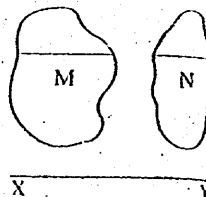
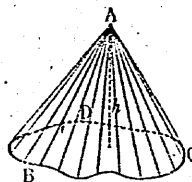


六 曲線で囲まれる二つの図形 M, N がアル。一定の直線 XY に平行な直線を引く時、M の内部ニアル部分の長さト N の内部ニアル部分の長さとの比が、常に $3:2$ に等しいト、M ト N トの面積の間ニドノヤツナ関係ガアルカ。



一般ニ、比ガ $a:b$ デアルトドウカ。

七 面積ガ M 平方種ノ平面図形 BCD ガアル。コノ平面カラ h 種ノ距離ニアル點 A ト、図形 BCD ノ周上ノ各點トヲ結ブ直線ハ一ツノ曲面ヲ作ル。コノ曲面ト平面図形 BCD トデ一ツノ立體ヲ作ル。



コノ立體ノ體積ハ、底面積ガ M 平方種デ、高サガ h 種ノ角錐ハ圓錐ノ體積ニ等シイ。コレヲ證明セヨ。

八 一般項ガ次ノ式デ表サレル無限數列ガアル。コレヲノ數列ニ極限ガアレバ、ソノ値ヲ求メヨ。

$$(一) \frac{(n-2)(5n-6)}{(6n^2+1)(4n+3)} \quad (二) \frac{n-3}{(7n-3)(n+4)}$$

$$(三) \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$$

$$(四) \frac{1}{n^3}\{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)\}$$

五 種々ノ問題

一 數列ノ各項カラソノ前ニアル項ヲ引イタ各ノ第一階差

中等數學

三

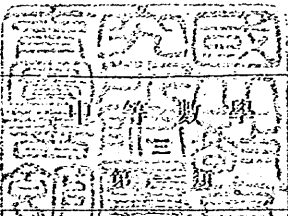
第一類

文部省

[後] ¥ .55

文部省調查普及局刊行課寄贈

(61)



中等學校教科書

昭和21年5月13日印刷 同日刷印開始 (後)
 昭和21年5月17日發行 同日刷印開始 定價 55 錢

(昭和21年5月17日 文部省検査済)

APPROVED BY MINISTRY
 OF EDUCATION
 (DATE May 13, 1946)

著作権所有

著 作 者 文 部 省
 編 纂 者 東京臨海副都心本町三番地
 中 等 学 校 教 科 書 株 式 會 社
 代 表 者 加 野 正 吾
 刷 刷 者 東京臨海副都心市加賀町一丁目十二番地
 大 日 本 印 刷 株 式 會 社
 代 表 者 佐 久 間 長 吉 郎

發 行 所 中 等 学 校 教 科 書 株 式 會 社

教科書番号
61ノ三

トイフ。第一階差が作
 数列ヲ第一階差数列
 トイフ。第一階差数列
 カラ上ト同様ニシテ第
 二階差数列ガ作ラレル。
 以下同様ニシテ第三、
 第四階差数列ガ作ラレ

数 例	2	-8	0	64	250	648
第一階差	6	8	64	186	398	
第二階差		14	56	122	212	
第三階差			42	66	90	
第四階差				24	24	

上ノ表デハ、第四階差ガ定マツタ数デアル。各階差数列ニ
 對イテ、次ノコトヲ調べヨ。

- (一) 第三階差数列ノ一般項ハ n ノ一次式デ表サレル。
- (二) 第二階差数列ノ一般項ハ n ノ二次式デ表サレル。
- (三) 第一階差数列、元ノ数列ノ一般項ハ、ソレゾレ n ノ三
 次式、四次式デ表サレル。
- (四) 元ノ数列ノ初メノ n 項ノ和ハ、 n ノ五次式デ表サレル。
 又、ソノ式ヲ求メヨ。

二 或ル数列ノ第 k 階差数列ノ各項ガ定マツタ数デアルト。
 コノ数列ノ一般項ハ n ノ k 次式デ表サレル。又、初メノ n 項ノ
 和ハ、 n ノ $(k+1)$ 次式デ表サレル。コレヲノコトヲ證明セヨ。

三 次ノ各数ノ約数ノ個数ヲ求メヨ。

(一) $2^3 \cdot 3^5, 3^7 \cdot 5 \cdot 11^3$

(二) $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$

($p_1, p_2, \dots, p_n$ ハ素数, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ハ正ノ整数)

(三) 32, 405, 1000

四 或ル数ガ2ノ倍数デアルカドウカラ簡單ニ知ル方法ヲ考

へヨ、4ノ倍数ニ就イテハドウカ。

又、9ノ倍数ニ就イテハドウカ。

五 球ヲ平面デ切ツテ出来ル二ツノ部分ノ體積ヲ求メヨ。

シ、球ノ半径ヲ r 、球ノ中心カラ平面ニ至ル距離ヲ a トスル。

六 長徑ガ $2a$ 、短徑ガ $2b$ デアル楕圓ガ、長徑ノ周リニ一回轉シテ出来ル立體ノ體積ヲ求メヨ。

又、短徑ノ周リニ一回轉シテ出来ル立體ノ體積ヲ求メヨ。

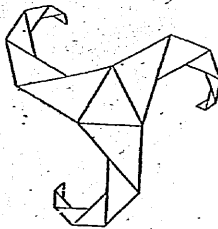
楕圓ガ長徑又ハ短徑ノ周リニ一回轉シテ出来ル立體ヲ 回轉楕圓體 トイフ。

七 次ノ各組ノ直線ト曲線トデ圍マレル部分ノ面積ヲ求メヨ。

$$(一) \begin{cases} y = -(x-2)(x-4) \\ y = 0 \end{cases} \quad (二) \begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

