K220.43

80

追検圖九五新二六 十五 中

# 中等立體幾何學教科書

東京帝國大學教授
理學博士
竹內端三著

株式會社
三省堂發兌

教文圖書
K220.43
80

數文
898

# 中等立體幾何學教科書

東京帝國大學教授
理學博士
竹内端三著

文部省圖書
新 8940
共1冊

株式會社
三省堂發兌

1951. 文部省寄贈

## 緒言

本書ハ中等教育ニ於ケル立體幾何學ノ教科用ニ供センガタメニ編述セルモノニシテ,著者ガ特ニ意ヲ用ヒタル二三ノ要點ヲ摘記スレバ次ノ如シ。

(一) 文部省現行教授要目ニ準據シ,且最近數學界ノ趨勢ニ注意シタリ。

(二) 必要ナル教材ノ他ハ成ルベク之ヲ省キ,生徒ノ負擔ヲ輕カラシメンコトニ努メタリ。

(三) 教授時數ニ餘裕ヲ生ゼシメ,以テ數學全體ノ練習應用ヲナスノ便ヲ計レリ。

(四) 本文ノ間ニ挿入スル問題ノ數ヲ成ルベク少クシ其代リニ雜題ノ附錄ヲ添ヘ,教師ガ適當ノ時間ニ任意ノ問題ヲ課スルノ便ヲ計レリ。

(五) 平面幾何學トノ連絡ニ注意シタリ。

(六) 定理ノ證明ハ成ルベク簡明ナルモノ

ヲ選ビタリ。

終ニ臨ミ著者ハ本書ヲシテ更ニ將來改良スル所アラシムベク實地教授ノ任ニ當ラルル諸賢ノ高批ヲ切望ス。

大正十一年七月

著 者 識

# 目 次

# 中等立體幾何學教科書

## 第一編

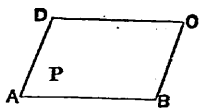
## 直線及ビ平面

### 第一章 緒論

#### 1. 定義

**立體幾何學**トハ重ニ同一ノ平面上ニ在ラザル圖形ノ形,大サ及ビ位置ニ關シテ論理的ニ研究スル學科ナリ。

一ツノ面上ニ任意ノ二點ヲ取リテ之ヲ過ル直線ヲ作ルトキ,其直線ガ常ニ全ク其面上ニ在ルトキハ其面ヲ**平面**トイフ。



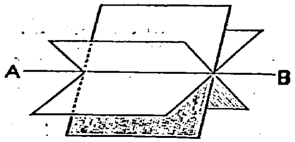

平面ハ無限ノ廣サヲ有スルモノトス。之ヲ表ハスニハ其面上ニアル適當ナル圖形ヲ以テス。若シ適當ナル圖形ナキトキハ其上ニ畫キタル平行四邊形ヲ用フ,例ヘバ上圖ニ於ケル平面 P (或ハ平面 ABCD) ノ如シ。

一點又ハ一直線ガ一平面上ニアルトキハ,此平面ハ其點又ハ其直線ヲ含ムト或ハ過ルト云フ。

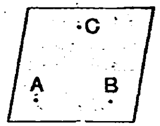
一直線ト一平面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ其直線ト其平面トハ相交ハルト云フ。

## 2. 平面ノ基本性質

**公理一。** 一直線ヲ含ム平面ノ數ハ限リナシ。




**公理二。** 一直線上ニアラザル任意ノ三點ヲ過ル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。




換言スレバ,

一直線上ニアラザル三點ハ唯一ツノ平面ヲ決定ス。

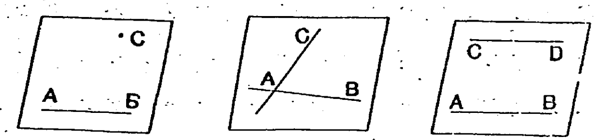
**定理一。** 平面ハ次ノ各ノ場合ニ於テ唯一ツ決定セラル。

(I)　一直線ト其上ニ在ラザル一點トヲ含ムトキ。

(II)　相交ル二直線ヲ含ムトキ。

(III)　平行ナル二直線ヲ含ムトキ。






**證明**　公理二ニ依リテ證明スルコトヲ得。

## 3. 二直線ノ位置

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ何レカノ場合ニ限ル。

(1)　相交ル。
(2)　互ニ平行ナリ。 } 即チ同一平面上ニ在リ。
(3)　全ク相一致ス。

(4)　相交ラズ,且互ニ平行ナラズ,又全ク相一致セズ。即チ同一平面上ニ在ラズ。

## 4. 二平面ノ位置

**定義。** 二ツノ平面ガ少クモ一點ヲ共有スルトキハ,其二平面ハ出會フトイフ。(二平面ガ相一致スル場合ヲモ含ム。)

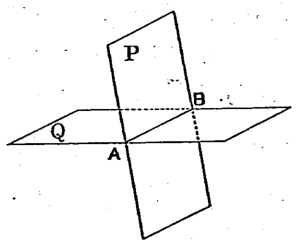
モシ二平面ヲ何レノ方向ニ何程延長スルモ出會ハザルトキハ,其二平面ハ互ニ平行ナリトイフ。

**公理三。** 二ツノ平面ガ出會フトキハ唯一點ノミヲ共有スルコト能ハズ。

換言スレバ,二ツノ平面ガ出會フトキハ少クモ二點ヲ共有セザル可ラザルナリ。從ツテマタ唯二點ノミヲ共有スルニ止マラズ,一般ニハ一ツノ直線ヲ共有スルコトトナル,依ツテ次ノ定理アリ。

**定理二。** 二ツノ平面ガ出會フトキハ,全ク相一致スル場合ヲ除クノ他ハ,此等ノ二平面ハ一直線ヲ共有シ,其直線以外ノ點ヲ共有セズ。

(特述) P,Q ハ二ツノ出會フ平面ニシテ,全ク相一致セザルモノトス。然ルトキハ P トQ トハタヾ一直線ヲノミ共有スルコトヲ證明セントス。




(證明) A,B ヲ兩平面ニ共通ナル二ツノ點トセヨ(公理三)。

二點 A,B ハ平面 P 上ニアルヲ以テ,直線 AB ヲ引ケバ平面 P ハ之ヲ含ム。

同樣ニ平面 Q モ亦直線 AB ヲ含ム。

故ニ兩平面 P, Q ハ一直線 AB ヲ共有ス。

若シ兩平面 P, Q ガ直線 AB 外ノ一點ヲモ共有スルモノトスレバ,此兩平面ハ全ク相一致セザルベカ



ラズ(定理一)。之レ假設ニ反ス。

故ニ兩平面ハ一直線ヲ共有シ,其直線以外ノ點ヲ共有セズ。

**定義。** 二ツノ平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハ其二平面ハ相交ルト云ヒ,其直線ヲ二平面ノ交リ又ハ交線ト云フ。

二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ何レカノ場合ニ限ル。

(1) 相交ル。
(2) 全ク相一致ス。 } 卽チ出會フ。
(3) 互ニ平行ナリ。

## 例題

(1) 三角形ノ三邊ハ皆同一平面上ニ在リ。

(2) 梯形ノ四邊ハ皆同一平面上ニ在リ。

(3) 同一平面上ニ在ラザル三直線ガ同一點ヲ過ルトキ,此等ノ中ノ直線ニテ決定セラルル平面ノ數ハ何程アルカ。

(4) 同一平面上ニ在ラザル四ツノ點アリ,此等ノ中ノ點ニテ決定セラルル平面ノ數ハ何程アルカ。

(5) 同一平面上ニ在ラザル二直線ノ兩方ニ交ル二ツノ直線ハ互ニ平行ナルコトナシ。

(6) 二直線ガ平行ナラバ,其一ツノ直線ト交ル平面ハ他ノ一直線トモ交ル。

## 第二章　平行ナル平面及ビ直線

### 5. 直線ト平面トノ位置

**定義**。一直線ト一平面トガ之ヲ何レノ方向ニ何程延長スルモ出會ハザルトキハ互ニ**平行ナリ**ト云フ。

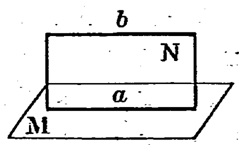
一直線ト一平面トノ位置ノ關係ハ次ノ何レカノ場合ニ限ル。

(1) 相交ル。
(2) 直線ガ平面ニ含マル。｝即チ出會フ。
(3) 互ニ平行ナリ。

### 6. 平行直線ニ關スル定理

**定理三**。二ツノ直線ガ平行ナルトキハ,其一直線ヲ含ミ他ノ一直線ヲ含マザル平面ハ後ノ一直線ニ平行ナリ。

(特述) 二ツノ平行ナル直線ヲ $a, b$ トシ,$a$ ヲ含ミ $b$ ヲ含マザル一ツノ平面ヲ M トスレバ,M ハ $b$ ニ平行ナルコトヲ證明セントス。




(證明) $a, b$ ハ平行ナルヲ



以テ一ツノ平面ヲ定ム。之ヲ N トスレバ,$a$ ハ即チ二平面 M ト N トノ交リナリ。

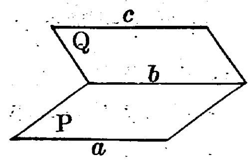
故ニ $b$ ハ平面 M ト出會フコトアリトスルモ,$a$ 上ニ在ラザル點ニテ出會フコト能ハズ。

然ルニ $b$ ト $a$ トハ平行ナルヲ以テ出會フコトナシ。

故ニ $b$ ト M トハ出會ハズ,即チ互ニ平行ナリ。

**系 1.** 二直線ガ平行ナルトキハ夫々其ノ一ツヲ含ム二ツノ平面ノ交リハ其等ノ二直線ニ平行ナリ。

**系 2.** 同一直線 $a$ ニ平行ナル二直線 $b, c$ ハ互ニ平行ナリ。




(證明) $a$ ト $b$ トニヨリテ決定セラルル平面ヲ P トシ,又 $b$ 上ノ一點ト $c$ トニヨリテ決定セラルル平面ヲ Q トセヨ。

然ルトキハ P ト Q トノ交リハ $a$ ニ平行ナリ。故ニ其交リハ P 上ニ在リテ,$b$ 上ノ一點ヲ過リ $a$ ニ平行ナル直線ナリ,即チ直線 $b$ ニ他ナラズ。

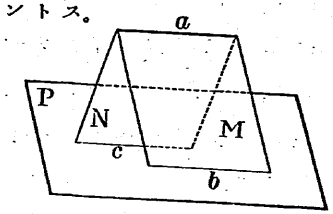
而シテ $c$ ハ其交リト平行ナラザルベカラズ。

故ニ $b$ ト $c$ トハ平行ナリ。

**定理四**。一平面ガ一直線ニ平行ナルトキ

ハ,其一直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ前ノ一直線ニ平行ナリ,而シテ其等ノ交リハマタ互ニ平行ナリ。

**(特述)** $a$ヲ平面Pニ平行ナル一直線トシ,$a$ヲ含ム平面M及ビNト平面Pトノ交リヲ夫々$b, c$トスレバ,$b, c$ハ何レモ$a$ニ平行ニシテ,且マタ$b, c$ハ互ニ平行ナルコトヲ證明セントス。




**(證明)** $a$トPトハ平行ナルヲ以テ出會ハズ。

故ニ$a$ハP上ノ直線$b$ト出會フコトナシ。

而シテ$a$ト$b$トハ同一平面Mノ上ニ在リ。

故ニ$a$ト$b$トハ平行ナリ。

同樣ニ$a$ト$c$トモ亦平行ナリ。

次ニ若シ$b$ト$c$トガ平行ナラザルトキハ,其交點ト$a$トヲ含ム平面ガ二ツアルコトトナリテ定理一ニ反ス。

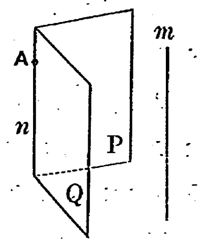
故ニ$b$ト$c$トハ平行ナリ。

**系1.** 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交リハ其直線ニ平行ナリ。

**(特述)** 同一ノ直線 $m$ ニ平行ナル二平面P, Qノ



交リヲ$n$トスレバ,$n$ト$m$トハ互ニ平行ナルコトヲ證明セントス。




**(證明)** 交線 $n$ 上ノ任意ノ一點Aト$m$トヲ含ム平面ヲRトスレバ,RハPト$m$ニ平行ナル直線ニ於テ交ル。

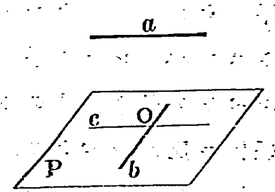
同樣ニRトQトモ$m$ニ平行ナル直線ニ於テ交ル。

然ルニ一點Aヲ過リテ$m$ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

故ニPトRトノ交リモQトRトノ交リモ同一直線ニシテ,ツマリPトQトノ交リ$n$ニ他ナラズ。故ニ$n$ト$m$トハ互ニ平行ナリ。

**系2.** 同一平面上ニ在ラザル二直線ノ一ツヲ含ミテ他ノ一ツニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

**(特述)** $a, b$ヲ同一平面上ニ在ラザル二直線トスレバ,$b$ヲ含ミテ$a$ニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルベシ。

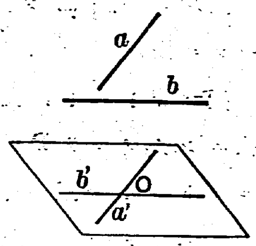



**(證明)** $b$上ノ一點O及ビ$a$ノ定ムル平面上ニ於テ,O

ヲ過リ$a$ニ平行ナル直線$c$ヲ引ケバ,二直線$b, c$ノ定ムル平面Pハ$b$ヲ含ミ$a$ニ平行ナリ。

Pノ他ニハ$b$ヲ含ミ$a$ニ平行ナル平面ナシ。何トナレバ若シアリトセバ,其平面トPトノ交リナル$b$ハ$a$ト平行ナラザル可ラズ,コレ假設ニ反ス。

**系3.** 一定點ヲ過リ,同一平面上ニアラザル二直線ニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。




**(特述)** $a, b$ヲ同一平面上ニアラザル二直線トシ,Oヲ一定點トスレバ,Oヲ過リテ$a, b$ニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルベシ。

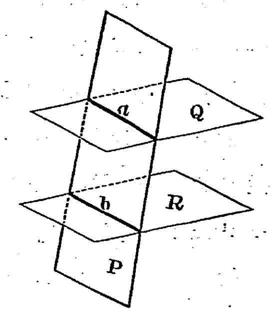
**(證明)** Oヲ過リテ夫々$a$, $b$ニ平行ナル直線$a', b'$ヲ引クトキハ,$a', b'$ノ定ムル平面ハ$a$及ビ$b$ニ平行ナリ。

