ、次頁ノ表ノヤウナ度數分布表ヲ得タトスル。

各組ノ體重ノ平均ヲ求メルト、何レモ 45 斤トナツテ一致ス

年齢	農業	工業	商業
0-14	千人 185	千人 132	千人 106
15-19	984	752	465
20-24	768	708	370
25-29	758	639	366
30-34	717	555	330
35-39	675	430	293
40-44	673	344	272
45-49	679	265	244
50-54	699	201	214
55-59	574	117	152
60-64	442	66	101
65-69	301	35	58
70以上	289	24	45
計	7743	4269	3014

害ニヨル死亡者ノ分布表デアル。

各年齢階級ノモノガ不慮ノ傷害デ死亡スル危険ノ程度ヲ

ル。然シ、ソノ分布ノ様子ハ明ラカニ違ツテキル。随ツテ、平均値ノミヲ求メタノデハ、コノ相違ヲ示スコトガデキナイ。

問一 一群ノ數値ノ集リガ、ソノ平均ヲ中心トシテ、ドノ程度ニ密集シテキルカラ示ス方法ヲ工夫セヨ。

數値ノ集リ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ガアツテ、ソノ平均ヲ m トスル時

$x_1-m, x_2-m, x_3-m, \dots, x_n-m$ ヲ、各數値ノ偏差トイフ。

偏差ヲソノママ合計シタノデハ常ニトナリ、問一ノ目的ニ合ハナイ。

數値ノ集リ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ノ平均ニ對スル偏差ノ二乗ノ平均ノ正ノ平方根

$$\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\dots+(x_n-m)^2\}}$$

ヲ、コノ數値ノ集リノ標準偏差トイヒ、普通 σ デ表ス。

問二 上ニ舉ゲタ例ニ就イテ、各 x_i ノ標準偏差ヲ計算セヨ。

又、標準偏差ハ、平均ヲ中心トシテ密集シテキル度合ヲ示スコトヲ確かメヨ。

問三 我々ノ身體検査表ニハ、體重ヲ 0.1 斤マデ測ツタ値ガ出テキル。コレヲ 42 斤臺、43 斤臺トイフヤウニ、1 斤オキニ分ケテ、度數分布表ヲ作レ。計算ノ便宜上、同ジ階級ノモノハ 12.5 斤、43.5 斤トイフヤウニ、ソノ中央ニ集ツテキルモノトミテ、體重ノ平均ヲ求メヨ。次ニ、標準偏差ヲ計算セヨ。

體重(斤)	甲	乙
38	1	
39	1	
40	1	1
41	2	
42	2	2
43	4	5
44	6	7
45	7	10
46	5	8
47	4	4
48	3	1
49		1
50	2	1
51	1	
52		
53	1	

標準偏差ノ計算ハ、一般ニ簡單デハナイ。

$$n\sigma^2 = (x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2$$

ニ於イテ、平均 m ノ代リニ、計算ニ都合ノヨイ他ノ値 m' ヲ用ヒテ

$$n\sigma'^2 = (x_1 - m')^2 + (x_2 - m')^2 + (x_3 - m')^2 + \dots + (x_n - m')^2$$

ヲ計算スル。

問四 σ' カラ σ ヲ求メル時、 $\sigma^2 = \sigma'^2 - (m - m')^2$ ニヨツテ計算スルコトガデキル。コレヲ證明セヨ。

前頁ニアル甲、乙二ツノ組ニ就イテ、各、ノ標準偏差ヲ計算セヨ。

問五 次ニ示シタノハ、或ル専門學校ノ生徒 302 名ニ就イテノ視力ノ分布表デアル。

左 眼	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.5	2.0	計
0.0	25	2													27
0.1		28	8	2											39
0.2			5	9	4	1									20
0.3				1	3	8	1	1							15
0.4					1	3	8	1	1						13
0.5						1	1	1	1						4
0.6							1	2	2						5
0.7										1					1
0.8											1	1	1	2	8
0.9												3	4	3	12
1.0													1	3	23
1.2														7	92
1.5														10	39
2.0														2	4
計	26	38	23	17	9	5	6	5	3	10	21	92	43	4	302