八 右ノ模様ノ三角形ヲ限リナク繼ギ足スト、ソノ面積ノ和ハドウヤウニ増シテ行クカ。

又、三角形ノ頂點ハドウヤウナ點ニ近ヅイテ行クカ。種々ノ方法デ調べテミヨ。



誤差ト近似式

一 近似値ト測定値

數表ニヨツテ得ラレル數値ハ、一般ニ近似値デアル。

近似値 a ト眞ノ値 A トノ差 $a-A$ ヲ 近似値 a ノ誤差 トイフ。誤差ガ正デア
ル近似値ヲ 過剰近似値 トイヒ、負デアルモノヲ 不足近似値 トイフ。

數表ニ掲ゲテアル近似値ハ、眞ノ値ヲ或ル位以下四捨五入シテ得ラレタモノデアル。例ヘバ、 $\sqrt{2}$ ハ數表ニハ1.414トアルガ、ソノ眞ノ値ハ1.4142……デアル。又、 $\sqrt{7}$ ハ數表ニハ2.646トアルガ、ソノ眞ノ値ハ2.6457……デアル。隨ツテ、數表ニアル數値ノ誤差ノ絶對値ハ末位ノ半單位ヲ超エナイ。

數表ニヨルト $\sqrt{10}$ ハ3.162トアルカラ、次ノ不等式ガ成リ立つ。

$$|\sqrt{10} - 3.162| < 0.0005$$

近似値ノ誤差ノ絶對値ガ超エナイ故ヲ、ソノ近似値ノ 誤差ノ限界 トイフ。

或ル數 A ヲ a トシタ時ノ誤差ノ限界ガ δ デアル場合ニ、 A ト a トノ關係ハ次ノ式デ示サレル。但シ、 ε ヲ近似値ノ誤差トスル。

$$A = a - \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \delta$$

或ハ、次ノ不等式デ示サレル。

$$a - \delta \leq A \leq a + \delta$$

上ニ述ベタ A ト a トノ關係ハ、正シクハ上ノ式ノヤウニ書キ表サナケレバナラナイノデアルガ、略シテ

$$A = a \pm \delta$$

ト書き表スコトモアル。例ヘバ $\pi = 3.14 \pm 0.002$ ハ、 π フ 3.14 トシタ時ノ誤差ノ限界ガ 0.002 デアルコトヲ表シタモノデアル。

問一 A ノ近似値ヲ a トシ、誤差ノ限界ヲ δ トスルト、 A ノドンナ範囲ニアルカ。次ノ各場合ニ就イテ、コレヲ不等式デ表キ表セ。

- (一) a ハ不足近似値デアル。
- (二) a ハ過剰近似値デアル。
- (三) a ハ不足近似値デアルカ、過剰近似値デアルカガワカラナイ。

量ヲ測ルノニ精密ナ器械。器具ヲ用ヒレバ、ソノ精シイ測定値ガ得ラレル。量ヲ表ス正確ナ値トソノ測定値トノ關係ハ、真ノ値トソノ近似値トノ關係ト同様デアルト考ヘラレル。陸ツテ、測定値ニ就イテモ、近似値ト同様ニ誤差及ビ誤差ノ限界ガ考ヘラレル。

問二 長サガ一米ニ近イモノヲ測ツタ場合ト一種ニ近イモノヲ測ツタ場合トデ、同ジク誤差ガ一耗ノ時、ドチラガ精密ナ測定デアルトイヘルカ。

問三 前問デワカツタヤウニ、測定値ノ精シサハ、誤差ノ太キサダケデ判斷スルコトガデキナイ。測定値ノ精シサヲ表ス方法ヲ考ヘヨ。

A ノ近似値ヲ a トシ、誤差ヲ ε トスル。 $\frac{a-A}{A}$ 或ハ $\frac{\varepsilon}{A}$ ノ絶対値ガ小サイニ近イ近似値 a ノ精密ノ度或ハ近似ノ度ハ大キイト考ヘラレル。コノ値ヲ 相對誤差ト

イヒ、コレヲ通例百分半デ表ス。誤差 $a-A$ フ、相對誤差ト區別スルタメニ 絕對誤差トイフコトガアル。

量 A ノ測定値ヲ a トシ、誤差ヲ ε トスル。 A 及ビ ε ハ數デ書き表スコトガデキナイカラ、量 A フ a トシタ時ノ相對誤差ハ求マルコトガデキナイ。シカシ、相對誤差ハ測定値ノ精密ノ度ヲ表スタメノモノデアルカラ、ソノ絕對値ノ限界ガ明ラカニナルコト十分デアル。

問四 π ハ 3.141592…… デアル。 π フ 3.14 トシタ場合ノ相對誤差ハ約何 % カ、3.142 トシタ場合ハドウカ。

問五 次ノ各測定値ノ精密ノ度ヲ言ヘ。

- (一) $1000 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$ (二) $10 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$
- (三) $1000 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$ (四) $10 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$

問六 x ノ絕對値ガ十分ニ小サイ時、 $\frac{1}{1+x}$ フ $1-x$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値ハ x フ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

x ノ絕對値ガ十分ニ小サイ時、 $\frac{1}{1+x}$ ノ代リニ $1-x$ フ用ヒテ計算シテモヨイ。メノヤウニ、或ル條件ノモトニ或ル式ニ近似シ等シイ式ヲ、元ノ式ノ 近似式トイフ。

問七 A ノ近似値ヲ a トシ、誤差ヲ ε トスルト、近似値 a ノ相對誤差ハ $\left| \frac{\varepsilon}{a} \right|$ フ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