而シテ此平面ノ他ニOヲ過リテ$a, b$ニ平行ナル平面ナシ。何トナレバ若シ他ニモカカル平面アリトスレバ,ソレラノ平面ノ交線ハ$a$及ビ$b$ニ平行ナルベキヲ以テ,結局$a$ト$b$トハ平行ナルコトトナリ假設ニ反スレバナリ。

## 7. 平行平面ニ關スル定理



**定理五、** 二ツノ平行ナル平面ト一ツノ平面トノ交リハ互ニ平行ナリ。



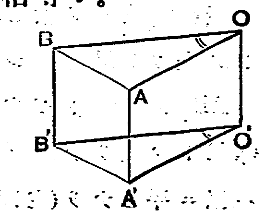

**(特述)** 一平面Pガ二ツノ平行ナル平面Q, Rト夫夫直線$a, b$ニ於テ交ルトセヨ。然ルトキハ$a, b$ハ互ニ平行ナルコトヲ證明セントス。

**(證明)** QトRトハ平行ナルヲ以テ出會ハズ。故ニ$a$ト$b$トハ出會ハズ。

而シテ$a$ト$b$トハ同一ノ平面Pノ上ニ在リ。

故ニ$a$ト$b$トハ互ニ平行ナリ。

**定理六。** 二ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行ニシテ,且其相對應スル邊ガ二角ノ頂點ヲ過ル直線ニ關シテ同ジ側ニ在ルトキハ,其二ツノ角ハ相等シ。




**(特述)** $\angle AOB$ト$\angle A'O'B'$トニ於テ,OAハO′A′ニ平行,OBハO′B′ニ平行ニシテ,且夫夫OO′ニ關シテ同ジ側ニ在ル

ベキハ,

$\angle AOB=\angle A'O'B'$ ナルコトヲ證明セントス。

(證明) $OA=O'A'$, $OB=O'B'$ ナラシムレバ,
$OAA'O'$ 及ビ $OBB'O'$ ハ何レモ平行四邊形ナリ。

故ニ $OO'=AA'=BB'$ ニシテ,且互ニ平行ナリ。

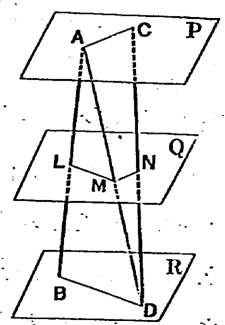
故ニ $ABB'A'$ ハ平行四邊形ニシテ, $AB=A'B'$.

從ッテ $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ。

故ニ $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

**定理七。** 二直線ガ三ツノ平行ナル平面ト交ルトキハ,其直線ノ平面ニヨリテ分タレタル對應部分ハ比例ヲナス。

(特述) 二直線 $AB$, $CD$ ガ三ツノ平行ナル平面 $P$, $Q$, $R$ ト交ル點ヲ夫々 $A, L, B$ 及 $C, N, D$ トスレバ, $AL:LB=CN:ND$ ナルコトヲ證明セントス。




(證明) $AD$ ヲ結ビ,之ト平面 $Q$ トノ交リヲ $M$ トスレバ,

$AB$ ト $AD$ トガ定ムル平面ト $Q$, $R$ トノ交リナル $LM$ ト $BD$ トハ互ニ平行ナリ(定理五)。



同樣ニ $MN$ ト $AC$ トモ互ニ平行ナリ。

故ニ $AL:LB=AM:MD$,

$AM:MD=CN:ND$.

從ッテ $AL:LB=CN:ND$.

## 例題

1. 四邊形ノ四邊ガ必シモ悉ク同一平面上ニアラザル場合ニテモ,其各邊ノ中點ヲ結ブ四ツノ線分ハ一ツノ平行四邊形ヲナス。

2. 二ツノ平行直線ノ一ツガ一平面ト交ルトキハ,他ノ一ツモ亦此平面ト交ル。

3. 與ヘラレタル一點ヲ過リ,同一平面上ニアラザル二ツノ定直線ト出會フ直線ノ位置ヲ求ム。

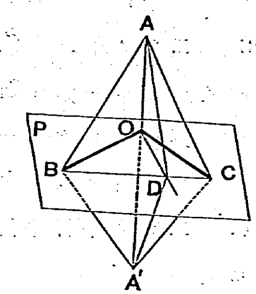
4. 二ツノ平行平面ノ一ツニ交ル一直線ハ亦他ニモ交ル

## 第三章 垂直ナル平面及ビ直線

### 8. 一平面ノ垂線

**定理八。** 相交ル二直線ノ交點ヲ過リ且其各ニ垂直ナル直線ハ,其二直線ヲ含ム平面上ニテ其交點ヲ過ル任意ノ直線ニ垂直ナリ。

(特述) 二直線OB, OCノ交點Oヲ過リテ此二直線ニ夫夫垂直ナル直線ヲOAトシ, OB, OCヲ含ム平面P上ニテOヲ過ル任意ノ直線ヲODトスレバ, OAトODトハ互ニ垂直ナルコトヲ證明セントス。




(證明) 平面P上ニテOB, OD, OCト相交ル直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々B, D, Cトス。

AOヲ延長シテ$OA'=OA$ナラシメ, A, A'ヲ各B, D, Cト結ベバOB, OCハ夫々AA'ノ垂直二等分線ナルガ故ニ,



$AB=A'B,\quad AC=A'C.$

故ニ $\triangle ABC\equiv\triangle A'BC.$

從ッテ $\angle ABD=\angle A'BD.$

故ニ $\triangle ABD\equiv\triangle A'BD.$

從ッテ $AD=A'D.$

故ニ $\angle AOD=\angle A'OD.$

即チOAトODトハ互ニ垂直ナリ。

**定義。** 一直線ガ一平面ト交リ,其交點ヲ過リテ其平面上ニ引キタル總テノ直線ニ垂直ナルトキハ,其直線ト平面トハ互ニ**垂直ナリ**ト云フ。

定理八ニヨリ,一直線ガ一平面ニ垂直ナルタメニハ,ソノ交點ヲ過リ其平面上ニ引キタル任意ノ二直線ノ各ニ垂直ナレバヨシ。

一直線ト一平面トガ互ニ垂直ナルトキ,其直線ヲ其平面ノ**垂線**ト云ヒ,垂直ナラズシテ相交ルトキハ其直線ヲ其平面ノ**斜線**ト云フ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ其垂線又ハ斜線ノ**足**ト云フ。

定理八及ビ六ヨリ次ノ系ヲ得。

系1. 平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ニ垂直ナルトキハ,他ノ一ツモ亦其平面ニ垂直ナリ。

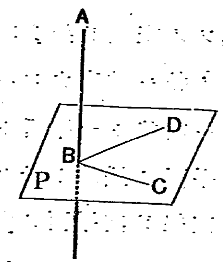
**定義。** 二ツノ**出會ハザル直線ノナス角**トハ任意ノ一點ヲ過リ夫々之ニ平行ニ引タル二直線ノナス角ヲ云フ。

其角ノ大サガ上ニイフ所ノ任意ニ取リタル一點ノ位置ニ關係ナキコトハ定理六ニヨリテ明カナリ。此定義ヲ用フレバ定理八ヨリ直チニ次ノ系ヲ得。

**系2.** 一直線ガ一平面上ノ任意ノ二直線ニ夫々垂直ナルトキハ,前ノ一直線ハ其平面ニ垂直ナリ。

**定理九。** 一直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

**(特述)** 直線 AB 上ノ一點 B ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セントス。




**(證明)** B ヲ過リテ AB ニ任意ノ二ツノ垂線 BC, BD ヲ引キ, BC, BD ノ定ムル平面ヲ P トスレバ, P ハ AB ニ垂直ナル平面ナリ(定理八)。

若シ平面 P ノ外ニ B ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面 Q アリトスレバ, AB ヲ含ミ P ト Q トノ交リヲ含マザル一平面 R ヲ作リ, P ト R トノ交リヲ BE トシ,



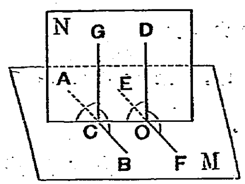
Q ト R トノ交リヲ BF トスレバ, BE, BF ハ AB ト共ニ R 上ニ在リテ一點 B ヲ過リ同一ノ直線 AB ニ垂直ナルコトトナル,コレ不合理ナリ。

故ニ斯クノ如キ平面ハ P ノ他ニハナシ。

**系。** 一直線外ノ一點ヲ過ギリ之ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

**定理十。** 平面上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

**(特述)** 平面 M 上ノ一點 O ヲ過リテ平面 M ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セントス。




**(證明)** 平面 M 上ニ任意ノ直線 AB ヲ引キ, O ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面 N ヲ作リ, M ト N トノ交リヲ OC トス。

O ヲ過リ平面 N 上ニテ OC ニ垂直ニ OD ヲ引ケバ, OD ハ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ナリ。

何トナレバ O ヲ過リテ AB ニ平行ニ EF ヲ引ケバ, EF ハ M 上ニ在リ。又 C ヲ過リテ OD ニ平行ニ

CG ヲ引ケバ, CG ハ N 上ニアリ。

∴ 而シテ N ハ AB ニ垂直ナルヲ以テ,

$$\angle BCG=R\angle.$$

従ッテ　$\angle FOD=R\angle.$

又假定ニヨリ　$\angle COD=R\angle.$

故ニ OD ハ M ニ垂直ナリ。

若シ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ガ OD ノ他ニモアリトスレバ,之ヲ OH トシ, OH ト OD トニヨリテ決定セラルル平面ト M トノ交リヲ OK トスレバ OH, OD ハ OK ト同一平面上ニアリテ共ニ OK ニ垂直トナル,コレ不合理ナリ。

故ニ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ハ OD ノ他ニハナシ。

系。同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

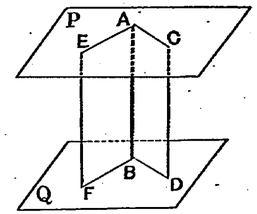
(證明) 一方ノ垂線ノ足ヲ過リ他ノ垂線ニ平行ナル直線ヲ引キ,定理八系1及ビ定理十ヲ用ヒテ同一法ニヨリ證明スルコトヲ得。

## 9. 二平面ノ共通垂線

**定理十一。** 平行ナル平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ亦垂直ナリ。



(特述) 平面 P ト Q トハ平行ニシテ,一直線 AB ガ平面 P ト A ニ於テ垂直ニ交ルトキハ, AB ハ亦 Q トモ垂直ニ交ルコトヲ證明セントス。




(證明) P ト Q トハ平行ニシテ AB ハ P ト交ルヲ以テ, AB ハ亦 Q トモ交ル。今其交點ヲ B トス。

AB ヲ含ム一平面ト P, Q トノ交リヲ夫々 AC, BD トスレバ, AC ト BD トハ互ニ平行ナリ。

然ルニ AB ハ P ノ垂線ナルヲ以テ,

$$\angle BAC=R\angle.$$

故ニ　$\angle ABD=R\angle.$

又 AB ヲ含ム他ノ一平面ト P, Q トノ交リヲ夫々 AE, BF トスレバ,同様ニシテ　$\angle ABF=R\angle.$

即チ AB ハ Q 平面上ノ二直線 BD, BF ノ各ニ垂直ナリ。

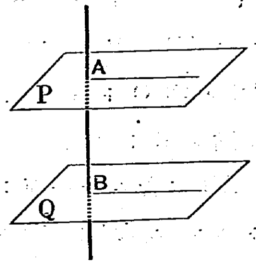
故ニ AB ハ平面 Q ニ垂直ナリ。

定義。二ツノ平行ナル平面ノ間ニ在ル共通垂線ノ線分ノ長サヲ其二ツノ平行ナル平面ノ間ノ距離ト云フ。

**定理十二。** 同一直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ。

(特述) 二平面 P, Q ガ同一直線 AB ニ垂直ナルトキハ, P, Q ハ互ニ平行ナルコトヲ證明セントス。

(證明) P ト Q トガ平行ナラズトセバ,其交リノ上ニ一點 M ヲ取リ, MA, MB ヲ結ブベシ。




然ルトキハ MA, MB ハ共ニ AB ニ垂直ナリ。

卽チ一點 M ヨリ AB ニ二ツノ垂線ガ引カルルコトトナル,コレ不合理ナリ。

故ニ P ト Q トハ平行ナラザルベカラズ。

## 10. 正射影

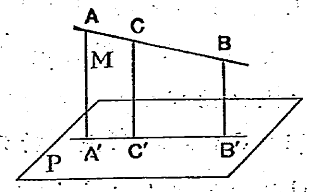
**定義。** 一點ガ一平面上ニ投ズル正射影トハ,其點ヨリ其平面ニ下セル垂線ノ足ナリ。