コノ表カラ、下ノヤウナコトガワカルカ。

又、左眼ノ視力が 1.0, 1.2 及ビ 1.5 ノ者ニ就イテ、先ヅ、右眼ノ視力ノ平均ヲ求メヨ。次ニ、各、ノ標準偏差ヲ算出セヨ。

上ノヤウナ表ヲ 相關表 トイフ。

一 右ニ示シタノハ、甲・

乙・丙ノ三地方ニ在住スル

二十一歳ニ達シタ男子ニ就

イテノ、體重ノ分布表デア

ル。

地方別ニ青年ノ體重ノ平

均ヲ計算シ、コレヲ比較セ

ヨ。

又、各、ノ標準偏差ヲ計算

セヨ。

二 數値ノ集リ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ニ於イテ

$$\frac{1}{n} \{ (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + \dots + (x_n - x)^2 \}$$

ノ値ヲ最モ小サクスル x ノ値ハ、コレヲノ平均ニ等シイ。コレ

ヲ證明セヨ。

三 我々ノ學年ノ者ノ體重ノ分布ヲ、入學當初ノモノト比ベ

ヨ。

四 甲、乙二人ガ同ジ品物ノ重ヲ 10 回ヅツ測ツテ、次ノ

ヤウナ結果ヲ得タ。但シ、單位ハ瓦デアル。

體重(瓦)	甲	乙	丙
40 未満	194	73	73
40 以上	1393	628	676
45 以上	4454	2520	3514
50 以上	5627	4097	8434
55 以上	2888	2660	8626
60 以上	817	983	4158
65 以上	131	214	1256
70 以上	22	40	218
75 以上	7	20	36
總人員	1,5533	1,1235	2,6991

甲	19.4	19.5	20.0	19.8	20.2	19.1	19.7	19.9	20.0	19.0
乙	20.9	19.5	18.4	19.6	19.7	19.9	18.8	18.7	19.2	20.0

ドチラノ測定値が信頼デキルト思フカ。

五 我々ノ學年ノ者ニ就イテ、身長ト體重トノ相關表ヲ作り、身長ト體重トノ關係ヲ調べヨ。

三 統計 (二)

第一及ビ二節デハ、統計ニヨツテ現在ノ狀況ガドノヤウニナツテキルカラ調ベル方法ヲ考ヘタ。現状ガドノヤウデアアルカヲ知ルコトモ大切デアアルガ、將來ニ起ルベキ事柄ヤ未知ノ事柄ニ就イテ、見込ミヲ立テタリ、豫想ヲ下シタリスルコトモマタ大切デアアル。

問一 或ル學校デ、十月初旬カ十一月初旬カノ一日ヲ運動會ニアテテ、ソノ日取リヲ毎年變ヘナイヤウニシヨツト考ヘタ。

日取ヲ決定スルニハドウスルカ。

問二 右ノ表ハ昭和元年カラ十一年マデニ於ケル、腸チフス患者ノ死亡統計デアアル。

多數ノ腸チフス患者ガ發生シタ場合ニ、ソノウチドレクラキノ割合デ死亡者ガ出ルト考ヘラレルカ。

年次	患者	死亡者
1	4,3951	8879
2	3,7554	7332
3	4,2063	8200
4	3,7345	7503
5	4,1434	7827
6	3,8259	7599
7	3,5519	6501
8	3,8529	7232
9	4,2595	7731
10	3,8357	6843
11	3,6738	6467

上ノ統計ヲミルト、ドノ年ニ就イテモ資料ノ數ガ多ク、略、二割ニ當ル患者ガ毎年死亡シテキル。

ソレ故、特別ナ療法ヤ醫藥ガ發見セラレタリ、又、一般ノ衛生思想ガ急ニ向上シタリシナイ限り、續ク年ノ死亡者モ略、二割デアラウト推定スルコトガデキル。

然シ、資料ガ少イ場合ニハ、推定スルコトガ困難デアアル。

問三 下ノ表ハ、大正十四年・昭和五年及ビ昭和十年ニ於ケ

年次 年 齡	大正十四年	昭和五年	昭和十年
0-4	826,4583	901,1135	932,8501
5-9	692,4432	776,7085	853,1419
10-14	673,5030	680,1045	768,5247
15-19	588,5277	653,9604	664,0917
20-24	506,0527	553,1506	607,1071
25-29	439,3471	483,5634	524,0083
30-34	371,6087	421,3665	463,2637
35-39	344,9377	358,4833	404,5846
40-44	322,1765	328,6478	340,6011
45-49	305,5149	304,6263	311,2834
50-54	246,0903	283,0694	283,2875
55-59	199,0817	221,6103	257,1157
60-64	156,8341	172,2085	193,0611
65-69	129,4340	125,5830	138,7092
70-74	91,9180	92,6601	91,3423
75-79	52,3014	55,1718	56,1804
80以上	28,4529	32,9726	36,2640
計	5973,6822	6445,0005	6925,4148