一 $\sqrt{2}$ は 1.414 トシタ時ノ相對誤差ヲ求メヨ。又、 $\sqrt{20}$ は 4.472 トシタ時ハドウカ。

二 A ノ近似値ヲ a トシ、誤差ヲ ε トスルト、 $\frac{1}{A}$ は $\frac{1}{a}$ トシタ時ノ相對誤差ハ $\left| \frac{\varepsilon}{a} \right|$ ヲ超エナイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

三 A ノ絕對値ハ 1 ニ比ベテ十分ニ小サイトスル。A ノ近似値ヲ a 、誤差ノ限界ヲ δ トシ、 a' ハ δ ニ比ベテ十分ニ小サイトスルト、 $\frac{1}{1+A}$ は $1-a$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値及ビ相對誤差ハ共ニ δ ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

四 0° ノ水ヲ徐々ニ熱シテミルト、體積ガ漸次減ツテ來テ 4° グラキデー一番小サクナル。更ニ熱スルト、體積ガ漸次増シテ行ク。右ノ表ハ、ソノ關係ヲ實驗シタ結果カラ得タモノデアル。コノ表ヲ基ニシ、 4° ノ水ノ比

溫度	比體積	溫度	比體積
0	1.00013	7	1.00007
1	1.00007	8	1.00012
2	1.00003	9	1.00019
3	1.00001	10	1.00027
4	1.00000	11	1.00037
5	1.00001	12	1.00047
6	1.00003	13	1.00059

重ヲ 1.00000 トシテ、各溫度ニ於ケル水ノ比重ヲ求メヨ。三ニアル近似式ヲ用ヒテ計算セヨ。但シ、表ニアル測定値ノ誤差ノ限界ハ末位ノ半單位デアル。

二 誤差ト測定値ノ處理 (一)

四角ナ鐵板ノ縦・横・厚サヲ測ツタ。ソレゾレ次ノヤウデアッタ。

$$11.5 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm} \quad 11.3 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm} \quad 1.06 \text{ cm} \pm 0.005 \text{ cm}$$

コノ測定値ヲ基ニシテ鐵板ノ體積ヲ計算スル

$$11.5 \times 11.3 \times 1.06 = 137.7470 \quad (\text{cm}^3)$$

ナル。各測定値ニ誤差ガアルカラ、上デ求メタ數値ガソノマデ體積ヲ表スモノトスルコトハデキナイ。各稜ノ測定値ノ誤差ヲ、上ノ計算ノ結果ニ對シテドンナニ影響シテキルカヲ明ラカニシ。次ニ、體積ヲ表ス數値ヲキメテミョウ。

正ノ數 A, B ノ近似値ヲ a, b トシ、誤差ヲ $\Delta a, \Delta b$ トスル。

$$A = a - \Delta a, \quad B = b - \Delta b$$

$$AB = (a - \Delta a)(b - \Delta b) = ab \left(1 - \frac{\Delta a}{a} \right) \left(1 - \frac{\Delta b}{b} \right)$$

上ノ等式カラ、次ノ不等式ガ成リ立ツトイッテヨイ。

$$|AB - ab| \leq ab \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

問一 正ノ數 A, B, C ノ近似値ヲ a, b, c トシ、誤差ヲ $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ トスルト、ABC ヲ abc トシタ時ノ誤差ノ絕對値ハ

$$abc \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta c}{c} \right|$$

ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問一ノ結果カラ、先ノ鐵板ノ體積ヲ上デ計算シタ値トシタ時ノ相對誤差ハ、各稜ノ測定値ノ相對誤差ノ和ヲ超エナイトシテヨイ。随ツテ、體積ノ相對誤差ハ

$$\frac{5}{1150} + \frac{5}{1130} + \frac{5}{1160}$$

以內トミラレル。コレヲ

$$\frac{5}{1000} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{1000}$$

ト概算シテ、體積ノ相對誤差ハ $\frac{3}{200}$ 以内デアルトシテヨイコトガワカル、隨ツテ、體積ノ誤差ノ絕對値ハ

$$-137.747 \times \frac{3}{200} = -2.066205$$

以内デアルトミラレル。

問二 上ノ計算カラ、鐵板ノ體積ノ測定値 v トソノ誤差ノ限界 δ トシテ、次ノ六ツノ場合ガ考ヘラレル。コレヲ説明セヨ。

$$(一) v=137.747, \delta=2.066 \quad (二) v=137.75, \delta=2.069$$

$$(三) v=137.7, \delta=2.113 \quad (四) v=138, \delta=2.319$$

$$(五) v=140, \delta=4.319 \quad (六) v=100, \delta=39.813$$

問三 上ノ各場合ニ就イテ、體積ノ相對誤差ヲ計算セヨ。

問四 體積ノ相對誤差ガ小サイホド、ソノ精密ノ度ハ大キイシカシ、體積ヲ表ス數字ノ箇數ガ少イホド、ソノ取扱ヒハ簡單デアル。

體積ヲ表ス數値トシテ、上ニ掲ゲタ六ツノウチ、ドレヲ取ルノガ普通デアルカ、上ニ述ベタコトヲ基ニシテ考ヘヨ。

問五 誤差ノ限界ヲ示ス數字ノ箇數ガ少イホド、測定値ノ取扱ヒハ簡單デアル。隨ツテ、精密ノ度ヲ餘リ變ヘナイ程度デ、誤差ノ限界ヲ示ス數字ノ箇數ヲ少クスルノガ普通デアル。