一直線ガ一平面上ニ投ズル正射影トハ其直線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。

**定理十三。** 一平面ニ垂直ナラザル一直線ガ其平面上ニ投ズル正射影ハ,其一直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ル一直線ナリ。



(特述) 一平面 P ニ垂直ナラザル一直線ヲ AB トシ, AB 上ノ任意ノ二點 A, B ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ夫々 $A'$, $B'$ トスレバ, AB ノ正射影ハ直線 $A'B'$ ナルコトヲ證明セントス。




(證明) $AA'$, $BB'$ ハ共ニ P ニ垂直ナルヲ以テ,互ニ平行ナリ。

$AA'$ 及ビ $BB'$ ノ定ムル平面ヲ M トスレバ, AB 及ビ $A'B'$ ハ M 上ニアリ。

AB 上ノ任意ノ一點 C ヨリ $AA'$ ニ平行ニ $CC'$ ヲ引ケバ, $CC'$ ハ M 上ニアリ。而シテ $A'B'$ ハ $AA'$ ト交ルガ故ニ,之ト平行ナル $CC'$ トモ交ルベシ,ソノ交點ヲ $C'$ トス。然ルトキハ $CC'$ ハ平面 P ニ垂直ニシテ(定理八,系1), C ノ正射影ハ $C'$ ナリ。

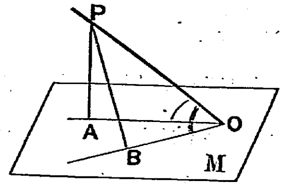
故ニ AB 上ノ總テノ點ノ正射影ハ直線 $A'B'$ ノ上ニ在リ。

又逆ニ $A'B'$ 上ノ總テノ點ハ AB 上ノ點ノ正射影ナルコトモ容易ニ證明セラル。

故ニ AB ノ P 上ニ投ズル正射影ハ $A'B'$ ナリ。

**定理十四。** 一ツノ平面ノ斜線ト其平面上ニ於テ其足ヲ過ル諸直線トノナス角ノ中，其斜線ノ正射影トナス鋭角ガ最モ小ナリ。

**(特述)** OP ヲ平面 M ノ斜線，O ヲ其足トス。又 M ノ上ニ投ズル OP ノ正射影ヲ OA トシ，M 上ニ於テ O ヲ過ル他ノ任意ノ直線ヲ OB トスルトキハ，




∴ ∠POA ハ ∠POB ヨリモ小ナルコトヲ證明セントス。

**(證明)** 點 P ノ正射影ヲ A トシ，OA=OB ナラシムレバ，△AOP ト △BOP トニ於テ，二邊ガ夫々相等シク，第三邊ハ不等ニシテ

$$PA<PB.$$

故ニ　　$\angle AOP<\angle BOP.$

**定義。** 一直線ト一平面トノナス角トハ，其平面上ニ投ズル其直線ノ正射影ト，モトノ直線トノナス角ヲイフ。

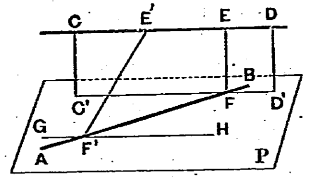
## 11. 二直線ノ共通垂線

**定理十五。** 同一平面上ニアラザル二ツノ直線ニ共通ナル垂線ハ一ツアリ，而シテ唯



一ツニ限ル。兩直線上ニ夫々一端ヲ有スル線分ノ中ニテハ兩直線ノ共通垂線ナルモノガ最モ短シ。

**(特述及ビ證明)** 同一平面上ニアラザル二直線ヲ AB, CD トス。AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 P ヲ作リ，CD ガ P 上ニ投ズル正射影ヲ C′D′ トス。




C′D′ ハ CD ニ平行ナルヲ以テ，AB ニ平行ナラズ。故ニ C′D′ ハ AB ト一ツノ點 F ニテ交ル。

サテ定理十三ニヨレバ，C′D′ 上ノ點ハスベテ CD 上ノ或點ノ正射影ナリ。依ツテ今 F ヲ CD 上ノ一點 E ノ正射影ナリトスレバ，EF ハ平面 P ニ垂直ナルヲ以テ，EF ハ AB 及ビ C′D′ ニ垂直ナリ。

從ツテ EF ハ C′D′ ニ平行ナル CD ニモ垂直ナリ。

即チ EF ハ AB, CD ニ共通ナル垂線ナリ。

若シ EF ノ他ニ AB, CD ニ共通ナル垂線アリトセバ，之ヲ E′F′ トシ，AB, CD トノ交點ヲ夫々 F′, E′ トセヨ。

$F'$ ヲ過リ $CD$ ニ平行ナル直線 $GH$ ヲ引ケバ,$E'F'$ ハ $GH$ ニ垂直ナリ。

而シテ $GH$ ハ $P$ 上ニアリ。

故ニ $E'F'$ ハ $AB$ ト $GH$ トニ垂直ニシテ,從ツテ平面 $P$ ノ垂線ナリ。

然ラバ $F'$ ハ $E'$ ノ $M$ 上ニ投ズル正射影ナルヲ以テ $C'D'$ ノ上ニ在ラザルベカラズ。從ツテ $F'$ ハ $F$ ト同シ點ニシテ,ツマリ $E'F'$ ハ $EF$ ト相一致ス。

故ニ $EF$ ノ他ニ $AB$, $CD$ ニ共通ナル垂線ナシ。

次ニ同シ圖ニ於テ $E'F'$ ヲ夫々 $CD$, $AB$ 上ノ任意ノ二點トスレバ,$E'F'$ ガ全ク $EF$ ト相合セザル限リ,上述ノ理ニヨリ $E'F'$ ハ平面 $P$ ニ垂直ナラザルヲ以テ,$E'F'$ ハ $E'$ ヨリ平面 $P$ ニ下セル垂線ヨリモ大ナリ。

而シテ $E'$ ヨリ $P$ ニ下セル垂線ハ $EF$ ニ等シ。

故ニ $EF$ ハ $E'F'$ ヨリ小ナリ。

即チ $EF$ ハ $AB$, $CD$ 上ニ夫々一端ヲ有スル線分中ニテ最モ短キモノナリ。

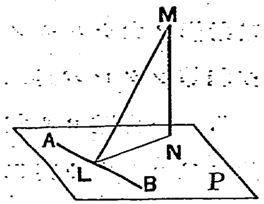
**定義。** 二直線ノ間ニアル共通垂線ノ線分ノ長サヲ其二直線ノ間ノ<u>距離</u>トイフ。



## 12. 三垂線ノ定理

**定理十六。** 一點ヨリ一平面及ビ其平面上ニアル一直線ニ夫々垂線ヲ下ストキハ,其兩垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ前ノ直線ニ垂直ナリ。

(特述) 一點 $M$ ヨリ平面 $P$ ニ下シタル垂線ノ足ヲ $N$ トシ,又 $M$ ヨリ $P$ 上ノ一直線 $AB$ ニ下シタル垂線ノ足ヲ $L$ トス。然ルトキハ直線 $NL$ ハ $AB$ ニ垂直ナルコトヲ證明セントス。




(證明) $AB$ ハ相交ル二直線 $MN$ 及ビ $ML$ ニ共ニ垂直ナリ。故ニ $AB$ ハ $MN$, $ML$ ノ定ムル平面 $LMN$ ニ垂直ナリ。從ツテ $AB$ ハ平面 $LMN$ 上ノ直線 $NL$ ト互ニ垂直ナリ。

同シ圖ヲ用ヒ,同樣ノ論法ニヨリ次ノ系ヲ得。

系 1. $MN$ ガ平面 $P$ ニ垂直,$NL$ ガ直線 $AB$ ニ垂直ナラバ,$ML$ ハ直線 $AB$ ニ垂直ナリ。

系 2. $ML$ ガ直線 $AB$ ニ垂直,$LN$ ガ $P$ 上ニテ直線 $AB$ ニ垂直ニシテ,$MN$ ガ直線 $LN$ ニ垂直ナラバ,$MN$ ハ平面 $P$ ニ垂直ナリ。

## 例題

1. 平面外ノ與ヘラレタル一點ヨリ其平面ニ垂線ヲ引クコトヲ求ム。

2. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム。

3. 相交ル二平面ノ間ニ在ル一點ヨリ此二平面ニ下セル垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ其二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

4. 一點ヨリ一平面ニ引ケル二ツノ斜線ノ中,其正射影ノ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ。又其正射影ガ相等シケレバ其二ツノ斜線ハ相等シ。

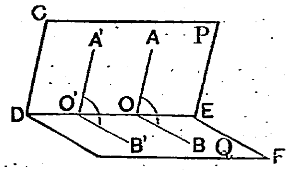
5. 一定點ヨリ相交ハル二平面ノ各ニ下セル垂線ノ足ヨリ夫々其二平面ノ交線ニ垂線ヲ引クトキハ,其兩垂線ハ二平面ノ交線上ノ一點ニ於テ出會フ。



# 第四章 二面角及ビ立體角

## 13. 二面角

**定義。** 相交ル二平面ハ**二面角**ヲ作ルト云ヒ,其各ノ平面ヲ二面角ノ**面**ト云ヒ,其交線ヲ二面角ノ**稜**ト云フ。




二面角ヲ表ハスニハ其二面ノ上ニ夫々一點ヅツヲトリ,其記號ノ間ニ稜上ノ二點ノ記號ヲ挾ミテ之ヲ呼ブ。

例ヘバ二面角 CDEF ト記スルガ如シ。

然レドモ一稜ニ於テ唯一ツノ二面角ノミガ存在スルトキハ,其稜ノ上ノ任意ノ二點ヲ以テ之ヲ呼ブコトアリ。

例ヘバ二面角 DE ノ如シ。

**定理十七。** 一ツノ二面角ニ於テ,其稜上ノ任意ノ一點ヨリ各面上ニ於テ夫々其稜ニ垂線ヲ引クトキハ,其二ツノ垂線ノナス角ハ一定ナリ。

(證明) (上ノ圖ヲ用フ稜上ニ於ケル點ノ位置ガ變

ズルトモ,カクノ如キ二ツノ垂線ノナス角ノ二邊ハ夫々平行ニシテ且其二面角ノ稜ニ對シテ同ジ方向ニアレバナリ(定理六)。

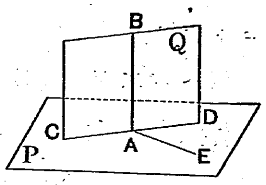
**定義**。 二面角ノ大サヲ度ルニハ其稜上ノ一點ヨリ各面上ニ於テ夫々其稜ニ引キタル二ツノ垂線ノナス平面角ノ大サヲ以テス。

**定義**。 二ツノ平面ノ爲ス二面角ガ直角ナルトキハ其二ツノ平面ハ互ニ**垂直ナリ**ト云フ。

**定理十八**。 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直ナリ。

(特述) ABヲ點Aニ於ケル平面Pノ垂線トシ,ABヲ含ム任意ノ平面ヲQトスレバ,QハPニ垂直ナルコトヲ證明セントス。

(證明) PトQトノ交リヲCDトス。P上ニテAヲ過リテCDニ垂直ナル直線AEヲ引クトキハ,假定ニヨリABガ平面Pニ垂直ナルヲ以テ∠BAEハ直角ナリ。然ルニ∠BAEハ卽チP,Qノナス二面角ヲ度ル角ナリ。




故ニP,Qハ互ニ垂直ナリ。

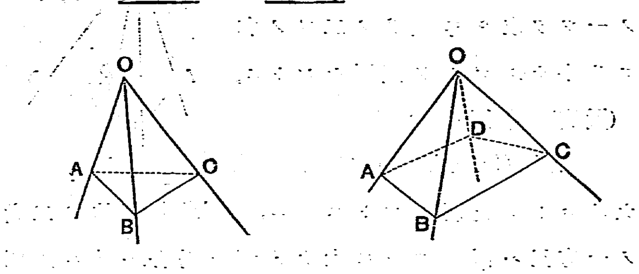


**系1.** 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,ソノ交リノ上ノ一點ヲ過リ一方ノ平面ニ垂直ナル直線ハ他ノ平面ニ含マル。(一方ノ平面上ニテソノ交リニ垂線ヲ引ケバ,コレガ他ノ平面ノ垂線ナリ。)

**系2.** 相交ル二平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ,前ノ二平面ノ交線ハ第三ノ平面ニ垂直ナリ。

## 14. 多面角

**定義**。 三ツ又ハ三ツヨリ多クノ平面ガ悉ク同一ノ點ヲ過リ,且二ツヅツ順次ニ相交ルトキハ,ソレラノ平面ハ**多面角**又ハ**立體角**ヲ作ルト云フ。




其同一ノ點ヲ多面角ノ**頂點**ト云ヒ,其平面ノ順次ニ相交ル交線ヲ多面角ノ**稜**ト云フ。

又相隣レル二稜ノナス角ヲ其多面角ニ於ケル**平面角**ト云フ,多面角ハ之ヲ作ル平面ノ數ニ從ヒテ**三面角**,**四面角**等ト稱セラル。

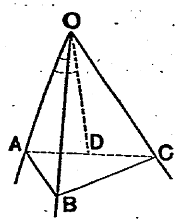
前頁ノ圖ニ於ケル多面角ヲ表スニハ夫々次ノ如クニ呼ブ:

O−ABC,　　　　O−ABCD.