ル、ワカ國ノ年齢階級別人口ノ統計デアル。

コレヲ用ヒテ、昭和十五年ニ於ケル、年齢階級別人口ヲ推定スルコトガデキル。

昭和十五年ノワカ國ノ人口總計ハ、約 7311 萬人デアル。上ノ推定ガ大體當ツタカドウカラ調ベヨ。

一 問二デハ、次ノコトヲ豫想シテキル。即チ、箇々ノ事象デハ全ク偶然ニ支配サレテ、何ノ規則モナイヤウニ見エル場合デモ、同種ノ事象ヲ數多ク集メルト、或ル一定ノ法則ガ成リ立ツデアラウトイフコトデアル。

貨幣ヲ投ゲルト表ガ出ルカ裏ガ出ルカハ、箇々ノ場合ニ就イテ、全ク豫想スルコトガデキナイ。今、同ジ三箇ノ貨幣ヲ同時ニ幾回モ投ゲル時、全部表ガ出ル回数ニ就イテ、ドノヤウナ法則ガ成リ立ツト推定サレルカ。コレヲ調ベヨ。

又、表ガ二ツ、裏ガ一ツ出ル場合ニ就イテモ同様ノコトヲ試ミヨ。

二 前問デ、法則ガ推定サレタラ、尙、數百回試ミテ、得ラレタ法則ガ大體成リ立ツタカドウカラ調ベヨ。

三 昭和十年ニ人口ガ約 150 萬アツタ地方ガアル。ソノ當時二十歳以上四十歳未滿ノ男子ハ凡ソ何程アツタト推定サレルカ。

四 確 率

或ル事象ガコレカラ起ルトカ、或ル事實ガ前ニ存在シタトカ

ガマダ確實ニワカツテキナイ時、ソレラノ事象ニ就イテノ確カラシサヲ考ヘル場合ガアル。

問一 五十歳ノ男ノ人ガ尙五年生き殘ルコトト、八十歳ノ人ガ尙五年生き殘ルコトトハ、同ジ程度ニ可能性ガアルモノト考ヘラレナイ。六十一頁ニアル分布表ヲ用ヒテ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問二 甲、乙、丙ノ三組ノ籤ガアル。甲ハ百本アツテ、ソノウチ當リガ一本デアリ、乙ハ百本アツテ、ソノウチ當リガ十本デアリ、又、丙ハ千本デアツテ、ソノウチ當リガ十本デアル。次ノ三ツノ場合ニ於ケル可能性ヲ比ベヨ。

- (一) 甲ノ籤ヲ一本引イテ當ルコト
- (二) 乙ノ籤ヲ一本引イテ當ルコト
- (三) 丙ノ籤ヲ一本引イテ當ルコト

確カラシサヲ數ニ示シテ、信頼度ガ數ノ大小ニヨツテワカルヤウニシヨウ。問二デ

- (一) 甲ノ籤ハ、當リガ百本ニツイテ一本ノ割合デアル。
 - (二) 乙ノ籤ハ、當リガ十本ニツイテ一本ノ割合デアル。
 - (三) 丙ノ籤ハ、當リガ百本ニツイテ一本ノ割合デアル。
- 隨ツテ、一本引イテ當ル確カラシサハ、(一)ノ場合ニハ $\frac{1}{100}$ 、(二)ノ場合ニハ $\frac{1}{10}$ 、(三)ノ場合ニハ $\frac{1}{100}$ トスル。