前問デキメタ體積ノ測定値ニ對スル誤差ノ限界ハ、ドレヲ取ルキデアルトスルノガ普通デアルカ、上ニ述ベタコトヲ基ニシテ考ヘヨ。

近似値・測定値ノ近似ノ度・精密ノ度ヲ表スニ有效ノ數字ヲ 有效數字 トイフ、近似値ノ精密ノ度ハ、ソノ近似値ノモツ有效數字ノ箇數カラ

新サレ、ソノ數ノ多イホド精密デアル。

近似値 0.0007854 ヲ 7.854×10^{-4} ト書き表スト、有效數字ガ四ラカニ表サレ、又、大キサノ程度ガ 10 ノ指數ノ値デワカルノデ、種々ノ場合ニ便利デアル。

問六 次ノ各小數ヲ、ソノ末位デ四捨五入セヨ。コノヤウニシテ得ラレタ近似値ノ有效數字ハ何カ。又、ソノ近似値ヲ上ノヤウナ方法デ書き表セ。

$$(一) 0.0400395$$

$$(二) 499.7$$

問七 正ノ數 A, B ノ近似値ヲ a, b トシ、誤差ヲ $\Delta a, \Delta b$ トスルト、 $\frac{A}{B}$ ヲ $\frac{a}{b}$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値ハ

$$\frac{a}{b} \left\{ \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right\}$$

ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問八 三十二頁ニ述ベタ鐵板ノ重サヲ測ツタラ、 1.08×10^3 瓦デアツタ。コノ鐵ノ密度ヲ求メヨ。

問九 A, B ノ適當ナ近似値ヲ用ヒテ、 $A \times B$ 或ハ $A \div B$ ヲ算メル時、各ノ近似値トシテ有效數字ノ箇數ガ同ジモノヲ選ブヤウニスルノガヨイトイハレテキル、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問十 A, B ノ近似値ヲ a, b トシ、誤差ヲ $\Delta a, \Delta b$ トスルト、 $A+B$ ヲ $a+b$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値ハ $|\Delta a| + |\Delta b|$ ヲ超エナイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

$A-B$ ヲ $a-b$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値ニ就イテハドウカ。

問十一 A, B ノ適當ナ近似値ヲ用ヒテ, $A+B$ 或ハ $A-B$ フ求メル時, 各, ノ近似値トシテ末位ノ揃ツタモノヲ選ブトスルノガヨイトイハレデキル。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問十二 直徑 9.00 糧, 3.52 糧ノ二ツノ圓ガアル。コノ二ツノ圓ノ面積ノ和ヲ求メヨ。又, 差ヲ求メヨ。但シ, 直徑ノ測定ノ誤差ノ限界ハ末位ノ半單位デアル。

一 矩形ノ二邊ノ測定値ガ次ノヤウデアツタ。

$$57.3 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}, \quad 31.6 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

コノ矩形ノ周及ビ面積ヲ求メヨ。

二 鐵塊ノ體積ト重サトヲ測ツタラ, ソレゾレ次ノヤウデアツタ。コノ鐵ノ密度ヲ求メヨ。

$$67.6 \text{ cm}^3 \pm 0.05 \text{ cm}^3, \quad 531 \text{ g} \pm 0.5 \text{ g}$$

三 次ノ計算ノ結果ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$$(一) \quad 2.376426 + 9.753142 + 1.972395 + 0.028817$$

$$(二) \quad 3.65547 - 1.28076 \quad (三) \quad \pi - \frac{355}{113}$$

$$(四) \quad 1.3253 \times 3.82586 \quad (五) \quad 3.7668 \times 1.78665$$

$$(六) \quad 7.65433 \div 5.68791 \quad (七) \quad 180 \div \pi$$

四 次ノ式ノ近似式ヲ求メヨ。但シ, n ハ正ノ整數トシ, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ノ絕對値ハ十分ニ小サイモノトスル。

$$(一) \quad (1+\delta)^2 \quad (二) \quad (1+\delta)^3 \quad (三) \quad (1+\delta)^n$$

$$(四) \quad \frac{1}{(1+\delta)^2} \quad (五) \quad \frac{1}{(1+\delta)^3} \quad (六) \quad \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

$$(七) \quad \frac{1+\delta_1}{1+\delta_2}$$

$$(八) \quad \frac{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}{(1+\delta_3)(1+\delta_4)}$$

五 次ノ式ノ近似式ヲ求メヨ。但シ, m, n ハ正ノ整數トシ, ノ絕對値ハ十分ニ小サイモノトスル。

$$(一) \quad (1+\delta)^{\frac{1}{2}} \quad (二) \quad (1+\delta)^{\frac{1}{4}} \quad (三) \quad (1+\delta)^{\frac{n}{m}}$$

六 近似式ヲ用ヒテ, 次ノ値ヲ計算セヨ。又, 對數表ヲ用ヒ計算セヨ。

$$(一) \quad 1.02^2 \quad (二) \quad 0.97^2 \quad (三) \quad 1.02^{-2}$$

$$(四) \quad 0.97^{-2} \quad (五) \quad 1.015^{\frac{1}{2}} \quad (六) \quad 1.015^{-\frac{1}{2}}$$

七 正ノ數 A, B, C ノ近似値ヲ a, b, c トシ, 誤差ヲ $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ トスルト, $A^2 B^3 C^{-\frac{1}{2}}$ ヲ $a^2 b^3 c^{-\frac{1}{2}}$ トシタ時ノ誤差ノ絕對

$$a^2 b^3 c^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2 \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \frac{2}{3} \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta c}{c} \right| \right\}$$

ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

又, $A^2 B^3 C$ ヲ $a^2 b^3 c$ トシタ時ノ誤差ノ絕對値ハ, 下ノヤウナ式デ書キ表サレルカ。

八 或ル物質ノ線膨脹率ヲ α トスルト, ソノ體膨脹率ハ 3α 表スコトガデキル。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

九 4° ノ水一立方糧ノ重サヲ $0.99997 \text{ g} \pm 0.000005 \text{ g}$ トシ, 三十二頁ノ表ヲ基ニシテ, 0° カラ 13° マデノ水ノ密度ヲ計算セヨ。