多面角ヲ其總テノ稜ト交ル一平面ニヨリテ截リタル截リ口ガ凸多角形ナルトキハ其多面角ヲ**凸多面角**ト云フ。

**定理十九。** 三面角ニ於ケル一ツノ平面角ハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小ナリ。

(特述) 三面角 O−ABC ニ於テ, 平面角 AOB, BOC, COA ノ中何レノ一ツヲ取ルモ殘リノ二ツノ和ヨリ小ナルコトヲ證明セントス。




(證明) 今例ヘバ

$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$

ナルコトヲ證明セントスルニ, ∠AOC ガ他ノ二角ノ一方又ハ兩方ヨリモ大ナラザル場合ハ特ニ證明ヲ要セザルヲ以テ,ココニハ ∠AOC ガ他ノ二角ノ何レヨリモ大ナルモノトシテ證明スレバ足ル。

平面 AOC 上ニ ∠AOD ヲ ∠AOB ニ等シクトリ,一ツノ直線ト OA, OD, OC トノ交點ヲ A, D, C トス。OB ヲ OD ニ等シク取リ, AB, BC ヲ結ベバ,



$\triangle AOB \equiv \triangle AOD.$

故ニ　$AB = AD.$

然ルニ三角形 ABC ニ於テ

$AC < AB + BC$

ナルヲ以テ,兩邊ヨリ AB ヲ減ズレバ,

$DC < BC$

トナル。依ツテ

二ツノ三角形 BOC, DOC ニ於テ,

$$\left.\begin{array}{l} BO = DO \\ CO \text{ ハ共通} \\ DC < BC \end{array}\right\}$$

ナルガ故ニ　$\angle DOC < \angle BOC.$

コノ不等式ト

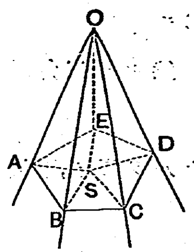
$\angle AOD = \angle AOB$

トヲ邊々相加フレバ今證明セントスル式ヲ得。

**定理二十。** 一ツノ凸多面角ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

(特述) O ヲ頂點トスル凸多面角ニ於テ,ソノスベテノ稜ト交ル一ツノ平面ニヨリテノ截リ口ヲ凸多角形 ABCDE トス。然ルトキハ平面角 ∠AOB, ∠BOC

等ノスベテノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ證明セントス。




(證明) 多角形 ABCDE 內ニ任意ノ一點Sヲトリ, Sヲ頂點 A, B, C, D, E ト夫々結ブトキハ, Sヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數ト, Oヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數トハ相等シキヲ以テ,此二組ノ三角形ノ內角ノ和ハ相等シ。

然ルニ平面角 OAB, OAE ノ和ハ角 BAE ヨリ大ナリ。 卽チ

$$\angle OAB+\angle OAE>\angle BAS+\angle EAS.$$

B, C, D, E 等ノ點ニ於テモ夫々同樣ノ關係アリ。

故ニOヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ハ, Sヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ。

故ニOニ於ケル總テノ平面角ノ和ハ,Sニ於ケル總テノ角ノ和ヨリ小ナリ,卽チ四直角ヨリ小ナリ。



## 例題

1. A, B ハ二面角ノ二ツノ面ノ各ノ上ニ夫々一ツヅツ在ル點ナリトシ,其二平面ノ交リノ上ニ一點 P ヲ求メテ PA+PB ガ最小トナル樣ニセヨ。

2. 二面角ノ稜上ノ一點ヲ過リ各面上ニテ夫々稜ノ一方ノ向キト $\alpha$ ナル角ヲナス直線ヲ引クトキハ,其二直線ノナス角ハ稜上ニトリタル最初ノ點ノ位置ニハ無關係ニシテ,又其角ハ $\alpha$ ガ 90° ナルトキニ最大トナル。

3. 與ヘラレタル四面角ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

# 第二編

# 多面體

## 第一章 角壔及ビ角錐

### 15. 多面體

定義。多面體トハ平面ニテ圍マレタル立體ナリ。

多面體ヲ圍ム平面ノ數ハ四ツヨリ少ナカラズ。

多面體ヲ圍ム平面ノ數ガ四,五,六等ナルニ從ツテ,其多面體ヲ四面體,五面體,六面體等ト稱ス。

多面體ヲ界スル平面ノ限ラレタル部分(多角形)ヲ多面體ノ面ト云ヒ,面ト面トノ交線ヲ多面體ノ稜ト云ヒ,稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ頂點ト云フ。

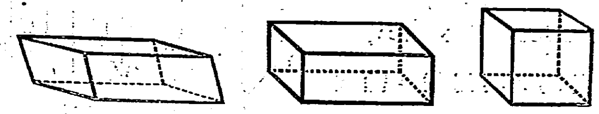
同一ノ面上ニ在ラザル二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ對角線ト云フ。

多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモ其平面ガ決シテ其多面體ヲ截ラザルモノヲ凸多面體ト云フ。(本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ。)

平行六面體トハ相對スル面ガ夫々平行ナル六面體ナリ。



各ノ面ガ矩形ナル平行六面體ヲ直六面體ト云ヒ,各ノ面ガ正方形ナル直六面體ヲ立方體又ハ正六面體ト云フ。



平行六面體　直六面體　立方體

### 16. 角壔

定義。角壔トハ一直線ニ平行ナル若干ノ平面及ビ其直線ト交ルニツノ平行ナル平面ニヨリテ圍マレタル多面體ナリ。

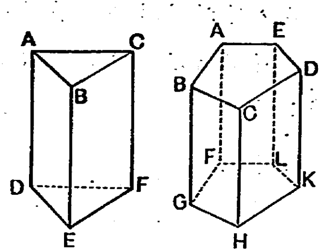
其一直線ニ交ルニツノ平行ナル面ヲ角壔ノ底面トイヒ,其一直線ニ平行ナル面ヲ側面ト云フ。側面ノ交リヲ側稜ト云ヒ,二ツノ底面間ノ距離ヲ其角壔ノ高サト云フ。

角壔ノ側稜ガ其底面ニ垂直ナルトキハ之ヲ直角壔ト云ヒ,垂直ナラザルトキハ之ヲ斜角壔ト云フ。

角壔ハ其側面ノ數ガ三,四,五等ナルニ從ツテ之ヲ三角壔,四角壔,五角壔等ト名ヅク。

次頁ノ上方ノ圖ハ三角壔及ビ五角壔ニシテ,之ヲ表スニハ夫々

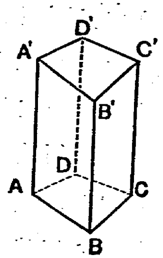
ABC−DEF 及ビ
ABCDE−FGHKL,
或ハ ABC−D 及ビ
ABCDE−F ト記ス。




角壔ヲ其側稜ニ垂直ニシテ底面ヲ截ラザル一ツノ平面ニヨリテ截リタル截リ口ヲ其角壔ノ**直截面**ト云フ。

**定理二十一。** 角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形ニシテ,其二ツノ底面ハ合同ナル多角形ナリ。

**(特述)** 角壔 ABCD−A′B′C′D′ ニ於テ,側面 ABB′A′, BCC′B′ 等ハ何レモ平行四邊形ニシテ,又其二ツノ底面 ABCD, A′B′C′D′ ハ合同ナル多角形ナルコトヲ證明セントス。




**(證明)** 角壔ノ側面ハ皆同一直線ニ平行ナルヲ以テ,側稜 AA′, BB′ 等ハ其同一直線ニ平行ナリ,從テ又互ニ平行ナリ。

次ニ AB ト A′B′ トハ二ツノ平行ナル底面ト一ツノ側面トノ交リナルヲ以テ,互ニ平行ナリ。



故ニ側面 ABB′A′ ハ平行四邊形ナリ。

其他ノ側面ニツイテモ同様ナリ。

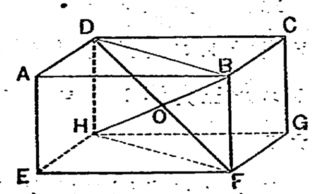
依ッテ二ツノ底面ノ相對應スル邊ハ夫々相等シク且平行ナリ。

從ッテマタ二ツノ底面ノ相對應スル角モ夫々相等シ。

故ニ二ツノ底面ハ合同ナル多角形ナリ。

**定理二十二。** 平行六面體ニ於テ,三双ノ相對スル面ハ夫々合同ナル平行四邊形ナリ。又四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過リ,各他ヲ二等分ス。

**(特述)** 平行六面體 ABCD−EFGH ニ於テ,三双ノ相對スル面 AC ト EG, AF ト DG, AH ト BG ハ夫々合同ナル平行四邊形ニシテ,又四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ皆同一ノ點ヲ過リ各他ヲ二等分スルコトヲ證明セントス。




**(證明)** 平行六面體ハ之ヲ圍ム三双ノ平行ナル面ノ中任意ノ一双ノ平行ナル面ヲ底面トシ,他ノ

二双ノ平行ナル面ヲ側面トスル角壔ト見做スコトヲ得。故ニ定理二十一ニヨリ,任意ノ面ハ之ヲ角壔ノ側面ト見做スコトニヨリテ平行四邊形ナルコトヲ知ルベク,又任意ノ一双ノ相對スル面ハ之ヲ角壔ノ底面ト見做スコトニヨリテソノ合同ナルコトヲ知ルベシ。

次ニ BF, DH ハ各 AE ニ等シク且平行ナルヲ以テ,マタ互ニ等シク且平行ナリ。

故ニ BD, FH ヲ結ベバ, BDHF ハ平行四邊形ニシテ,從ツテ其對角線 BH, DF ハ各他ヲ二等分ス。

同樣ニ DF ト AG, DF ト CE モ亦各他ヲ二等分ス。

故ニ四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過リ,各他ヲ二等分ス。

## 17. 角錐

**定義。** **角錐**トハ一ツノ多角形ト,其多角形ノ各邊ヲ底邊トシ其多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニヨリテ圍マレタル一ツノ多面體ナリ。

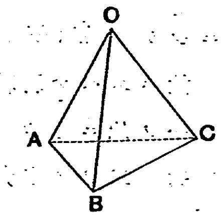
始メノ多角形ヲ其角錐ノ**底面**ト云ヒ,同一點ヲ共有スル三角形ノ面ヲ其**斜面**,總テノ斜面ガ共有スル



同一點ヲ其ノ**頂點**,相隣レル斜面ノ交リヲ**斜稜**ト云フ。

角錐ノ頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ノ長サヲ其**高サ**ト云フ。

角錐ハ其底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテ之ヲ**三角錐,四角錐**等ト云フ。




右ノ圖ハ三角錐ニシテ,之ヲ O-ABC ト記ス。

**定理二十三。** 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截ルトキハ,各ノ斜稜及ビ高サハ同一ノ比ニ分タル,又其截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形ナリ。

**(特述)** 次頁ノ圖ニ於テ角錐 O-ABCD ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ヲ A′B′C′D′ トシ,又 O ヨリ底面ニ下セル垂線 OH ト其平面トノ交點ヲ H′ トスレバ, OA, OB, OC, OD, OH ハ夫々 A′, B′, C′, D′, H′, ニ於テ同一ノ比ニ分タルベク,又多角形 ABCD ト A′B′C′D′ トハ互ニ相似ナルコトヲ證明セントス。

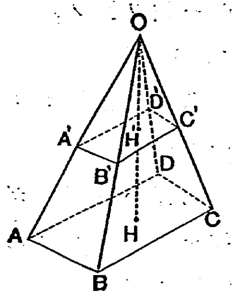
**(證明)** AB ト A′B′ トハ互ニ平行ナルヲ以テ,

$OA':A'A=OB':B'B$

其他ノ側稜ニツイテモ同樣ナリ。

又 AH, A'H' ヲ結ベバ,同樣ニシテ $OA':A'A=OH':H'H$.