コノヤウニ、確實ニハワカラナイ事柄ニ就イテ、ソノ推定判断ノ信頼度、確カラシサヲ示ス數ヲ 確率 トイフ。

何レノ場合ニ於イテモ、籤ニ目印ナドガツイテキナクテ、ド

レガ當リデアルカガ全クワカラナイトシテノコトデアル。即チ當リ籤ヲ引カウト考ヘテキテモ、又、サウデナクテモ、ドノ籤モ同ジ確率デ引カレルモノトシテデアル。

コノヤウナ場合ニ、籤ノドノ一本ヲ引コトモ 同等デアルトイフ。

一般ニ、 n 箇ノ事象ガアツテ、コノウチドレカ一ツダケ必ズ起ルヤウナ實驗ヲ行ハツテ、各ノ事象ガツレゾレ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ 回起ソタトスル。

$$\frac{r_1}{N}, \frac{r_2}{N}, \frac{r_3}{N}, \dots, \frac{r_n}{N}$$

ト等シトミラレル時、コノ n 箇ノ事象ノ起ルコトガ、同等デアルトイフ。

問一ノヤウナ場合ニ就イテモ、確率が考ヘラレル。

内地人口ノ分布表ニヨルト、昭和五年ニ於ケル五十歳ノ男子ハ 28,5734 人デアリ、五年後ノ昭和十年ニ於ケル五十四歳ノ男子ハ 25,8825 人デアル。内外地間ノ入ノ出入ヲ無視スレバ、五十歳ノ男子ガ尙五年以上生命ヲ保ツ確率ヲ、 $\frac{259}{286} = 0.91$ ト計算シテ 0.91 トスレバヨイ。

問三 次ノ表ハ、昭和十一年ニ於ケルワガ國ノ死亡原因ニ關スル統計ノ一部デアル。

年齢階級	總數	肺炎	氣管支炎	老衰
.....
50—54	4,7449	2599	786	—
55—59	6,1523	3420	1227	—
60—64	7,0359	4035	1669	2628
.....
計	123,0278	11,2204	3,6120	9,1936

55—59 歳ノ者ガ一年ノウチニ

- (一) 肺炎デ死亡スル確率
- (二) 氣管支炎デ死亡スル確率
- (三) 肺炎・氣管支炎以外ノ原因デ死亡スル確率
- (四) 肺炎カ氣管支炎カデ死亡スル確率

ヲ計算セヨ。

問四 或ル事象ノ起ル確率が 1 デアルトイフノハ、ドンナコトヲ意味スルカ。

又、0 デアルトイフノハ、ドンナコトヲ意味スルカ。

問五 或ル事象ノ起ル確率 p ト起ラナイ確率 q トノ間ニ、ドノヤウナ關係ガアルカ。コレヲ式ニ書き表セ。

一 第三節一得タ結果ヲ基ニシテ、次ノ確率ヲ計算セヨ。

(一) 三箇トモ表ガ出ル確率

(二) 二箇ハ表、一箇ハ裏ガ出ル確率

二 右ノ表ハ、昭和三年カヲ昭和十二年マデノ十年間ニ於ケル、ワガ國ノ出生統計ヲ示シタモノデアル。

生マレル子供ガ男デアル確率ト女デアル確率トヲ求メヨ。

年次	男	女
昭和 3	109,0702	104,5150
" 4	105,8666	101,8360
" 5	106,9511	101,5549
" 6	107,3385	102,9399
" 7	111,7954	106,4788
" 8	108,7688	103,3565
" 9	104,2736	100,1047
" 10	112,2867	106,7836
" 11	107,6197	102,5772
" 12	111,6154	106,4580

三 右ノ表ハ、ソガ國ノ出生男子十萬人ガ、年ヲ經ルニ從ツテ死亡減少シテ行ク有様ヲ、統計ニヨツテ推定シテ得タモノデアル。

コノ表ヲ基ニシテ、本年十歳ノ男子ガ六十歳ニ達スル確率ト、達シナイ確率トヲ求メヨ。

四 上ノ表ヲ基ニシテ、本年十歳ノ男子ガ六十歳ニ達スル確率ト、本年二十歳ノ男子ガ七十歳ニ達スル確率トヲ計算シ、ソノ大小ヲ比ベヨ。又、ソノ意味ヲ述ベヨ。

五 或ル統計デ、資料ノ數ガ n 箇アツテ、ソノウチ甲、乙、丙ノ事象ノ起ル場合ノ數ヲソレゾレ a 箇、 b 箇、 c 箇トスル、コレラノ事象ハ二ツ以上重複シテ起ラナイモノトシテ、次ノ確率ニ關スル計算ヲセヨ。

- (一) 甲ノ起ル確率 (二) 甲ノ起ラナイ確率
 (三) 乙ノ起ル確率 (四) 丙ノ起ル確率
 (五) 乙、丙ノ何レカガ起ル確率
 (六) (三)、(四)、(五)ノ確率ノ間ニアル關係

