

K220.43

52a

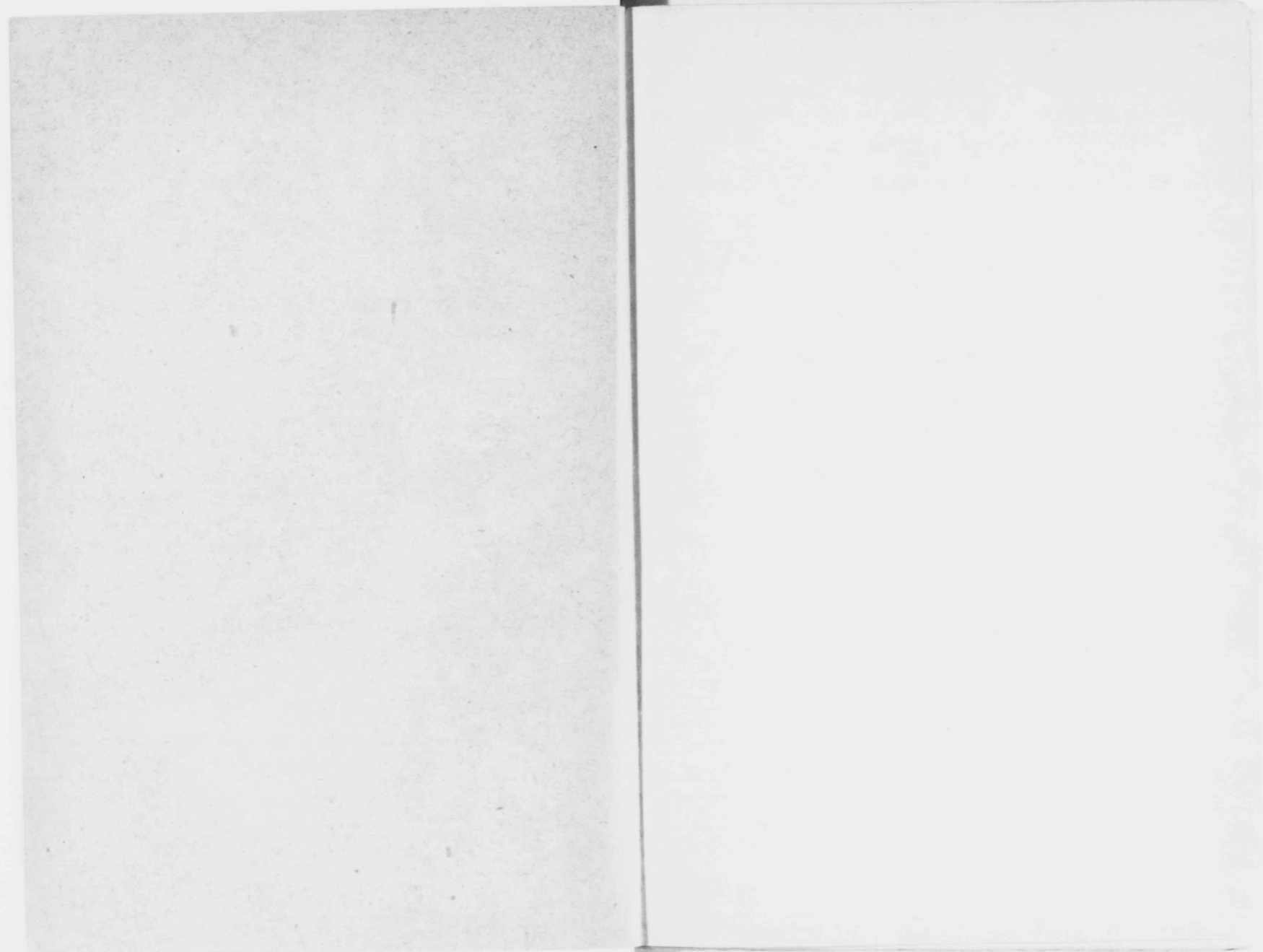


K. NAGASAWA.
NEW TRIGONOMETRY.



K220.43
52a





相模野基線附近第一等三角網圖



海定省部文

一九二三年十二月十一日

NEW TRIGONOMETRY.

K. NAGASAWA.

發行所

會社式國定教科書共同販賣所

新三角法教科書

長澤龜之助編纂

大正版

圖網角三等一近附線基野模相



文 部 省 檢 定 濟

大 正 三 年 十 二 月 十 一 日

NEW TRIGONOMETRY.