故ニスベテ斜稜及ビ高サハ同一ノ比ニ分タル。




次ニ二ツノ多角形 ABCD ト A'B'C'D' トニ於テ

$$\angle ABC=\angle A'B'C',\ 等。$$

卽チ相對應スル角ガ夫々相等シ。

又 $AB:A'B'=OB:OB'$,

$BC:B'C'=OB:OB'$

ナルヲ以テ $AB:A'B'=BC:B'C'$.

同樣ニ他ノ對應邊モ亦夫々比例ヲナス。

故ニ二ツノ多角形 ABCD ト A'B'C'D' トハ互ニ相似ナリ。

## 18. 正多面體

**定義。** 正多面體トハ總テノ面ガ全ク相等シキ正多角形ニシテ,且總テノ多面角(立體角)ガ全ク相等シキモノヲイス。



**定理二十四。** 正多面體ニハ次ノ五種アリ,而シテ此他ニナシ。

正四面體, 正六面體, 正八面體,

正十二面體, 正二十面體。

(證明) 正多面體ノ多面角ハ何レモ合同ニシテ且其總テノ平面角ハ正多角形ノ角ナルコトヲ要ス。

然ルニ一ツノ多面角ヲ作ルニハ三ツ又ハ三ツヨリ多クノ平面角ガ其頂點ニ於テ出會フコトヲ要シ,而シテソレラノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ要ス。

サテ正三角形ノ一角ハ$\frac{2}{3}$直角ナルガ故ニ,正三角形ヲ面トシテ作リ得ベキ正多面體ノ多面角ハ三面角,四面角又ハ五面角ニ限ル。

又正方形ノ一角ハ1直角,正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角ナルガ故ニ,正方形又ハ正五角形ヲ以テ作リ得ベキ正多面體ノ多面角ハ各三面角ニ限ル。

次ニ邊數ガ五ヨリ多キ正多角形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$直角ヨリ小ナラザルガ故ニ,之ヲ以テ多面角ヲ作ルコトヲ得ズ。

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ニ限ル。

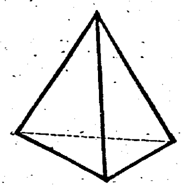
(1) 三ツノ正三角形,　(2) 三ツノ正方形,

(3) 四ツノ正三角形,　(4) 三ツノ正五角形,

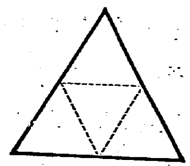
(5) 五ツノ正三角形。

此五種ノ各ニ對應スル正多面體ハ實際ニ作成スルコトヲ得。例ヘバ次ノ展開圖ヲ厚紙ノ上ニ畫キ之ヲ點線ニ沿ヒテ折リ曲グレバ其模型ヲ得ベシ。

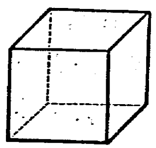
(1) 正四面體



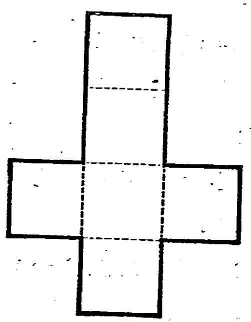
(1) 正四面體ノ展開圖



(2) 正六面體(立方體)

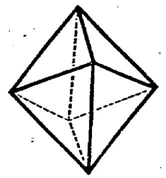


(2) 正六面體ノ展開圖

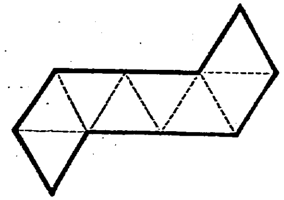




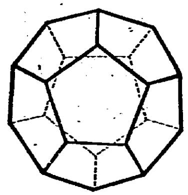
(3) 正八面體



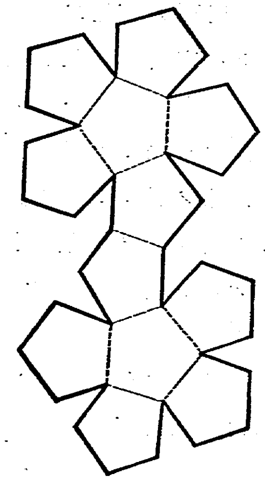
(3) 正八面體ノ展開圖



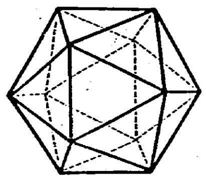
(4) 正十二面體



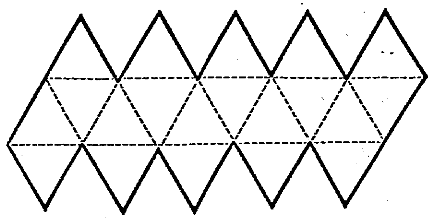
(4) 正十二面體ノ展開圖



(5) 正二十面體



(5) 正二十面體ノ展開圖



### 例題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ十二ノ稜ノ平方ノ和ニ等シ。

2. 底面ガ一邊二尺ナル正三角形ニシテ,高サガ三尺ナル直角壔ノ全表面積ヲ求メヨ。

3. 直六面體ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サガ夫々$a$尺, $b$尺, $c$尺ナルトキ,其直六面體ノ對角線ノ長サヲ問フ。

4. 直角壔ノ側稜ノ長サヲ$h$,全側面ノ面積ヲS,底面ノ周ノ長サヲ$p$ナル數ニテ表ストキハ,

$$S=ph.$$

5. 角錐ノ斜面ノ高サガスベテ$l$ニシテ,又其底面ノ周ガ$p$,全斜面ノ面積ガSナルトキハ,

$$S=\frac{1}{2}pl.$$



## 第二章 多面體ノ體積

### 19. 體積

**定義。** 多面體ノ體積トハ其面ニヨリテ圍マレタル空間ノ部分ノ大サヲ云フ。

體積ヲ計ルニハ長サノ單位ヲ稜トスル立方體ノ體積ヲ單位トシテ用フ。

重ネ合スコトヲ得ベキ多面體ノ體積ハ相等シ,然レドモ體積ハ相等シクトモ重ネ合スコトヲ得ザルモノアリ。

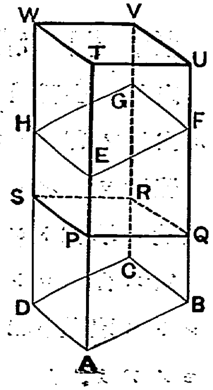
### 20. 角壔ノ體積

**定理二十五。** 斜角壔ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ其側稜ニ等シキ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シ。

**(特述)** 次頁ノ圖ニ於テ,斜角壔 ABCD−EFGH ノ直截面ヲ PQRS トセバ,ABCD−EFGH ノ體積ハ PQRS ヲ底面トシ其側稜 AE ニ等シキ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シキコトヲ證明セントス。

**(證明)** 稜 AE ヲ延長シ,ソノ上ニ PT=AE ナル如

キ點Tヲトリ，Tヲ過リテPQRSニ平行ナル平面ヲ引キ，各側面ノ延長トノ交リヲ夫々 TU, UV, VW, WT トス。




然ルトキハ，PQRS−TUVW ハ直角壔ニシテ，其側稜ハ皆 AE ニ等シク，PQRS ハ其直截面ナリ。

サテ多面體 ABCD−PQRS ト多面體 EFGH−TUVW トハ總テノ相對應スル稜及ビ角ガ夫々相等シキヲ以テ，此二ツノ多面體ハ全ク相等シ。

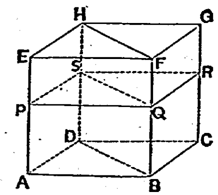
故ニ此二ツノ多面體ニ夫々同ジ多面體 PQRS−EFGH ヲ加ヘタルモノハ相等シ。即チ斜角壔 ABCD−EFGH ハ直角壔 PQRS−TUVW ニ等シ。

**定理二十六。** 一ツノ平行六面體ハ其二ツノ相對スル稜ヲ含ム平面ニヨリテ，相等シキ體積ヲ有スル二ツノ三角壔ニ分タル。

(特述) 平行六面體 ABCD−EFGH ヲ其二ツノ相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平面ニ依リテ二ツノ三角壔 ABD−EFH, CDB−GHF ニ分ツトキハ此二ツノ三角



壔ノ體積ハ相等シキコトヲ證明セントス。




(證明) 直截面 PQRS ヲ作レバ，$\triangle PQS \equiv \triangle RSQ$.

而シテ此兩三角形ハ夫々三角壔 ABD−EFH 及ビ CDB−GHF ノ直截面ナリ。

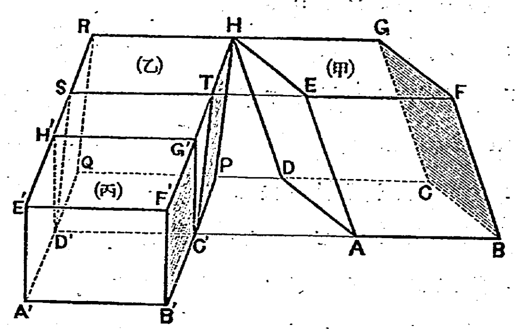
故ニ此二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シ。

系。與ヘラレタル三角壔ノ二倍ノ體積ヲ有スル平行六面體ヲ作ルコトヲ得。

**定理二十七。** 平行六面體ト直六面體トニ於テ其高サガ相等シク，且其底面ノ底邊及ビ高サガ夫々相等シケレバ，其體積ハ相等シ。

(特述) 平行六面體 ABCD−EFGH (甲)ト直六面體 A′B′C′D′−E′F′G′H′ (丙)トガ等高ニシテ且其底面 AC 及ビ A′C′ ノ底邊及ビ高サガ夫々相等シトセバ，(甲)ト(丙)トハ體積ガ相等シキコトヲ證明セントス。

(證明) (甲)ノ稜 GH ヲ延長シ，其延長上ニ HR ヲ取リ，HR=GH ナラシム。H 及ビ R ヲ過リテ夫々 HR ニ垂直ナル平面ヲ作リ，(甲)ノ側面ノ延長ト交ラシメテ，(甲)ト等底等高ナル一ツノ平行六面體 D′C′PQ−STHR (乙)ヲ作レ。




然ルトキハ(乙)ノ稜HRハGH＝等シク,又其面C′HハC(甲)ノ稜GH＝垂直ナル直截面ナルヲ以テ,(甲)ト(乙)トハ相等シキ體積ヲ有ス(定理二十五)。

次＝PC′及ビ之＝平行ナル(乙)ノ側稜ヲ延長シ,PC′=C′B′ナラシメ,C′及ビB′ヲ過リC′B′＝垂直ナル平面ヲ作ルトキハ,(乙)ト等底等高ナル直六面體A′B′C′D′−E′F′G′H′(丙)ヲ得。

(丙)ノ稜C′B′ハ(乙)ノ稜PC′＝等シク,又其面C′H′ハPC′＝垂直ナル(乙)ノ直截面＝等シ。故＝(乙)ト(丙)トハ相等シキ體積ヲ有ス。

而シテ(丙)ノ面A′C′ト(甲)ノ面ACトハ明カ＝等底等高＝シテ,之ヲ夫々(丙)及ビ(甲)ノ底面ト見做セバ兩體ノ高サノ相等シキコトモ明カナリ。故＝平行六



面體ABCD−EFGHノ體積ハ,之ト相等シキ底面及ビ相等シキ高サヲ有スル直六面體A′B′C′D′−E′F′G′H′ノ體積＝等シ。

**定理二十八**　底面ガ一定ナル直六面體ノ體積ハ其高サ＝比例ス。

(證明)　直六面體ノ底面ヲ一定ナラシメテ其高サヲ二倍,三倍,……,一般＝$n$倍($n$ハ必シモ整數ナルヲ要セズ)スルトキハ,其體積モ亦從ツテ二倍,三倍,……,$n$倍トナルコトハ容易＝證明セラル。故＝比例ノ原理＝ヨリ其體積ハ高サ＝比例ス。(中等平面幾何學,第71節參照)

此定理ハマタ次ノ如ク換言セラル。

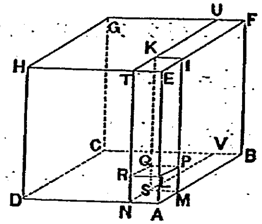
系。二ツノ直六面體ノ底面ガ全ク相等シキトキハ,其體積ノ比ハ其高サノ比＝等シ。

**定理二十九。**　直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ其一ツノ頂點＝於テ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ積＝等シ。

(特述)　直六面體ABCD−EFGHノ一ツノ頂點A＝於テ出會シ三ツノ稜AE, AB, AD,ノ長サヲ夫々$l$, $m$, $n$トスレバ,此直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ$lmn$

ナルコトヲ證明セントス。

(證明) AE, AB, AD 上ニ AL, AM, AN ヲ夫々單位ノ長サニ等シク取リ,先ヅ N ヲ過リテ ABFE ニ平行ナル平面 NVUT ヲ作リ,次ニ M ヲ過リテ AETN ニ平行ナル平面 MIKS ヲ作リ,又 L ヲ過リテ AMSN ニ平行ナル平面 LPQR ヲ作レ,