五 數學的確率

骰ヲ毎日千回ヅツ五日間振り、各、ノ日ニ就イテ出タ目ノ回數ヲ記録セヨ。

年齢	人数	年齢	人数
0	10,0000	35	6,6849
5	8,1788	40	6,4242
10	8,0141	50	5,7034
15	7,9100	60	4,4712
20	7,6189	70	2,6343
25	7,2486	80	8071
30	6,9441	90	531

問一 第一日目ニ於イテ、各目ノ出タ割合ヲ求メヨ。

又、第二日目、第三日目、第四日目、第五日目マデノ總計ニ就イテモ計算セヨ。

上ノ實驗カラ、下ノ目ノ出ルコトモ同等デアルト考ヘラレルデアラウ。

然シ、コノヤウナ實驗ニヨルマデモナク、下ノ目ガ出易イト考ヘラレル根據ガナイカラ、下ノ目ノ出ルコトモ同等デアルト認メラレル。ソレ故、各、ノ目ノ出ル確率ヲ $\frac{1}{6}$ トシテヨイ。

上ノヤウニ、實驗ニヨラナイテ定メタ確率ヲ 數學的確率 トイフ。コレニ對シテ、經驗ヲ基ニシテ定メタ確率ヲ 經驗的確率 トイフ。

數學的確率ハ、一意ニ定マル。コレニ反シテ、經驗的確率ハ、與ヘラレタ資料ニヨツテ定マルモノデアルカラ、資料ニヨツテ異ナルノガ普通デアル。然シ、經驗的確率ハ、ソノ計算ヲシタ基ニナル資料ノ箇數ガ多クナレバ、數學的確率ニ漸次近ヅクモノト考ヘラレル。又、コノヤウナコトヲ想定シテキレバコソ、數學的確率ガ具體的ナ事象ニ關スル見込ミヲ立テルノニ役立つデアル。

隨ツテ、數學的確率ヲ用ヒテ算出シタ結果ニヨツテ立テタ見込ミガ、實驗ト著シク違フ場合ニハ、基ニナル數學的確率ヲ計算シタ時、同等ト考ヘタコトガ正シイカドウカラ検討シナケレバナラナイ。

問二 三箇ノ同ジ貨幣ヲ同時ニ投ゲル時、ソノ表・裏ノ出方ガ四通リアル。ソノ各、ニ就イテ、確率ヲ計算セヨ。

又、今求メタ確率ト前節一テ求メタ經驗的確率トヲ比較セヨ。
 問三 二ツノ骰ヲ同時ニ投ゲテ、出タ目ノ數ノ和ガ3ニナル確率ヲ求メヨ。

又、4, 5, 6ニナル確率ヲ計算セヨ。

問四 甲ノ籤ハ五本アツテ、ソノウチ當リガ二本デアリ、乙ノ籤ハ六本アツテ、ソノウチ當リガ一本デアル。コノ二ツノ籤ニ就イテ、次ノ確率ヲ求メヨ。

- (一) 甲ヲ引イテ當ル確率
- (二) 乙ヲ引イテ當ル確率
- (三) 甲ト乙トヲ引イテ、共ニ當ル確率
- (四) 甲ト乙トヲ引イテ、ドチラモ當ラナイ確率
- (五) 甲ト乙トヲ引イテ、ドチラカ一方ダケガ當ル確率