K. NAGASAWA.

長澤龜之助編纂

大正版

新三角法教科書

發 行 所

會 社 式 國 定 教 科 書 共 同 販 賣 所

序

本書ハ中學校、其ノ他中等教育程度ノ學校ノ教科用ニ充テシガ爲ニ、曩ニ編纂シタルモノヲ、本年七月文部省制定ノ教授要目ニ據リ改訂セルモノナリ。而シテ其ノ編纂ノ大要ハ次ノ如シ。

1. 教授上の經驗に基づきて改良したり。

余曾テ中等教育平面三角法教科書ヲ著ハスヤ、廣ク全國各學校ニ採用セラレ、教授ノ任ニ當ラルル教員諸君ハ、該書ノ内容ニ就キテ意見ヲ送致セラレシモノ尠ナカラズ、余ハ自身ノ經驗ト、是等諸君ノ意見トヲ參酌シ、本書ニ於テハ數層ノ改良ヲ加ヘタリ。殊ニ或角ノ正弦ヲ以テ、半角ノ正弦餘弦ヲ表ハス式ノ如キハ、現今ノ中學生ニ稍困難ナリトノ意見、各教員殆ンド一致セルヲ以テ、之ヲ本文ニ省キテ附録復習雜題ニ譲レリ。

2. 實測圖を掲げたり。

卷首ニ掲ゲタル三角網圖、及ビ本文終ノ基線ノ長サ

ハ、特ニ陸地測量部長ノ認可ヲ經タルモノニシテ、本版ニハ更ニ同部員ニ囑シテ訂正セリ。其ノ他、三角形解法ノ應用ノ中ノ密畫[淺草凌雲閣、九段西南記念碑]ノ如キハ故東京府第四中學校教諭松本富五郎君ガ本書ノ爲ニ實地ニ就キ寫生セラレシモノニ係ル其ノ他第七編中ノ測量圖ハ悉ク想像圖ヲ改メテ實景寫生圖トナセリ。又某局技師ハ其ノ自身ニ測量セラレシ結果ヲ寄贈セラレシガ、多クハ本書ノ例ニハ繁ニ過ルヲ以テ、其ノ簡單ナル一例ヲ掲ゲタリ[磐城國相馬郡云云]。

3. 對數表のこと。

數ノ對數表、三角函數ノ對數表、及ビ三角函數表ハ本書中ニ之ヲ附録セリ、然レドモ亦別ニ新對數表ヲ編纂出版セリ、コレ一見重複ニ涉ルガ如シト雖モ、教員諸君ノ意見ニ様ニ分レ、一派ハ本書ニ附録スルコトヲ主張セラレ、一派ハ一層精密ナル表[がうす程度位、但中學ニ不必要ナル表ハ省ク]ヲ別冊トセンコトヲ主張セラレ、各一理アルニ依リ、余ハ双方ノ希望ニ合センガ爲ニ略表ヲ本書ニ附録シ、又一層精密完全ナル表ヲ別冊トセリ、其ノ何レヲ取ララルカハ教員諸君ノ便宜ニ任ス。

4. 公式一覽表のこと。

公式一覽表ノ必要ナルハ、三角法ニ於テ特ニ然リ故ニ本書ニ之ヲ附載セリ。

5. 本文の簡明なること。

本書ノ本文ハ、舊著ニ比スレバ一層簡明ナリ、故ニ本文ニテ不足ノ場合ニハ復習雜題ヨリ取リテ補ヘバ可ナリ。

6. 復習雜題のこと。

復習雜題ハ本文問題ノ不足ヲ補ハング爲ニ、又ハ補習科ナドニテ課センガ爲ニ、本文ノ順序ニ從ヒテ問題ヲ配置セリ、復習雜題ハ管ニ本文問題ノ不足ヲ補フノミナラズ、亦本文ノ説明ニ補足センガ爲ニ、三角形ノ性質、逆三角函數、三角方程式、等ヲ増補セリ、是等ハ中學ヲ卒業シテ、尙高等ノ學校ニ受験セントスル學生ノ爲ニ便益ナラシメンコトヲ期セリ。

7. 試験問題のこと。

試験問題ハ最近十五ケ年間[特ニ昨年今年ハ多ク]ニ涉リテ、中學卒業生ヲ收容セントスル諸官立學校ノ入學試験箋ヨリ收録シタリ、但本文ノ順ニ類別セルユエ、便宜必要ノ場所ニ挿入シテ教授スルコトヲ得ベシ。

8. 計算の結果に驗^{ケン}を行ふこと.