然ルトキハ同ジ底面ヲ有スル直六面體ノ體積ハ其高サニ比例スルヲ以テ,

$$\frac{\text{直六面體}\,ABFE-DCGH}{\text{直六面體}\,ABFE-NVUT}=\frac{AD}{AN}=\frac{n}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體}\,ABFE-NVUT}{\text{直六面體}\,AETN-MIKS}=\frac{AB}{AM}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體}\,AETN-MIKS}{\text{直六面體}\,AMSN-LPQR}=\frac{AE}{AL}=\frac{l}{1}.$$

此三ツノ比ノ相乘比ヲ作レバ

$$\frac{\text{直六面體}\,ABFE-DCGH}{\text{直六面體}\,AMSN-LPQR}=\frac{lmn}{1}.$$

然ルニ直六面體 AMSN-LPQR ハ長サノ單位ヲ稜トスル立方體ナルヲ以テ,ソノ體積ハ 1 ナル數ニヨリテ表サル。依ツテ直六面體 ABFE-DCGH ノ體積ハ $lmn$ ナル數ニヨリテ表サル。



附言。此定理ヲ次ノ如ク略言スルコトアリ。

「直六面體ノ體積ハ其一ツノ頂點ニ於テ出會ヲ三ツノ稜ノ積ニ等シ」。

同様ノ略言ヲ用フレバ,直六面體ノ體積ハ其底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シトモイフコトヲ得。

任意ノ平行六面體ハ定理二十七ニヨリテ之ヲ等底等高ニシテ等體積ナル直六面體ニ直シ得ルガ故ニ,ソノ體積ハ矢張底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シ。

三角壔ハ定理二十六系ニヨリテ一ツノ平行六面體ノ半分ト考フルコトヲ得ルヲ以テ,上記ノ結果ヨリシテ,ソノ體積ハ矢張底面ト高サトノ積ニ等シキコトトナル。

任意ノ角壔ハ之ヲ幾ツカノ等高ナル三角壔ニ分チテ考フレバ,結局矢張ソノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シキコトトナル。

依ツテ次ノ定理ヲ得。

**定理三十。** 角壔ノ體積ハ其底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シ。

**定義。** 二ツノ多面體ニ於テ各ノ體積ノ數値(體積ヲ表ス數)ガ相等シキトキハ,タトヘソノ一方ヲ幾何學的ニ變形シテ他方ノモノトナスコトヲ得ザル場

合ト雖,兩者ノ體積ハ相等シキモノトス。

依ツテ次ノ系ヲ得。

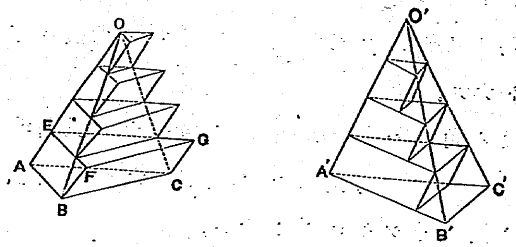
系 1. 等底等高ナル直六面體ノ體積ハ相等シ。

系 2. 等底等高ナル平行六面體ノ體積ハ相等シ。

系 3. 等底等高ナル角壔ノ體積ハ相等シ。(底面ナル多角形ノ邊數ガ相等シカラザル場合ヲ含ム)

## 21. 角錐ノ體積

**定理三十一。** 二ツノ三角錐ガ等底ニシテ且等高ナルトキハ其體積ハ相等シ。




**(特述)** 三角錐 O−ABC, O′−A′B′C′ ニ於テ其底面 ABC, A′B′C′ ガ等積ニシテ,且之ニ對スル高サモ相等シキトキハ,兩三角錐ノ體積ハ相等シキコトヲ證明セントス。

**(證明)** 各三角錐ノ側稜 OA, O′A′ ヲ夫々 $n$ 等分シ,其分點ヲ過ギリ底面ニ平行ナル平面ヲ引キテ各角錐ヲ截レバ,相對應スル截リ口ガ夫々等積ナルコトハ定理二十三ヨリシテ容易ニ證明セラル。



今 O−ABC, O′−A′B′C′ ノ體積ヲ夫々 V, V′ トシ,假リニ V>V′ ナリトセヨ。

先ツ O−ABC ニ於テ其底面 ABC ヲ最モ下ナル底トシ其ヨリ順次ニ今作リタル ($n-1$) 個ノ截リ口ヲ下ノ底トシ, OA ニ平行ナル稜ヲ有スル $n$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,此等ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S トスレバ, S>V ナルコト明カナリ。

次ニ O′−A′B′C′ ニ於テハ今作リタル ($n-1$) 個ノ截リ口ヲ悉ク上ノ底トシ, O′A′ ニ平行ナル側稜ヲ有スル ($n-1$) 箇ノ三角壔ヲ作リ,此等ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S′ トスレバ, V′>S′ ナルコト明カナリ。

依ツテ　　S−S′>V−V′

ナル關係ヲ得。然ルニ此等ノ三角壔ハ兩三角錐ニ於テ上ヨリ順次ニ第一ハ第一ト等シク,第二ハ第二ト等シク,以下同樣ニ第 ($n-1$) ハ第 ($n-1$) ト等シ。

故ニ S−S′ ハ O−ABC ノ方ニアル最下ノ三角壔 ABC−EFG ニ等シ。

故ニ　　三角壔 ABC−EFG>V−V′.

サテ OA ヲ等分スル數 $n$ ガ大ナレバ大ナル程三

角壔 ABC−EFG ノ高サガ小トナルヲ以テ,此三角壔ノ體積ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得ベキモノナリ。然ルニ上ノ結果ニヨレバ其ハ一定量 $V-V'$ ヨリ大ナリトイフ,コレ不合理ナリ。

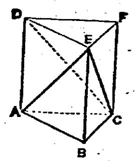
故ニ $V$ ハ $V'$ ヨリ大ナルコトヲ得ズ。

又同樣ノ證明ニヨリ $V<V'$ ナルコトヲ得ズ。

故ニ　　$V=V'$　ナラザル可ラズ。

**定理三十二。** 一ツノ三角壔ハ相等シキ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得。

**(特述及ビ證明)** 三角壔 ABC−DEF ヲ二ツノ平面 ACE, DCE ニテ截レバ,三ツノ三角錐 E−ABC, E−ADC, E−FCD ヲ得。




而シテ三角錐 E−ADC ト E−FCD トニ於テ,高サハ何レモ E ヨリ平面 ACFD ニ至ル距離ニシテ,又其底面 ADC, FCD ハ相等シ。故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シ。

次ニ三角錐 E−ABC ト E−FCD 卽チ C−DEF トニ於テ,高サハ何レモ平面 ABC ト DEF トノ間ノ距離ニシテ,又其底面 ABC, DEF ハ相等シ。

故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シキ體積ヲ有ス。

カクシテ角壔 ABC−DEF ハ相等シキ體積ヲ有スル



三ツノ三角錐 E−ABC, E−FCD, C−DEF ニ分タル。

**系1.** 三角錐ノ體積ハ其底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

**系2.** 任意ノ角錐ノ體積ハ其底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

## 22. 多面體ノ體積

一般ニ任意ノ多面體ノ體積ヲ求ムルニハ,先ヅ若干ノ適當ナル平面ニヨリテ其多面體ヲ幾ツカノ角壔及ビ角錐ニ分チ,ソノ各ノ體積ヲ上述ノ理ニヨリテ求メ,コレラヲ合計シテ求ムル全體積ヲ得ルモノトス。

### 例　題

1. 一邊ノ長サ $a$ 寸ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ。

2. 一邊ノ長サ $a$ 寸ナル正六角形ヲ底面トシ,高サ $2a$ 寸ナル六角錐ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ,但シ頂點ヨリ底面ニ下シタル垂線ノ足ガ底面ノ對角線ノ交點ニアルモノトス。

3. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ之ニ對スル稜ヲ其二面角ノ兩面ノ比ニ分ツ。

**定義。** 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキ,其截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭角錐**トイフ。

**4.** 截頭角錐ノ體積ヲ V, 其兩底面積ヲ夫々 $a$, $b$, 又其高サヲ $h$ トスレバ,

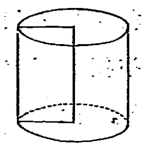
$$V=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

# 第三編
# 曲面體

## 第一章　直圓壔及ビ直圓錐

### 23. 直圓壔

**定義。** **直圓壔**トハ矩形ヲ其一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシムル時生ズル體ナリ。

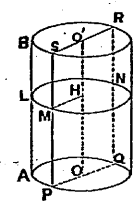


回轉ノ軸トシタル邊ヲ其直圓壔ノ**軸**トイヒ,之ニ對スル邊ヲ**母線**トイフ。母線ノ回轉ニ依ツテ生ズル曲面ヲ直圓壔ノ**側面**,軸ニ隣ル二邊ノ回轉ニヨリテ生ズル二ツノ圓ヲ**底面**ト云ヒ,其半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**ト云フ。又軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**ト云フ。

**定理三十三。** 直圓壔ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截リタル截リ口ハ底面ト合同ナル圓ナリ。

(特述) APQ−BSR ヲ直圓壔, OO′ ヲ其軸, LMN ヲ底面 APQ 又ハ BSR ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口トセバ, LMN ハ底面 APQ 又ハ BSR ト合同ナル圓ナルコトヲ證明セントス。

(證明) 截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲ M, 截リ口ト軸トノ交リヲ H トシ, 又 M ヲ過ル母線ヲ PMS トス。



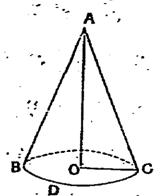

截リ口ト底面トハ互ニ平行ナルヲ以テ, MH ハ PO ニ平行ナリ。

又 PS ハ母線ナルヲ以テ OO′ ニ平行ナリ。

故ニ POHM ハ平行四邊形ニシテ, MH=PO. 卽チ截リ口ノ周ノ上ノ點ト H トノ距離ハ常ニ直圓壔ノ半徑ニ等シク,且コレラノ點ハ悉ク同一平面上ニ在リ。故ニ截リ口ハ底面ト合同ナル圓ナリ。

## 24. 直圓錐

**定義.** 直圓錐トハ直角三角形ヲ其直角ニ隣ル一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシムル時生ズル體ナリ。




回轉ノ軸トシタル一邊ヲ直圓錐ノ軸トイヒ,斜邊ヲ母線トイフ。

直圓錐ノ軸ニ垂直ナル面ハ一ツノ圓ニシテ之ヲ底面トイヒ,軸ト母線トノ交點ヲ頂點ト云フ。

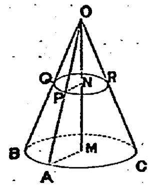
軸ノ長サヲ直圓錐ノ高サト云ヒ,母線ノ長サヲ斜高トイフ。



**定理三十四。** 直圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截リタル截リ口ハ圓ナリ。

(特述) O−ABC ヲ直圓錐, OM ヲ其軸, PQR ヲ底面ニ平行ナル截リ口トスレバ, PQR ハ圓ナルコトヲ證明セントス。

(證明) 截リ口ト軸トノ交リヲ N トシ,又截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲ P トス。




P ヲ過ル母線ヲ OPA トスレバ, PN ト AM トハ互ニ平行ナルヲ以テ,

$$PN:AM=ON:OM.$$

之ニ依ツテ見レバ, PN ト底面ノ半徑トノ比ハ常ニ一定ニシテ ON:OM ニ等シ。卽チ截リ口ノ周上ノ點ハ悉ク N ヨリ等距離ニアリ,且同一平面上ニアリ。故ニ截リ口ハ N ヲ中心トスル圓ナリ。

## 25. 曲面體*ノ體積及ビ表面積

曲面體ノ表面上ニスベテノ頂點ヲ有スル一ツノ多面體ヲ考ヘ,ソノ頂點ノ數ヲ漸次ニ增シテ其多面體ノ表面トモトノ曲面體ノ表面トガスベテノ點ニ

*曲面體トハ其表面ノ全部又ハ一部ガ曲面ナル立體ナリ。

於テ限リナク相接近スル樣ニスルトキ,其多面體ノ體積及ビ表面積ノ數値ハ一般ニ各或ル一定ノ値ニ限リナク接近スベシ。其値ヲ以テ夫々モトノ曲面體ノ體積及ビ表面積ノ數値トス。

例ヘバ直圓壔ニ於テ,ソノ底面ニ內接スル正$n$邊形ヲ作リ,之ヲ底面トシモトノ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作レバ,邊數$n$ヲ限リナク增大スルニ從ッテ此直角壔トモトノ直圓壔トハ其表面ガスベテノ點ニ於テ限リナク相接近ス。依ッテ此直角壔ノ體積及ビ表面積ノ數値ヲ考フレバ之ヨリシテ直圓壔ノ體積及ビ表面積ノ數値ヲ得。

サテ直角壔ニ於テハ,底面ノ面積及ビ周ヲ夫々A及ビ$p$,高サヲ$h$トスレバ,其體積及ビ側面積ハ夫々$Ah$及ビ$ph$ナリ。然ルニ今$n$ヲ限リナク增大スレバA及ビ$p$ハ夫々直圓壔ノ底面ノ面積及ビ周トナルヲ以テ,ソノ半徑ヲ$r$トスレバ

$$A=\pi r^2, \qquad p=2\pi r$$

ナリ。之ヲ上ノ結果ニ代入スレバ直圓壔ノ體積V及ビ曲面積* Sヲ得ルコト次ノ如シ:

$$V=\pi r^2 h, \qquad S=2\pi rh.$$

* 曲面體ノ表面ノ中曲面ナル部分ノミノ面積ヲ其<u>曲面積</u>トイフ。



同樣ノ考ニヨリ,直圓錐ノ底ノ半徑ヲ$r$,高サヲ$h$,斜高ヲ$l$トスレバ,其體積V及ビ曲面積Sハ次ノ式ニヨリテ求メラル:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad S=\pi rl.$$