十 四角ナ木片ガアル。コノ三稜ノ長サヲ測ツタラ, 31.2 糧, 20 糧, 35.7 糧デアツタ。又, 重サヲ測ツタラ, 14.5 瓦デアツ

タ。コノ木ノ密度ヲ計算セヨ。但シ, 上ノ各測定値ノ誤差ノ限

界ハ末位ノ半單位デアル。

十一 x ノ絶対値ガ十分ニ小サイ時、 $\sqrt{1+x}$ ノ近似式トシ
 $1+\frac{x}{2}$ ヲ用ヒタ場合ノ誤差ノ絶対値ハ $\frac{x^2}{8}$ ヲ超エナイトシテ
 イ。次ノ等式ヲ参考ニシテ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)-\sqrt{1+x}=\frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x}}$$

十二 x ノ絶対値ガ十分ニ小サイ時、 $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ノ近似式ヲ用ヒ
 トシタ場合ノ誤差ノ限界ヲ求メヨ。

三 誤差ノ分配

直徑約 22.5 糎ノ圓ガアル。コノ圓ノ面積ヲ測定シ、相對誤
 ガ 1% 以内デアルヤウニシヨウト思フ、直徑ヲドノ程度ニ精
 タ測レバヨイカ。又、圓周率トシテドンナ近似値ヲ用ヒレバ
 イカ。コレヲ調べヨウ。

圓ノ直徑ヲ d トスルト、面積 A ハ $\frac{1}{4}\pi d^2$ ヲ計算シテ求メ
 トガデキル。直徑ノ測定値及ビ圓周率ノ近似値ノ誤差ヲソ
 レ Δd , $\Delta\pi$ トスルト、面積ノ相對誤差ハ

$$2\left|\frac{\Delta d}{d}\right|+\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right|$$

ヲ超エナイトシテヨイ。

面積トシテ、相對誤差ガ 1% 以内デアルヤウナモノヲ求メ

$$2\left|\frac{\Delta d}{d}\right|+\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right|<\frac{1}{100}$$

ヤレバヨイ。

問一 圓周率ヲ 3.14 トスルト、ソノ相對誤差 $\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right|$ ハ $\frac{2}{3000}$ ヲ超エナ
 イ。隨ツテ

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right|<\frac{14}{3000}$$

$$|\Delta d|<\frac{14 \times 22}{3000}$$

$$|\Delta d|<0.1$$

アルヤウニ直徑ヲ測定スレバヨイ。

問一 圓周率ヲ 3.14 トシタ時、直徑ヲ測ルノニドンナ物指ヲ
 用ヒレバヨイカ。又、ソノ物指ヲドノ目盛マデ讀メバヨイカ。

問二 圓周率ヲ 3.142 トシタ時ハドウカ。又、3.1416 トシタ
 時ハドウカ。前問ト同様ノコトヲ考ヘヨ。

問三 圓周率ノ近似値トシテ、ドンナヤウナモノヲ用ヒルノガ
 適當デアルカ。問一、問二ノ結果ヲ基ニシテ考ヘヨ。

一 三稜ノ長サガ略、3 糎、4 糎、4 糎アル直方體ノ體積ヲ測
 定シ、相對誤差ガ 1% 以内デアルヤウニシヨウト思フ。稜ノ長
 サヲ測ルノニドンナ物指ヲ用ヒレバヨイカ。又、ソノ物指
 ヲドノ目盛マデ讀メバヨイカ。

二 體積ガ略、50 立方糎、重サガ略、50 瓦ノ牛乳ガアル。コ
 ノ牛乳ノ密度ヲ相對誤差ガ 1.5% 以内デアルヤウニ測ラウト思
 フ。體積及ビ重サヲ測ルノニ、ソレゾレドンナ目盛ノ計器ヲ用
 ズレバヨイカ。又、各計器ヲドノ目盛マデ讀メバヨイカ。

三 $\sqrt{2\pi}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ の近似値ヲ求メ、各ノ誤差ノ絶対値ガ0.001以内デアルヤウニセヨ。

四 三角函數ト誤差 (一)

鋭角 A ノ近似値ヲ X トシ、誤差ヲ ΔX トスル。但シ、 X ノ分マデ示シタ角デ、誤差ハ $1'$ フ超エナイモノトスル。

$$A = X - \Delta X$$

$$\sin A = \sin(X - \Delta X)$$

$$= \sin X \cos \Delta X - \cos X \sin \Delta X$$

$$\sin X - \sin A = \sin X(1 - \cos \Delta X) + \cos X \sin \Delta X$$

$\sin \Delta X, \cos \Delta X$ ノ大キサヲ評價シヨウ。

右ノ圖デ、扇形 AOB ノ半徑 OA ノ長サヲ 1 トシ、中心角ヲ θ 弧度 ($\theta > 0$) トスル。

又、 $AC \perp OA$ ニ垂直デアルトスル。

三角形 AOB , AOC 及ビ扇形 AOB ノ面積ノ大小關係ヲ式ニ書き表スト、次ノヤウデアル。

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

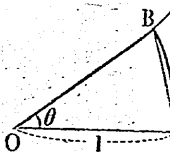
コレヲ變形スルト

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

トナル。

問一 上ノ關係式ヲ基ニシテ、 θ ノ絶対値ガ十分ニ小サイ時、 $\sin \theta$ ノ近似式トシテ θ フ用ヒテモヨイ理由ヲ明ラカニセヨ。

問二 θ ノ絶対値ガ十分ニ小サイ時、 $\cos \theta$ ノ近似式トシテ



$1 - \frac{1}{2}\theta^2$ フ用ヒテモヨイ理由ヲ明ラカニセヨ。

問三 $\sin \theta$ ノ近似式ヲ θ トシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ $\frac{\theta^3}{6}$ フ超エナイトシテヨイ。次ノ式ヲ參考ニシテ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

$$|\theta - \sin \theta| < |\tan \theta - \sin \theta|$$

$$= \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| (1 - \cos \theta)$$

問四 $\sin A$ ヲ $\sin X$ トシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ

$$3 \times 10^{-4} \cdot \cos X + 5 \times 10^{-8} \cdot \sin X$$

ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。先ヅ、 $1'$ フ誤差デ表スト、約 3×10^{-4} トナルコトヲ説明セヨ。