一 四箇ノ同ジ貨幣ヲ同時ニ投ゲル時、表・裏ノ出方ニ幾通りノ種類ガアルカ。

又、コノ各ノ場合ニ就イテ、確率ヲ計算セヨ。

二 二箇ノ骰ヲ同時ニ投ゲテ、出タ目ノ和ガ偶數ニナル確率ハ何程カ。又、奇數ニナル確率ハ何程カ。

三 或ル月ニ賣リ出サレタ寶籤ハ總數700萬枚デ、當リハ一等ガ280本、二等ガ1400本、三等ガ5,6000本、四等ガ77,0000本デアツタ。

コノ籤ヲ一枚買ツタ人ガ、何等カニ當ル確率ヲ計算セヨ。

又、ドレニモ當ラナイ確率ヲ計算セヨ。

四 前問ト同ジ條件ノモトニ、寶籤ガ二回賣リ出サレタトスル。各回ニ一枚ヅツ買ツタ場合ニ就イテ、次ノ確率ヲ計算セヨ。

- (一) 二枚トモ當ル確率
- (二) 一枚ダケ當ル確率
- (三) 少クトモ一枚當ル確率
- (四) 一枚モ當ラナイ確率

五 甲、乙、丙三箇ノ骰ヲ同時ニ投ゲル時、目ノ出方ハ幾通りアルカ。

次ニ、一ノ目ガ一ツ、二ノ目ガ二ツ出ル確率ヲ求メヨ。

六 袋ノ中ニ三箇ノ白球ト四箇ノ黒球ガ入ツテキル。コノ中カラ

- (一) 一箇ノ球ヲ取り出シテ、ソレガ白デアル確率
- (二) 二箇ノ球ヲ取り出シテ、二ツトモ白デアル確率
- (三) 二箇ノ球ヲ取り出シテ、一ツガ黒テ、他ノ一ツガ白デアル確率

ヲ求メヨ。

七 袋ノ中ニ四箇ノ白球ト六箇ノ黒球ガ入ツテキル。コノ中カラ二箇ノ球ヲ取り出シテ、二ツトモ白デアル確率ハ、 $C_2 \div {}_{10}C_2$ ニ等シイ。コレヲ證明セヨ。

八 前問テ、二ツトモ黒デアル確率ヲ求メヨ。又、白ト黒トデアル確率ヲ求メヨ。

六 確率ノ計算

前節デ、種々ノ場合ニ就イテ、數學的確率ノ計算ノ仕方ヲ考

ヘタ。尚、複雑な場合ニ於ケル確率ヲ求メルタメニ、今マデニソカッタコトヲ整理シテオカウ。

前節ノ問四デ、甲ノ籤ハ五本デアツテ、ソノウチ當リガ二本デアリ、乙ノ籤ハ六本デアツテ、ソノウチ當リガ一本デアル。

(一) 甲ト乙トヲ一本ツツ引イテ、ドチラモ當ル確率ヲ、次ノヤウニ計算シテ求メルコトモデキル。

甲、乙カラー一本ツツ引ク時、ソノ引キ方ハ(5×6)通りアル。ソノウチ、共ニ當リヲ引ク場合ハ(2×1)通りデアル。随ツテ、コノ確率ハ、 $\frac{2 \times 1}{5 \times 6} = \frac{1}{15}$ デアル。

(二) 甲ト乙トヲ一本ツツ引イテ、少クトモ一方ガ當ル確率ヲ、次ノヤウニ計算シテ求メルコトガデキル。

少クトモ一方ダケガ當ル場合ハ、次ノ三ツニ分ケラレル。

(イ) 甲ガ當リ、乙モ當ル

(ロ) 甲ガ當リ、乙ガ當ラナイ

(ハ) 甲ガ當ラナイデ、乙ガ當ル

甲、乙カラー一本ツツ引ク時、ソノ引キ方ハ前ト同様ニ(5×6)通りアル。ソノウチ、(イ)、(ロ)、(ハ)ノ場合ハ、ソレゾレ(2×1)、(2×5)、(3×1)通りデアル。

随ツテ、少クトモ一方ガ當ル確率ハ

$$\frac{(2 \times 1) + (2 \times 5) + (3 \times 1)}{5 \times 6} = \frac{1}{2}$$

デアル。

問一 甲ヲ一本引イテ當ル確率、乙ヲ一本引イテ當ル確率及ビ甲ト乙トヲ一本ツツ引イテドチラモ當ル確率ノ間ニアル關係ヲ

ヲ調べヨ。

又、甲ト乙ヲ一本ツツ引イテ、甲モ乙モ當ル確率、甲ガ當ツテ乙ガ當ラナイ確率及ビ甲ガ當ラナイデ乙ガ當ル確率及ビ甲、乙ノドチラカ少クトモ一方ガ當ル確率ノ間ニアル關係ヲ調べヨ。