## 例 題

**1.** 高サ8寸,底面ノ半徑6寸ナル直圓錐ノ體積及ビ曲面積ヲ求メヨ。

**2.** 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ。

**3.** 底面ガ半徑1尺ナル圓ニシテ,高サガ2尺ナル直圓壔ノ曲面積及ビ體積ヲ求ム。

**定義。** 直圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキ,其截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ<u>截頭直圓錐</u>トイフ。其截リ口トモトノ底面トヲ共ニ其截頭直圓錐ノ底面トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲ其<u>高サ</u>トイヒ,又兩底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲ其<u>斜高</u>トイフ。

**4.** 截頭直圓錐ノ兩底ノ半徑ヲ$a$及ビ$b$,高サヲ$h$,斜高ヲ$l$トスレバ,其體積V及ビ曲面積Sハ次ノ式ニヨリテ求メラル:

$$V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2), \qquad S=\pi l(a+b).$$

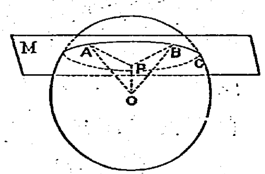
## 第二章 球

### 26. 基本性質

**定義。** <u>球</u>トハ半圓ヲ其直徑ヲ軸トシテ一周回轉セシムルトキ生ズル體ナリ。特ニ其表面ノミヲ考フルトキハ之ヲ<u>球面</u>トイフ。

回轉シタル半圓ノ中心ヲ球ノ<u>中心</u>トイフ。中心ヨリ球面上ノ一點ニ至ル距離ハスベテ相等シキモノニシテ之ヲ球ノ<u>半徑</u>トイヒ,又球ノ中心ヲ過リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ<u>直徑</u>トイフ。

**定理三十五。** 一球面ト一平面トガ相交ルトキハ,ソノ交リハ一ツノ圓周ナリ。




(特述及ビ證明) O ヲ中心トスル球面ト平面 M トガ少クモ一點 A ヲ共有シタリトス。

モシ A ノ他ニナホ共有點アリトセバ之ヲ B トシ,又中心 O ヨリ平面 M ニ垂線 OP ヲ下セバ,其足 P ハ A 又ハ B ト合スルコトナシ。何トナレバモシ例ヘバ A ト P トガ相合ストセバ,OB ハ球ノ半徑ニシテ OA ト相等シキガ故ニ,從ツテマタ垂線 OP トモ相等シキコトトナリ,B モ亦 P ト



相合スベク,結局此球面ト平面トハ唯一點ノミヲ共有スルコトトナレバナリ。サテ △APO ト △BPO トニ於テ

OA=OB, OP ハ共通, ∠OPA=∠OPB=R∠.

故ニ兩三角形ハ合同ニシテ, AP=BP. 逆ニマタ平面 M 上ニ P ヨリ AP ニ等シキ距離ニ一點 B ヲトレバ, OB=OA ニシテ從テ B ハ此球面上ニアルコトモ容易ニ證明セラル。故ニ球面ト平面トハ一ツノ圓周ニ於テ相交ル。

モシ球面ト平面 M トガ A ヨリ他ニ點ヲ共有セザルトキハ,兩者ハ相交ルトイハズ。又其場合ニハ P ハ A ト一致スルコト明カナリ。

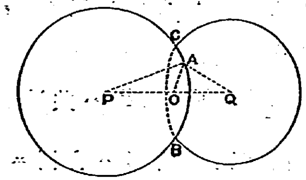
**定義。** 與ヘラレタル球面(又ハ球)ト唯一點ノミヲ共有スル平面ヲ其球面(又ハ球)ノ<u>切平面</u>トイヒ,其一點ヲ<u>切點</u>トイフ。

**系。** 球ノ切平面ハ其切點ニ引キタル半徑ニ垂直ナリ。

**定理三十六。** 二ツノ球面ガ相交ルトキハ,其交リハ一ツノ圓周ナリ。

**(特述)** P 及ビ Q ヲ中心トスル二ツノ球面ノ交リ

ヲ ABC トスレバ, ABC ハ一ツノ圓周ナルコトヲ證明セントス。




(證明) 兩球面ノ交リノ上ノ任意ノ一點ヲ A トシ, 今 A ハ直線 PQ 上ニアラズトス。然ルトキハ △PAQ ノ三邊ハ A ノ位置ニ關ラズ一定ナルヲ以テ, A ヨリ PQ ニ垂線 AO ヲ下セバ AO ハ一定ニシテ,又 O ハ定點ナリ。

故ニ交リノ上ノ總テノ點ハ定點 O ヨリ一定ノ距離ニ在リ,而シテソレラノ點ハ悉ク O ヲ過リテ PQ ニ垂直ナル一平面上ニ在リ。

故ニ兩球ノ交リハ O ヲ中心トスル一ツノ圓周ナリ。

モシ A ガ直線 PQ 上ニアルトキハ,兩球面ハ唯此點ノミヲ共有スルコトモ容易ニ證明セラル。此場合ニハ兩球面ハ相交ルトイハズ。

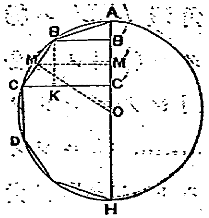
**定義.** 二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ,兩球面(又ハ兩球)ハ相切ストイフ。此場合ニ一方ノ球ガ他ノ球ノ外ニアルトキハ兩球ハ互ニ外切ストイヒ,一方ガ他ノ内部ニアルトキハ互ニ内切ストイフ。



## 27. 球ノ表面積及ビ體積

球ノ表面積及ビ體積ヲ求ムルニモ矢張第25節ノ原理ニヨルコトヲ得。然レドモ其表面積ヲ求ムルニ當リ球ノ内部ニ之ニ近キ多面體ヲ作リテ考ヲル代リニ既ニ表面積ノ知ラレタル他ノ曲面體ヲ用フルモ妨ナキヲ以テ,ココニハ便宜上次ノ如キ方法ニヨルコトトス。

今 O ヲ中心トシ,半徑 $r$ ナル半圓 ABC……H ガ AH ヲ軸トシテ一周回轉スルモノトシ,其生ズル球ノ表面積ヲ求メントス。




半圓周 ABC……H ヲ $n$ 等分シ,ソノ分點ヲ B, C, D, ………… トシ,コレラノ點ヨリ AH ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 B′, C′, D′, ……… トスレバ,此半圓ノ回轉ニ伴ヒテ三角形 ABB′, 梯形 B′BCC′ 等ハ夫々一ツノ直圓錐又ハ截頭直圓錐ヲ生ズ。コレラノスベテノ體ノ曲面積(弦 AB, BC, ……… 等ノ回轉ニヨリテ生ズル曲面積)ノ和ヲ求メ,然ル後 $n$ ナル數ヲ限リナク增大スト考フレバ,之ニヨリテ求ムル所ノ球ノ表面積ヲ得ベシ。

今其中ノ一ツナル梯形$B'BCC'$ニツイテ考フルニ，其曲面積ハ第 61 頁例題4ニヨリ$\pi.BC(BB'+CC')$ナリ。依ツテ今$BC$ノ中點$M$ヨリ$AH$ニ垂線$MM'$ヲ下セバ，此曲面積ハ$2\pi.BC.MM'$ナリ。

今$OM$ヲ結ビ，又$B$ヨリ$CC'$ニ垂線$BK$ヲ下セバ，

$$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'.$$

從ツテ
$$\frac{BC}{MO}=\frac{BK}{MM'}=\frac{B'C'}{MM'},$$

故ニ
$$BC.MM'=MO.B'C'.$$

之ニヨツテ上記ノ曲面積ハマタ$2\pi.MO.B'C'$ト書キ直サル。

他ノ梯形ニツイテモ同樣ノコトガイハル。又三角形$ABB'$ハ梯形ノ平行ナル邊ノ一ツガ零トナリタル特別ノ場合ト考フレバ矢張同樣ノ結果ヲ得。而シテコレラノ結果ニ於テ$MO$ノ長サハ弦$AB$, $BC$, ……… 等ニツイテスベテ同一ナリ，依ツテ之ヲ$r'$トスレバ，結局多角形$ABC……H$ノ回轉ニヨリテ生ズル曲面積ハ

$$\begin{aligned}&2\pi r'.AB'+2\pi r'.B'C'+\ldots\ldots\\&=2\pi r'(AB'+B'C'+\ldots\ldots)\\&=2\pi r'.AH\\&=4\pi r'r\end{aligned}$$

トナル。



ココニ於テ$n$ヲ限リナク增大スレバ$r'$ハ球ノ半徑$r$ニ限リナリ接近ス，依ツテ次ノ定理ヲ得。

**定理三十七。** 半徑$r$ナル球ノ表面積ハ$4\pi r^2$ナリ。

次ニ半徑$r$ナル球ノ體積ヲ求メンニ，先ヅスベテノ頂點ガ此球面上ニアル一ツノ多面體ヲ考ヘ，ソノ各面ノ面積ヲ夫々$A_1$, $A_2$, ……… トシ，又中心$O$ヨリコレラノ面ニ下セル垂線ノ長サヲ夫々$r_1$, $r_2$, ……… トスレバ，此多面體ハ$O$ヲ共通ノ頂點トシ各面ヲ底面トスル角錐ノ集マリタルモノト考ヘラルヽガ故ニ，其全體積ハ

$$\frac{1}{3}r_1A_1+\frac{1}{3}r_2A_2+\ldots\ldots\ldots$$

ナリ。(定理三十二系 2)

ココニ於テ多面體ノ頂點ノ數ヲ限リナク增大シ，且其全表面ガ球面ニ限リナク接近スル樣ニスレバ，$r_1$, $r_2$ ……… 等ハスベテ球ノ半徑$r$ニ限リナク接近シ，又$A_1+A_2+$……… ハ球ノ表面積卽チ$4\pi r^2$ニ限リナク接近ス。

故ニ球ノ體積ハ$\frac{1}{3}r.4\pi r^2$卽チ$\frac{4}{3}\pi r^3$ナリ。

**定理三十八.** 半徑 $r$ ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ナリ。

例 題

1. 半徑8尺ナル球ト體積相等シクシテ底面ノ半徑7尺ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

2. 球ノ體積ハ之ニ外切スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。

3. 半徑 $r$ ナル球面ヲ二ツノ平行ナル平面ニヨリテ截ルトキ,其二平面ノ間ノ距離ヲ $h$ トスレバ,其間ニ挾マレタル球面ノ部分ノ面積ハ $2\pi rh$ ナリ。

# 補充問題

## 第一 直線及ビ平面

1. 一直線ヲ含ミ之ト平行ナル平面ニ平行ナル平面ヲ作ルコトヲ求ム。

2. 一定點ヲ過ギリ與ヘラレタル平面ニ平行ニシテ且一ツノ定直線ニ交ルベキ直線ヲ引ケ。

3. 互ニ平行ナル二平面ノ間ニ夾マルル線分ノ中點ノ軌跡如何。

4. 前題ニ於テ其線分ヲ定比 $m:n$ ニ分ツ點ノ軌跡如何。

5. 一ツノ平面ヲPトシ,AB, CDヲ互ニ平行ナラズ且Pニモ平行ナラザル空間ノ定直線トス。今二ツノ平面ヲ作リ,其一ツハABヲ含ミ,他ノ一ツハCDヲ含ミ,且其交リノ直線ガPノ上ニ在ル樣ニセヨ。

6. 一定點ヲ過リ與ヘラレタル平面ニ平行ナル直線ノ軌跡如何。

7. 平面外ノ一點ヨリ其平面ニ引ケル斜線ノ中,垂線ト相等シキ角ヲナスモノハ相等シ。又相等シカラザル角ヲ爲スモノノ中,大ナル角ヲ爲スモノガ小ナル角ヲ爲スモノヨリ大ナリ。

8. 前題ノ逆モ亦眞ナリ。

9. 一平面ニ平行ナル直線ガ其平面上ニ投ズル正射影ハ其直線ニ平行ナリ。

10. 直線ガ一平面ニ垂直ナルトキハ其正射影如何。

11. 一ツノ定直線ニ垂直ナル直線ガ其直線ヲ軸トシテ廻轉スルトキハ,一ツノ平面ヲ作ル。

12. 一直線ガ互ニ平行ナル平面ノ各トナス角ハ相等シ。

13. 三角形 ABC ノ垂心 O ヨリ其平面ニ垂線 OP ヲ引ケバ,直線 PA ハ A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ニ垂直ナリ。

14. 一點ニ於テ相交ル三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナルトキハ,其二ツヅツヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ。