一 A ノ近似値ヲ a トシ、誤差ヲ Δa トスル。 $\sqrt{A}$ ヲ $\sqrt{a}$ トシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ $\frac{|\Delta a|}{2\sqrt{a}}$ フ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

二 鋭角 A ノ近似値ヲ X トシ、誤差ノ限界ヲ $1'$ トスル。 $\cos A$ ヲ $\cos X$ トシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ

$$3 \times 10^{-4} \cdot \sin X + 5 \times 10^{-8} \cdot \cos X$$

ヲ超エナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

三 地球カラ月マデノ距離ハ 3.8×10^5 浬デ、地球上デ月ノ直径ヲ見込ム角ハ $31'$ デアル。月ノ直径ヲ求メヨ。

太陽ノ直径ヲ 1.4×10^6 浬トシ、地球カラ太陽マデノ距離ヲ 1.5×10^8 浬トスレバ、地球上デ太陽ノ直径ヲ見込ム角ハ何程カ。

五 三角函數ト誤差 (二)

鋭角 X ノ正弦ノ値ヲ比例部分ノ理ニヨツテ求メルト、誤差ハ
フレクラキアルカヲ調べヨウ。

X ヨリ小サク、且ツ、コレニ最モ近い數表ニアル角ヲ X' ト
シ、 $X - X'$ ヲ $\Delta X'$ トスル。

$$X = X' + \Delta X', \quad 0' < \Delta X' < 6'$$

$\Delta X'$ ヲ分ヲ單位ニシテ表シタ數値ヲ x トスレバ

$$0 < x < 6$$

デアアル。

表ニ掲ゲテアル $\sin(X' + 6')$ 、 $\sin X'$ ノ値ヲソレゾレ α_1 、 α_2 ト
シ、ソレヲノ値ノ誤差ヲソレゾレ δ_1 、 δ_2 トスレバ

$$\alpha_1 = \sin(X' + 6') - \delta_1, \quad |\delta_1| < 0.5 \times 10^{-4}$$

$$\alpha_2 = \sin X' - \delta_2, \quad |\delta_2| < 0.5 \times 10^{-4}$$

トナル。

$\sin(X' + \Delta X')$ ヲ比例部分ノ理ニヨツテ求メタモノヲ α トス
レバ

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{x}{6}(\alpha_1 - \alpha_2) - \delta_3, \quad |\delta_3| < 0.5 \times 10^{-4}$$

トナル。コレヲ變形シテ

$$\alpha = \frac{x}{6}\alpha_1 + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\alpha_2 - \delta_3$$

$$= \frac{x}{6}\{\sin(X' + 6') - \delta_1\} + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\{\sin X' - \delta_2\} - \delta_3$$

$$= -\left\{\frac{x}{6}\delta_1 + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\delta_2 + \delta_3\right\} + \frac{x}{6}\sin(X' + 6') + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\sin X'$$

$$\alpha - \sin(X' + \Delta X')$$

$$= -\left\{\frac{x}{6}\delta_1 + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\delta_2 + \delta_3\right\}$$

$$+ \left\{\frac{x}{6}\sin(X' + 6') + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\sin X' - \sin(X' + \Delta X')\right\}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{x}{6}\delta_1 + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\delta_2 + \delta_3$$

$$\varepsilon_2 = \frac{x}{6}\sin(X' + 6') + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\sin X' - \sin(X' + \Delta X')$$

ε_1 ハ四捨五入ニヨツテ生ジタ誤差デアアル。

問一 $|\varepsilon_1| < 10^{-4}$ デアルコトヲ證明セヨ。

ε_2 ハ正弦曲線ノ彎曲ノ度ニヨツテ生ジタ

誤差デアアル。

$6'$ ヲ弧度デ表シタ數値ヲ ε トスルト、

$\Delta X'$ ヲ弧度デ表シタ數値ハ $\frac{\varepsilon x}{6}$ トナル。

問二 次ノ二ツノ式

$$\sin(X' + \Delta X'), \quad \frac{x}{6}\sin(X' + 6') + \left(1 - \frac{x}{6}\right)\sin X'$$

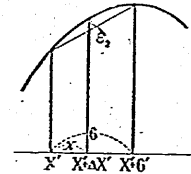
ヲ $\sin X' + \frac{\varepsilon x}{6}\cos X'$ トシタ時ノ誤差ノ絶對値ハ、共ニ $\frac{\varepsilon^2}{2}$ ヲ超

スナイトシテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問三 前問ノ結果ヲ用ヒテ、次ノ不等式ヲ説明セヨ。

$$|\varepsilon_2| < 0.04 \times 10^{-4}$$

問四 $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < 10^{-4}$ トシテヨイ理由ヲ明ラカニセヨ。



問五 鋭角 A の測定値 X トシ、誤差ノ限界ヲ $1'$ トスル、 $\sin A$ ヲ $\sin X$ トシテ數表デ求メタ時ノ誤差ノ絶對値ハ

$$(3 \cos X + 1) \times 10^{-4}$$

ヲ超エナイトシテヨイ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

一 鋭角ノ餘弦ノ値ヲ比例部分ノ理ニヨツテ求メタ時ノ誤差ハ 10^{-4} ヲ超エナイトシテヨイ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