上デ得ラレタ結果ヲトメテ一般的ニ述ベルト、次ノヤウニナル。

(イ) 或ル試行ノモトニ起ル事柄 A、B ガアツテ、コノウチドレカ一方ガ起レバ、他方が起ラナイモノトスル。

A、B ノ起ル確率ヲ α 、 β トスルト、A、B ノドレカガ起ル確率ハ $\alpha + \beta$ デアル。

(ロ) 或ル試行甲ノモトニ起ル事柄 A ノ確率ヲ α トシ、甲ト關係ノナイ試行乙ノモトニ起ル事柄 B ノ確率ヲ β トスル。

コノ時、試行甲、乙ノモトニ A、B ガ共ニ起ル確率ハ $\alpha\beta$ デアル。

問二 上ノ(イ)、(ロ)ノ二ツノ事柄ガ成リ立ツコトヲ證明セヨ。

上ノ二ツノ性質ハ、確率ヲ計算スル時ニ於イテ基礎ニナルモノデアル。

問三 十本ノ籤ノウチ、當リガ三本デアル。始メ甲ガ一本引キ、次ニ乙ガ一本引ク時、次ノ確率ヲ計算セヨ。

(一) 甲ガ當ル確率

(二) 甲ガ當ツタトシテ、乙ノ當ル確率

(三) 甲ガ當ラナカッタトシテ、乙ノ當ル確率

(四) 乙ガ當ル確率

問四 次ニ示スノハ、ソガ國內地ノ人口分布表ノ一部分デア
ル。

年 齡	昭和五年人口		年 齡	昭和十年人口	
	男			男	
49 歳	30,6342		54 歳	27,8099	
50 歳	28,5734		55 歳	25,8825	

コノ統計ヲ基ニシテ、五十歳ト四十九歳ノ二人ノ男子ガ、揃
ツテ五年以上生キル確率ヲ求メヨ。

又、コノ二人ノウチ、少クトモ一人ガ五年以上生キル確率ヲ
求メヨ。

一 カ本ノ籤ノウチ、當リガカ本アルモノトスル。コノ籤ヲ
甲、乙、丙三人ガ順ニ一本ツツ引ク時、各、ガ當ル確率ヲ求メヨ。

二 甲ノ袋ニハ白球三箇、黒球五箇ガ入ツテアリ。乙ノ袋ニ
ハ白球四箇、黒球六箇ガ入ツテキル。別ニ、二本ノ袋ガアツテ、
ソレデ甲、乙何レノ袋カラ球ヲ取り出スカヲ定メルコトニスル。
一箇ノ球ヲ取り出シテ、ソレガ白デアル確率ハ何程カ。

三 ニツノ事柄 A, B ガアツテ、ソレハ同時ニハ起ラナイ。
A, B ノウチノ何レカガ起ツタ時、ソレニ續イテ第三ノ事柄 C
ガ起リ得ルモノトスル。

A ノ起ル確率ヲ α , B ノ起ル確率ヲ β

・ A ガ起ツタ後ニ C ノ起ル確率ヲ δ

B ガ起ツタ後ニ C ノ起ル確率ヲ δ'

デアルトスルト、A, B ガ起ル前ニ C ノ起ル確率ハ何程カ。

四 或ル條件ノモトデ、百發撃ツテ平均七十八發命中サセル
射手ガアル。

コノ射手ガ同ジ條件ノモトデ、二發撃ツテ一發モ當ラナイ確
率、三發撃ツテ一發モ當ラナイ確率ヲ求メヨ。

又、少クトモ一發ハ當ル確率ガ 99% ヲ超スノハ、何發以上
撃ツタ時カラ調ベヨ。

五 統計ニヨルト、生マレタ男子十萬人ノウチ、一年以上生
存スル者ノ數ハ 8,5990 人デ、コレガ女子ナラバ 8,7586 人デア
ルトイフ。コレヲ基ニシテ、次ノ確率ヲ計算セヨ。

(一) 男子ガ生マレタトシテ、ソノ子供ガ一年以上生存スル
確率

(二) 生マレル子供ガ男子デアツテ、シカモ一年以上生存ス
ル確率

七 期望金額

甲、乙ノ二ツノ籤ガアル。甲ハ千本デ、ソノウチ當リガ二十
本デアリ、當レバ百圓受ケ取ルコトニナツテキル。又、乙ハ千
本デ、ソノウチ當リガ十本デアリ、當レバ千圓受ケ取ルコトニ
ナツテキル。