15. 一直線ガ一平面上ノ三直線ト等シキ角ヲナストキハ,其直線ハ其平面ニ垂直ナリ。

16. 直交スル二直線ノ一ツガ一平面ニ平行ナラバ,其二直線ガ其平面上ニ投ズル正射影ハ直交スル二直線ナリ。但シ二直線ノ中ノ他ノ一ツハ其平面ニ垂直ナラザルモノトス。

17. 與ヘラレタル一平面ニ交ル與ヘラレタル一ツノ斜線アリ,其足ヲ過ギリテ其斜線ニ垂直ナル直線ヲ其平面上ニ引ケ。

18. 平面外ノ一點ヨリ其平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

19. 一ツノ平面上ノ直線ガ他ノ平面上ニ投ズル其正射影トナス鋭角ノ中,二ツノ平面ノ交リニ垂線ナル直線ノ爲ス角即チ二面角ヲ度ル平面角ガ最大ナリ。



20. 同一ノ點ニ於テ出會ヒ同一ノ平面上ニ在ラザル三ツノ直線アリ,其交點ヲ過リ三ツノ直線ト相等シキ角ヲナス一ツノ直線ヲ引クコトヲ求ム。

21. 平面外ノ有限直線ヲ常ニ直角ニ見ル如キ此平面上ノ點ノ軌跡ヲ求ム。

22. 三面角ノ各二面角ヲ二等分スル平面ハ一ツノ直線ニ於テ交ル。

23. 或線ガ二ツノ相交ル平面ニ投ズル正射影ガ直線ナルトキハ其線ハ或一ツノ場合ヲ除ク他ハ常ニ直線ナリ。其例外ナル一ツノ場合ヲ示セ。

24. 三定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

25. 二ツノ相交ル直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

26. 二ツノ相交ル平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

27. 三面角ノ三ツノ面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

28. 一ツノ平面 P, 及ビ P ノ同ジ側ニアル二點 A, B アリ, P ノ上ニ一點 C ヲ取リ AC ト CB トノ和ガ最小ナル様ニセヨ。

29. 前題ニ於テ A, B ガ P ノ反對ノ側ニアルトキ, AC, CB ノ差ガ最大ナル様ニセヨ。

30. 與ヘラレタル平面ヨリ與ヘラレタル距離ニ在リ,且三定點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

31. 與ヘラレタル一直線ヲ過ギリ且二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ニ在ル平面ヲ作レ。

32. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面ノ平面角ノ二等分線トヲ含ム三ツノ平面ハ一ツノ直線ニ於テ交ル。

33. 與ヘラレタル平面上ニ於テ其平面外ノ二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

34. 二ツノ定平面ヨリ等距離ニアリ且二ツノ定點ヨリモ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

35. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

36. 多面角ノ一ツノ平面角ハ他ノ總テノ平面角ノ和ヨリモ小ナリ。

37. 一定點 P ヨリ一ツノ平面ニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ一平面ト交ラシメ,其交點ト P トノ距離ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

38. 一平面外ノ一定點ヨリ此平面上ニ於テ一定點ヲ通過スル直線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム。

39. 二ツノ與ヘラレタル平面ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

40. 四定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

41. 一ツノ圓アリ,其平面外ノ與ヘラレタル點ヨリ此圓ノ周ニ至ル最大及ビ最小ナル線分ヲ引ケ。

42. AB ハ圓ノ直徑ナリトス,其一端 A ニ於テ其圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ其上ノ一點ヲ P トシ,圓周上ノ一點ヲ Q トセバ,平面 PAQ, PBQ ハ互ニ垂直ナリ。



43. 一邊 $a$ ナル正三角形 ABC ヲ A ヨリ BC ヘノ垂線ニ沿フテ折リ $60^\circ$ ノ二面角ヲ作ルトキ,B ト C トヲ結ブ直線ト頂點 A トノ距離如何。

44. 與ヘラレタル二直線ニ交ハリ,且與ヘラレタル一平面ニ垂直ナル直線ヲ作レ。

45. 直徑 AB ナル半圓周上ノ任意ノ一點ヲ C トシ,A ヨリ圓ノ平面ニ垂線 AP ヲ立テ之ヲ弦 BC ニ等シク取レバ,△PBC ト △PAB トハ全等ナリ。

46. 水平面上ニ垂直ニ立テル二本ノ棒アリテ其高サハ等シカラズトスレバ,此平面上ニ於テ各ノ棒ヲ見ル視角(仰角)ガ相等シキ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

47. 矩形ノ紙 ABCD アリ, AB ハ四尺, BC ハ三尺ナリ,今之ヲ對角線 AC ニ沿ヒテ折リ平面 ABC ト CDA トヲ互ニ垂直ナラシメタルトキ, B,D ノ距離ヲ計算セヨ。

48. 二平面 M 及ビ N ガ與ヘラレタルトキ,所設ノ點 A ヲ通過シテ N ニ平行ニシテ M ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引ケ,

49. 二ツノ點 A, B ヨリ一ツノ平面 P ニ垂線 AX, BY ヲ引キ其足ヲ夫々 X, Y トス,今直線 AB ニ垂直ナル平面ヲ作リ P ト直線 LM ニ於テ交ラシムレバ, LM ハ XY ニ垂直ナリ。

50. 一定點ヨリ同一ノ直線ヲ過ルスベテノ平面ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

## 第二　多面體

51. 正四面體ノ高サハ其足ヨリ一ツノ面ニ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ。

52. 直六面體ノ對角線ハ皆相等シ。

53. 四ツノ對角線ガ相等シキ平行六面體ハ直六面體ナリ。

54. 平行六面體ノ對角線ノ交點Oヲ過ギリ其相對スル平行二面ニテ終ル線分ハOニ於テ二等分セラル。

55. 二ツノ相似多面體ノ比ハ相對應スル稜ノ比ノ三乘比ニ等シ。

56. 三角錐ノ相對スル一双ノ稜ニ平行ナル平面ニヨリテノ截リ口ハ平行四邊形ナリ。

57. 角壔ノ總テノ側稜ト交ル多クノ截リロノ中,直截面ハ最小ナル面積ヲ有ス。

58. 四面體ノ一角頂ニ於ケル平面角ガ皆直角ニシテ其頂點ニ於ケル三稜ガ相等シキトキハ,底面ノ上ノ任意ノ一點ヨリ他ノ三面ニ下シタル垂線ノ和ハ一定ナリ。

59. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ通過スル三ツノ直線ハ一點ニ於テ相交ル。

60. 四面體ノ各頂點ト之ニ對スル面ノ重心トヲ結ブ四線分ハ同一ノ點ヲ通過シ,且此點ニ於テ互ニ1:3ナル比ニ分タル。



**定義.** 此點ヲ四面體ノ重心ト云フ。

61. 立方體ノ一面ヲ底トシ其對角線ノ交點ヲ頂點トスル角錐ハ立方體ノ六分ノ一ニ等シ。

62. 等高ナル二ツノ角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニシテ其底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其截リロノ面積ハ兩底面ノ面積ニ比例ス。

63. 正四面體ノ頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ハ底面ノ重心ヲ通過ス。

*64. 正四面體ノ相對スル稜ハ各直交ス。

65. 立方體ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リロガ正六角形トナル樣ニセヨ。

66. 三角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ其分タレタル二部分ノ體積ヲシテ相等シカラシメントス,其截リロノ位置如何。

67. 正四面體ノ一邊ガ1尺ナルトキ其高サヲ求メヨ。

68. 一定點ヲ過ギリテ與ヘラレタル正四面體ヲ二等分スル平面ヲ引ケ。

69. 四面體ノ内ニ一點ヲトリ,之ヲ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ四面體ノ體積ヲ相等シカラシメントス,其點ノ位置ヲ求ム。

70. 四面體ノ六ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ相對スル稜ノ

中點ヲ結ブ三線分ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ。

71. 角錐ノ底面ニ平行ナル二ツノ截リ口ノ面積ノ比ハ頂點ヨリ其截リ口マデノ距離ノ二乘比ニ等シ。

72. 一邊ノ長サ1尺ナル正八角形ヲ底トシ各側稜ト高サトガ互ニ30度ノ角ヲナス角錐ノ體積ヲ計算セヨ。

73. 一稜ノ長サ$a$ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求ム。

74. 上ニ開キタル直六面體ノ箱アリ,底面ノ二邊ハ6寸及ビ5寸ニシテ深サ8寸ナリ。今底面ノ5寸ノ邊ヲ水平面上ニ置キ底面ヲ水平面ト30°ノ角ヲナスマデ箱ヲ傾ケテ之ニ水ヲ充滿セシムレバ,其水ノ量幾立方寸ナルカ。

75. 同一平面上ニアラザル二直線XX′, YY′アリ,今XX′上ニ相等シキ二線分AB, A′B′ヲ取リ,又YY′上ニモ相等シキ二線分CD, C′D′ヲ取ルトキハ,二ツノ四面體A−BCD, A′−B′C′D′ハ其體積相等シ。

## 第三 曲面體

76. 球ノ面積ハ之ニ外切スル直圓壔ノ曲面積ニ等シ。

77. 球ノ面積ハ之ニ外切スル直圓壔ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シ。

78. 半徑$r$ナル球ニ內接スル正四面體ノ稜ノ長サヲ計算セヨ。



79. 矩形ノ二ツノ相隣レル邊ノ長サヲ$a, b$トシ,其各ノ邊ヲ軸トシテ此矩形ヲ一周廻轉シテ生ズベキ二ツノ直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。又其體積ノ比ヲ求メヨ。

80. 同一ノ球面ニ於テ,其中心ヲ過ル三ツノ平面ニヨリテノ截リ口ナル三ツノ圓周ハ互ニ他ヲ二等分ス。

**定義.** 球ノ中心ヲ過ル平面ニヨリテノ截リ口ヲ**大圓**トイヒ,中心ヲ過ラザル平面ニヨリテノ截リ口ヲ**小圓**トイフ。

81. 二ツノ直圓壔ノ曲面ノ面積ガ相等シキトキハ其體積ハ其半徑ニ比例ス。

82. 空間ニ於テ二定點ニ至ル距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡如何。

83. 底ノ周8寸8分ニシテ高サ2寸7分ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム;但シ圓周率ヲ$\frac{22}{7}$トシテ計算セヨ。

84. 定長ナル線分ノ兩端ガ一ツノ球面上ニ在ルトキハ,其線分ト球ノ中心トノ距離ハ一定ナリ。

85. 半圓周ヲ三等分シ其直徑ノ周リニ之ヲ廻轉セシムレバ,其中央ノ弧ニヨリテ生ズル球ノ部分ノ面積ハ他ノ二ツノ弧ニヨリテ生ズルモノノ和ニ等シ。

86. 半徑6寸斜高1尺ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

87. 球面外ノ一點ヨリ其球ニ至ル切線ハ相等シ。

88. 一直線ヲ過ギリ球ニ切スル平面ヲ作レ。

89. 直圓壔ノ高サ1米ニシテ其全面積ハ半徑2米ナル圓ニ等シ,此圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

90. 一直線ヲ過ギリ球ヲ截ル平面ヲ作リ其截リ口ノ半徑ヲシテ定長ナラシメヨ。

91. 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ヲ畫ケ。

92. 直圓壔ノ側面積ガ 169.56 平方米ニシテ其直徑ト高サトノ比ガ 3:2 ナリ,此體積ハ幾立方米アルカ。

93. 一直線ト一ツノ球面トノ上ニ夫々一點ヲ求メ,其二點間ノ距離ヲシテ最短ナラシメヨ。

94. 定平面ニ切シ且二定點ヲ過ル球面ハ如何ニシテ作圖スベキカ,但此球ノ半徑ハ一定トス。

95. 鉛ノ球アリ其重サ 99「ポンド」ナリ,其三分ノ一ノ直徑ヲ有スル鉛ノ球ノ重サヲ求ム。

96. 直圓錐ノ頂點 S ヲ通ジテ截面 SAB ヲ作リ, ∠ASB ヲシテ與ヘラレタル角 $\alpha$ ニ等シカラシメヨ。

97. 一定直線ヲ含ム平面ニヨリテ定球ヲ截ルトキ,其截リ口ナル圓ノ中心ノ軌跡如何。

98. 球ノ體積トソレニ内接スル立方體ノ體積トノ比ハ

$$\pi : \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ナリ。

99. 直圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截リ,其側面積ヲ二等分セヨ

100. 與ヘラレタル球面上ノ一定點 O ヲ過ギル任意ノ直線ヲ引キ球面ト再ビ A ニ於テ會セシメ,此直線上ニ一點 A′ ヲ取リ矩形 OA.OA′ ヲ一定ナラシムルトキ,點 A′ ノ軌跡ヲ求ム。

大正十一年十月一日印刷
大正十一年十月四日發行
大正十一年十二月七日修正再版印刷
大正十一年十二月十日修正再版發行

不許複製

中等立體幾何學教科書

定價金貳拾貳錢

大正十二年度臨時定價 金參拾七錢

著者 竹内端三

東京市神田區通神保町一番地
發行者 印刷者 株式會社 三省堂
代表者 神保周藏

東京市神田區三崎河岸十二號地
印刷所 株式會社 三省堂印刷部

發行所 株式會社 三省堂
東京市神田區通神保町一番地
振替東京三一五五五番

數
898