二 1 ヨリ大キク 10 ヨリ小サイ數 a ノ平方根ヲ數表デ求メタ時、誤差ハ 10^{-3} ヲ超エナイトシテヨイ、次ニ示シタ順序ヲコノ理由ヲ明ラカニセヨ。

(一) a ノ小數第三位以下ヲ切り捨てテ得ラレル近似値ヲ a' トシ、 $a - a'$ ヲ Δa トスル。

$$a = a' + \Delta a, \quad 0 \leq \Delta a < 0.01$$

又、 a' 及ビ $a' + 0.01$ ノ平方根トシテ數表ニ掲ゲテアル數値ヲ α_1, α_2 トシ、 a ノ平方根トシテ比例部分ノ理ニヨツテ求メタモノヲ α トスレバ、次ノ關係式ガ成リ立ツ。コレヲ證明セヨ。

$$\sqrt{a'} = \alpha_1 - \delta_1, \quad |\delta_1| < 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{a' + 0.01} = \alpha_2 - \delta_2, \quad |\delta_2| < 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\Delta a}{0.01} (\alpha_2 - \alpha_1) - \delta_3, \quad |\delta_3| < 0.5 \times 10^{-3}$$

(二) 次ノ等式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ。

$$a - \sqrt{a' + \Delta a} = - \left\{ \left(1 - \frac{\Delta a}{0.01} \right) \delta_1 + \frac{\Delta a}{0.01} \delta_2 + \delta_3 \right\}$$

$$+ \left\{ \left(1 - \frac{\Delta a}{0.01} \right) \sqrt{a'} + \frac{\Delta a}{0.01} \sqrt{a' + 0.01} - \sqrt{a' + \Delta a} \right\}$$

(三) $\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{\Delta a}{0.01} \right) \delta_1 + \frac{\Delta a}{0.01} \delta_2 + \delta_3$ トオケバ、 $|\varepsilon_1| < 10^{-3}$ デアル、コレヲ證明セヨ。

(四) 次ノ關係式ガ成リ立ツトシテヨイ、ソノ理由ヲ明ラカニセヨ。

$$\sqrt{a' + 0.01} = \sqrt{a'} \left(1 + \frac{0.01}{2a'} \right) - \delta_4, \quad |\delta_4| < 0.0125 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{a' + \Delta a} = \sqrt{a'} \left(1 + \frac{\Delta a}{2a'} \right) - \delta_5, \quad |\delta_5| < 0.0125 \times 10^{-3}$$

$$(五) \varepsilon_2 = \left(1 - \frac{\Delta a}{0.01} \right) \sqrt{a'} + \frac{\Delta a}{0.01} \sqrt{a' + 0.01} - \sqrt{a' + \Delta a}$$

トオケバ、 $|\varepsilon_2| < 0.1 \times 10^{-3}$ トシテヨイ、コレヲ説明セヨ。

(六) a ノ平方根ヲ數表デ求メタ時、誤差ハ 10^{-3} ヲ超エナイトシテヨイ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

三 10 ヨリ大キク 100 ヨリ小サイ數 a ノ平方根ヲ數表デ求メタ時、誤差ハ 10^{-3} ヲ超エナイトシテヨイ、コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

四 (一) 100 ヨリ大キク 1000 ヨリ小サイ數ノ平方根ヲ數表デ求メタ時ノ、誤差ノ限界ヲ求メヨ。

(二) 1000 ヨリ大キク 10000 ヨリ小サイ數ノ平方根ヲ數表デ求メタ時ノ、誤差ノ限界ヲ求メヨ。

(三) 0.1 ヨリ大キク 1 ヨリ小サイ數ノ平方根ヲ數表デ求メタ時ノ、誤差ノ限界ヲ求メヨ。

又、0.01 ヨリ大キク 0.1 ヨリ小サイ數ノ平方根ヲ數表デ求メ

タ時ハドウカ。

(四) 10^{2n} ト 10^{2n+1} トノ間ニアル數ノ平方根ヲ數表デ求メタ
時ノ、誤差ノ限界ヲ求メヨ、

又、 10^{2n+1} ト 10^{2n+2} トノ間ニアル數ノ平方根ヲ數表デ求メタ
時ハドウカ。

六 誤差ト測定値ノ處理 (二)

三角形ノ二邊トソノハサム角ヲ測ツタラ、次ノヤウデアツタ

$$b=872\text{ m}\pm 1\text{ m}, \quad c=1035\text{ m}\pm 1\text{ m}, \quad A=65^\circ 15' \pm 1'$$

コノ三角形ノ面積ヲ求メヨウ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 872 \times 1035 \times \sin 65^\circ 15' \\ = \frac{1}{2} \times 872 \times 1035 \times 0.9032 = 409834.3320 \end{aligned}$$

角 A ノ正弦ノ値ヲ 0.9032 トシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ、
 $(3 \cos 65^\circ 15' + 1) \times 10^{-4}$ ヲ超エナイトシテヨイ。随ツテ、
 2.5×10^{-4} ヲ超エナイトミラレル。

問一 コノ三角形ノ面積ヲ上ノ計算デ求メタモノトシタ時ノ
相對誤差ハ

$$\frac{1}{872} + \frac{1}{1035} + \frac{2.5}{9032}$$

ヲ超エナイトシテヨイ。随ツテ、 2.5×10^{-3} ヲ超エナイトミテヨ
イ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問二 コノ三角形ノ面積ハ 4.100×10^5 平方米トシテヨイ理由
ヲ明ラカニセヨ。又、ソノ誤差ハ 1200 平方米ヲ超エナイトミ