三角形解法ノ結果ハ、驗ヲ行フコト極メテ必要ナリ。故ニ本書ニハ一コレヲ示セリ。

本書ヲ教科ニ採用セラルル諸君ハ、本書ノ爲ニ批評忠言ヲ示サレンコトヲ切望ス。

明治四十四年十月

編者識ス

大正版序

本版ニ於テハ全編ヲ通ジテ誤植ヲ正シ、且問題ノ答ヲ調査シテ之ヲ正セリ、尤モ對數表ニ關スル答ハ一分飛ノ表[同著者ノ新對數表]ニ合セ置キタルユエ、本書卷末ノ十分飛ノ略表ヲ用ヒラルルトキハ、末位ニ少差アルコト勿論ナリ。其ノ他、陸地測量ノ基線ノ新設セラレシモノヲ補入セリ。

編者識ス

大正三年九月

目 次

緒 論	...	1- 2.
第一編	銳角ノ三角函數...	3- 15.
第二編	直角三角形ノ解法	16- 29.
第三編	任意ノ角ノ三角函數	30- 44.
第四編	複角ノ三角函數...	45- 57.
第五編	三角形ノ性質	58- 65.
第六編	三角形ノ解法	66- 80.
第七編	三角形解法ノ應用	81- 95.
附 錄	對數...	96- 98.
	對數表用法	99-103.
	三角函數ノ對數表用法	104-105.
	三角函數表用法	106.
附 表	1-20.0ノ五桁ノ對數表	108-111.
	十分飛ノ三角函數ノ對數表	112-117.
	十分飛ノ三角函數表	118-120.

補習問題 121-171.

緒論之部	122-123.
弧度法	124-126.
銳角ノ三角函數	127-130.
直角三角形	131-135.
任意ノ角ノ三角函數	136-138.
複角ノ三角函數	139-145.
分角ノ三角函數	146-150.
三角形ノ性質	151-153.
三角ノ性質[本文ノ續]	154-158.
三角形ノ解法	159-160.
三角形解法ノ應用[本文ノ續]	161-167.
逆三角函數	168-169.
三角方程式	170-171.

希臘文字 172.

試驗問題 173-223.

測角法	175.
對數表	176.
銳角ノ三角函數	177-179.
直角三角形ノ解法及 π 應用	180-185.
般角ノ三角函數一	186-187.
複角ノ三角函數	188-193.
倍角分角ノ三角函數	194-200.
三角形ノ性質	201-203.
三角形ノ解法	204-207.
形解法ノ應用角三書	208-216.
方程式	217-223.
逆三角函數	221.
消去法	222-223.

補 簡易測量術 224-235.

問題ノ答 236-251.

公式一覽表 252-271.

新三角法教科書



緒 論

1. 三角法 三角法トハ角ノ三角函數ト名ヅクルモノノ性質及ビ關係ヲ代數學的ニ論究シ兼テ之ヲ三角形ノ解法ニ應用スルニアリ。

2. 測角法 角ハ任意ノ單位ヲ以テ測ルコトヲ得可シ。

例ヘバ幾何學ニ於テ三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ナリト云ヘルハ直角ヲ單位トシタルナリ、其ノ他、如何ナル角ヲモ測角ノ單位ニ取ルコトヲ得レドモ、實際ニハ六十分法ヲ用フ。