甲、乙何レカ一方ヲ選ブ時、單ニ確率ノ大小ノミニヨツテ判
斷スルコトハデキナイ。

問一 ドノ籤ヲ引クノガヨイカラ考ヘヨ。

甲ノ籤ヲ n 回引イタトスル。 n ガ十分大キケレバ、 $\left(\frac{n}{50}\right)$ 回
當ルト考ヘラレルカラ、受ケ取ル金額ノ總計ハ $\left(100 \times \frac{n}{50}\right)$ 圓
デアアル。隨ツテ、甲ノ籤ヲ一本引ク人ハ

$$\frac{100 \times \frac{n}{50}}{n} = 2$$

ト計算シテ、2 圓受ケ取ルモノト考ヘラレル。

一般ニ、或ル試行ノモトニ、事柄 A ガ起ル確率ヲ α トシ、事
柄 A ガ起レバ p 圓ヲ受ケ取ルト約束シタ人ガアルトスル。

上ト同様ニ、 n 回ノ試行ヲ行ナツタトスル。 n ガ十分大キケ
レバ、事柄 A ハ $n\alpha$ 回起リ、受ケ取ル金額ノ總計ハ $pn\alpha$ 圓デ
アル。隨ツテ、各回ノ試行デ、

$$\frac{pn\alpha}{n} = p\alpha$$

ト計算シテ、 $p\alpha$ 圓受ケ取ルモノト考ヘラレル。

コノ $p\alpha$ 圓ヲ、ソノ人ノ受ケ取ル 期望金額 トイフ。

問二 前頁ノ乙ノ籤ニ就イテ、一本引ク人ノ受ケ取ル期望金
額ヲ求メヨ。

問三 前頁ノ籤デ、甲ノ方ハ一本 2 圓デアルトスル。コノ籤
ヲ一本引ク人ノ受ケ取ル期望金額ヲ求メヨ、當ツテモ差引キ 98
圓シカ受ケ取ラナイコトニ注意セヨ。

問四 前問デ、ソノ人ノ支拂フ期望金額ヲ計算セヨ。

問五 前頁ノ問ニ於ケル籤デ、乙ノ方ハ一本 10 圓デアルト

スル。コノ籤ヲ一本引ク人ノ受ケ取ル期望金額及ビ支拂フ期望
金額ヲ計算セヨ。

問六 問二、三デ、ドチラノ籤ヲ引クノガ有利デアアルカ。コ
レヲ認ベヨ。

問七 一般ニ、或ル事柄 A_1, A_2, \dots, A_n ガアツテ、ソノ何レ
カガ起リ、同時ニ二ツ以上ハ起ラナイモノトスル。 $A_1, A_2, \dots,$
 A_n ガ起ツタ時ニ受ケ取ル金額ヲ p_1 圓, p_2 圓, $\dots,$ p_n 圓トス
ル。ソノ人ノ受ケ取ル期望金額ハ $(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n)$ 圓
デアアル。コレヲ證明セヨ。

ココデ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ハ A_1, A_2, \dots, A_n ノ起ル確率トスル。

問八 骰ヲ一箇投ゲテ、出タ目ガ 1 ナラバ 1 圓, 2 ナラバ 2
圓, $\dots,$ 6 ナラバ 6 圓ヲ受ケ取ルモノトスル。コノ約束ヲシタ
人ノ受ケ取ル期望金額ハ何程ガ。

一 或ル籤ニ一等カラ四等マデノ當リガアツテ、ソノ各、ノ
確率及ビ各等ノ當籤金ハ次ノ通りデアアル。

一等	當籤金	一萬圓	確率	一万分ノ一
二等	"	五千圓	"	一万分ノ三
三等	"	二千圓	"	千分ノ一
四等	"	五百圓	"	百分ノ一

コノ籤一本ガ 10 圓デアルトシテ、一本引ク人ノ受ケ取ル期
望金額及ビ支拂フ期望金額ヲ求メヨ。

二 骰ヲ投ゲテ、一ノ目ガ出レバ 1 圓, 二ノ目ガ出レバ 2 圓

76

ヲ受け取ルモノトスル。骰ヲ一回振ル人ノ期望金額ハ何程カ
三 1, 2, 3, …… n ノ番號ノツイタ n 箇ノ球ヲ入レタ袋
アル。コノ袋カラ球ヲ一箇ヅツ n 回取り出シ、ソノ度毎ニ取
出シタ球ハ袋ノ中ニ戻スモノトスル。

今、第一回 = 1 ガ出レバ 1 圓、第二回 = 2 ガ出レバ 2 圓、
三回 = 3 ガ出レバ 3 圓トイフヤウニ金ヲ受け取ルモノトスレ
コノ人ノ受け取ル期望金額ハ何程カ。

58. 8. 31

文部省告示第 100 号