テヨイ理由ヲ明ラカニセヨ。

直四錐ノ底面ノ直徑及ビ母線ノ測定値ガソレゾレ次ノヤウデ
ツタ。

$$30.80\text{ cm} \pm 0.005\text{ cm}, \quad 47.55\text{ cm} \pm 0.005\text{ cm}$$

コノ直四錐ノ體積ヲ計算シヨウ。

コノ直四錐ノ底面ノ半径、母線ノ長さ及ビ高サヲソレゾレ r 、
 h トスル。底面ノ半径ヲ 15.40 種トシタ時ノ誤差ヲ Δr 、圓周
率ヲ 3.142 トシタ時ノ誤差ヲ $\Delta \pi$ トシ、高サ h ヲ r 、 l ノ測定値
ヲ計算シテ得ラレタモノトシタ時ノ誤差ヲ Δh トスル。

體積ヲ測定値カラ計算シタモノトシタ時ノ誤差ノ絶対値ハ

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h \left\{ \frac{|\Delta \pi|}{\pi} + 2 \frac{|\Delta r|}{r} + \frac{|\Delta h|}{h} \right\}$$

ヲ超エナイトシテヨイ。明ラカニ

$$|\Delta \pi| < 0.0005, \quad |\Delta r| < 0.0025$$

ナル。 h 及ビ Δh ノ大キサヲ求メヨウ。

$$l = 47.55 \pm 0.005, \quad 47.55^2 = 2261.0025$$

$$2261.0025 \times \frac{5}{47550} \times 2 < 2261 \times \frac{10}{40000} < 0.6$$

$$\text{故ニ} \quad F = 2261 \pm 0.6$$

ナル。又

$$r = 15.40 \pm 0.0025, \quad 15.4^2 = 237.16$$

$$237.16 \times \frac{25}{154000} \times 2 < 237.16 \times \frac{5}{15400} < 0.1$$

$$\text{故ニ} \quad r^2 = 237 \pm 0.3$$

トナル。随ツテ

$$P-r^2=2024\pm0.9$$

$P-r^2$ ヲ 2024 トシテ h ヲ求メルタメニ生ズル誤差ハ

$$\frac{0.9}{2\sqrt{P-r^2}} < \frac{0.9}{2\times 45} = 0.01$$

ヲ超エナイトシテヨイ。又、 $\sqrt{P-r^2}$ ヲ数表ニヨツテ求メル
メニ生ズル誤差ハ 10^{-3} ヲ超エナイトシテヨイ。

$$\text{故ニ} \quad h=44.98\pm0.02$$

トナル。

問三 $\frac{|d\pi|}{\pi} + 2\frac{|dr|}{r} + \frac{|dh|}{h} \approx 0.001$ ヲ超エナイトシテ
イ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

問四 コノ直円錐ノ體積ヲ求メヨ。

一 三角形 ABC ノ二邊及ビソノハサム角ヲ測ツタラ、次
ヤウデアツタ。コノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$a=134.5\text{ m}\pm0.1\text{ m}, \quad b=228.3\text{ m}\pm0.1\text{ m}, \quad C=57^\circ36'\pm1'$$

二 三角形 ABC ノ二角及ビ一邊ノ長サヲ測ツタラ、次ノ
ウデアツタ。コノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$a=324.8\text{ m}\pm0.1\text{ m}, \quad B=59^\circ10'\pm1', \quad C=82^\circ31'\pm1'$$

三 三角形ノ土地ガアツテ、ソノ三邊ノ測定値ハ次ノヤウ
アツタ。コノ土地ノ面積ヲ求メヨ。

$$a=127.5\text{ m}\pm0.3\text{ m}, \quad b=147.3\text{ m}\pm0.3\text{ m}$$

$$c=150.0\text{ m}\pm0.3\text{ m}$$

七 種々ノ問題

一 氣體ノ體積ト壓力トノ關係ヲ調ベル實驗デ、一氣壓ノ時
體積ガ約一立方アル空氣ヲ用ヒ、壓力ヲ一氣壓カラ三分ノ二氣
壓ニ變ヘルコトニシタ。

壓力ヲ水銀柱デ托ノ位マデ讀ムコトニスルト、空氣ノ體積ヲ
レクラキ精シク測ラナケレバナライカ。

二 高所カラノ視界半徑ハ、ソノ場所ノ海面カラノ高サノ平
根ニ比例スル。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

三 θ ガ十分ニ小サイ時、 $\tan \theta$ ヲ θ トシテヨイ理由ヲ明ラ
カニセヨ。

又、 $\tan \theta$ ヲ $\theta + \frac{1}{2}\theta^3$ トシテモヨイ理由ヲ明ラカニセヨ。

四 銳角 A ノ近似値ヲ X トシ、ソノ誤差ヲ ΔX トスル。

五 A ヲ $\tan X$ トシタ時ノ誤差ノ絶對値ハ $\frac{|\Delta X|}{\cos^2 \theta}$ ヲ超エナイ
シテヨイ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

五 山ノ高サヲ知ルニハ、ソノ頂マデノ水平距離ト頂ノ仰角
ヲ測レバヨイ。水平距離 A ノ測定値ヲ a 、ソノ誤差ヲ Δa ト
シ、仰角 θ ノ測定値ヲ θ 、ソノ誤差ヲ $\Delta \theta$ トスル。山ノ高サヲ
 $\tan \theta$ トシタ時ノ相對誤差ノ限界ハ $\left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{2\Delta \theta}{\sin 2\theta} \right|$ トシテ
イ。コノ理由ヲ明ラカニセヨ。

六 前問デ、仰角ハ約 45° デアルトスル。水平距離ヲ約千分
一ノ精シサデ測ツタラ、仰角ヲドノ程度ニ精シク測ルノガ適
デアルカ。