3. 六十分法 直角ヲ九十ニ等分シテ其ノ一部ヲ度ト稱シ、一度ヲ六十ニ等分シテ其ノ一部ヲ分、一分ヲ六十ニ等分シテ其ノ一部ヲ秒ト稱フ。

度分秒ノ記號ハソレゾレ $^{\circ}$, $'$, $''$ ナリ。

例ヘバ $43^{\circ} 29' 50''$ ハ四十三度二十九分五十秒ナルガ如シ。

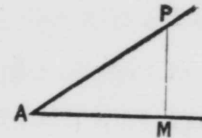
例題

1. 直角ノ二分ノ一、三分ノ一、四分ノ一、五分ノ一、六分ノ一ハ、ソレゾレ幾度ノ角ナルカ。
2. $67^{\circ} 23' 40''$ ヲ秒ニ直セ。
3. $57398''$ ヲ度分秒ニテ示セ。
4. $97^{\circ} 5' 15''$ ヲ直角ノ小数ニテ示セ。
5. 49° ヲ直角ノ小数ニテ示セ。
6. 直角ノ 0.2875 ヲ度分秒ニテ示セ。
7. 直角ノ 1.704535 ヲ度分秒ニテ示セ。
8. 4 時及ビ 5 時 30 分ノ間ニ時計ノ兩針ハ角ノ幾度ヲ廻轉スルカ。
9. 正五角形ノ一角ハ幾度ナルカ。
10. 正多角形ノ一角ガ 120° ナルトキハ、其ノ邊數如何。

第一編

銳角の三角函數

4. 銳角 A ノ一邊ノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取り、之ヨリ他ノ邊ヘ垂線 PM ヲ引クトキハ、



比 $\frac{PM}{AP}$, 即チ $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ ヲ角 A ノ正弦ト稱シ, $\sin A$ ト記ス。

比 $\frac{AM}{AP}$, 即チ $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ ヲ角 A ノ餘弦ト稱シ, $\cos A$ ト記ス。

比 $\frac{PM}{AM}$, 即チ $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ ヲ角 A ノ正切ト稱シ, $\tan A$ ト記ス。

比 $\frac{AM}{PM}$, 即チ $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ ヲ角 A ノ餘切ト稱シ, $\cot A$ ト記ス。

比 $\frac{AP}{AM}$, 即チ $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ ヲ角 A ノ正割ト稱シ, $\sec A$ ト記ス。

比 $\frac{AP}{PM}$, 即チ $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ ヲ角 A ノ餘割ト稱シ, $\csc A$ ト記ス。

但垂線ハ恒ニ角ニ對シ、底邊ハ角ノ頂點ト垂線ノ趾トノ間ノ線分ニシテ、斜邊ハ直角ニ對スルコトヲ注意ス可シ。

上文ヨリ見レバ

餘割正割餘切はそれぞれ正弦餘弦正

切の逆數なり。

5. 三角函數 角ノ三角函數トハ、其ノ角ノ正弦餘弦正切餘切正割餘割ノ六ツヲ云フ*。

6. 例ヘバ角 BAC ヲ A トシ、其ノ一邊 AC ノヒニ P, P' ノ如キ任意ノ點

ヲ取リ、他ノ一邊 AB へ垂線 PM, P'M' ヲ引キ、

又 AB ノ上ニ任意ノ點

P'' ヲ取リ、之ヨリ他ノ一邊 AC へ垂線 P''M'' ヲ引クトキハ相似三角形 APM, AP'M', AP''M'' = 依リテ

$$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''},$$

而シテ此ハ何レモ $\sin A$ ナルヲ以テ、 $\sin A$ ハ角ノ邊ノ長サニ關係ナキコト明カナリ、然レドモ若シ角 A、即チ BAC ガ變ジテ BAC' トナルトキ、QN ヲ AB ニ垂直ナリトセバ $\sin BAC' = \frac{QN}{AQ}$ トナル、而シテ此ハ前ノ値ニ等シカラザルコトヲ容易ニ知り得可シ。

此ノ理ハ他ノ三角函數ニ就キテモ亦同様ナリ。

故ニ 三角函數は唯その角の大さのみに關係し、邊の長さには關係なきなり。

* 角ノ三角函數ハ亦圓函數、或ハ三角比トモ稱ス。

例題

1. 直角三角形 ABC ニ於テ、B ハ直角、AB=15、及ビ BC=8 ナルトキ各銳角ノ正弦餘弦正切ヲ問フ。
2. 直角三角形 ABC ニ於テ、C ハ直角、AC=12、及ビ AB=13 ナルトキ角 A ノ三角函數悉皆ヲ求メヨ。
3. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ 25:24:7 ナルトキ最小角ノ三角函數ヲ問フ。

7. 三角函數相互の間の關係 4 款ヨリ

$$\sin A = \frac{PM}{AP}, \quad \cos A = \frac{AM}{AP}, \quad \tan A = \frac{PM}{AM},$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AP}{PM}, \quad \sec A = \frac{AP}{AM}, \quad \cot A = \frac{AM}{PM},$$

$$\text{故ニ、} \sin A < \tan A < \sec A, \quad \cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \operatorname{cosec} A &= \frac{PM}{AP} \cdot \frac{AP}{PM} = 1 \\ \cos A \cdot \sec A &= \frac{AM}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} = 1 \\ \tan A \cdot \cot A &= \frac{PM}{AM} \cdot \frac{AM}{PM} = 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{又} \quad \left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{AP} \div \frac{AM}{AP} = \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{AM}{PM} = \frac{AM}{AP} \div \frac{PM}{AP} = \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

幾何學ニ依リ $PM^2 + AM^2 = AP^2 \dots \dots (A)$

ナルユエ $\left(\frac{PM}{AP}\right)^2 + \left(\frac{AM}{AP}\right)^2 = 1,$

即チ $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1,$

之ヲ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots \dots (4)$

ト記スルヲ常トス.

又 (A) ヨリ $1 + \left(\frac{PM}{AM}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AM}\right)^2,$

及ビ $1 + \left(\frac{AM}{PM}\right)^2 = \left(\frac{AP}{PM}\right)^2,$

即チ $\left. \begin{aligned} 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$

(1) チ大小關係ト命ジ, (2) チ二重關係, (3) チ三重關係, (4), (5) チ平方關係ト命ズルトキハ, 次ノ圖ヨリ記憶スルコトヲ得可シ, 之ヲ三角比ノ六角形 [Ratio-hexagon] ト云フ.

即チ三角函數ヲ順次ニ $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \operatorname{cosec}$.

トニツヅツ水平ニ列ベテ六角

形ノ角頂ニ書き, 其ノ中心ニ 1 チ書クト

キハ, 左右兩側ニ於テ下ルホド値ヲ増ス

[大小關係] 又各對角線ノ兩端ニアルニツ

ノ積ハ中心ニアル數, 即チ 1 ニ等シ [二重關係], 次ニ連續セル三

ツノ函數ニ就キテ, 一端ノモノハ中間ノモノチ他端ノモノニテ

除シタルニ等シ [三重關係]. 終ニ同ジ水平線上ニテ相隣レル二

數ノ平方ノ和ハ, 其ノ下ニテ中間ニアル數ノ平方ニ等シ. 但以上

各函數ハ同ジ角ニ就キテ云ヘルコト勿論ナリ. 又 (2), (3), (4), (5)

ノ八式ハ悉ク獨立セルモノニアラズ, 概シテ平方關係ノ任意ノ

一ツト, 他ノ關係ノ任意ノ四ツトヨリシテ, 殘ノ三ツヲ誘求スル

コトヲ得可シ.



8. 或角ノ三角函數ノ一ノ値ヲ知レルトキ, 他ノ總テノ値ハ, 前款ノ公式 (2) 乃至 (5) ヨリ求メ得ベシ.

例 1. $\tan A = \sqrt{3}$ ナルトキハ,

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + 3 = 4,$$

$$\therefore \sec A = 2.$$

而シテ $\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{2}.$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

又 $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

注意 六ツノ三角函數ノ中, 三ツハ他ノ三ツノ逆數ナルユエ, 互ニ逆數ヲナサザル三ツヲ知レルトキハ, 他ハ直チニ之ヲ得ベキヲ以テ, 以後往往之ヲ求ムルコトヲ略スルコトアリ.

例 2. $\sin A = s$ ヲ知レルトキハ,

公式 (4) ヨリ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - s^2,$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - s^2}.$$

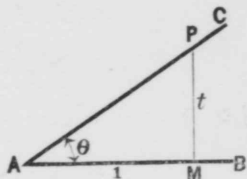
又公式 (3) ヨリ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}.$

注意 上例ハ解析的ニ求ムル法ナレドモ, 亦圖解ニ依リテ求メ得可シ, 次ニ之ヲ示サン.

例 3. $\tan\theta = t$ ヲ知レルトキハ,
角 $BAC = \theta$ トシ, AB 上ニ一點 M ヲ取リ, $AM=1$ ナラ
シメ, M 於テ AB ニ垂線 MP ヲ作り, $AC = P$ ニ於
テ交ラシムレバ

$$t \cdot \sin\theta = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{1} = t$$

ナルユニ $PM=t$ ナルコト明カ
ナリ.



然ルトキハ $AP^2 = AM^2 + PM^2 = 1 + t^2$,

而シテ $\sin\theta = \frac{PM}{AP} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

及ビ $\cos\theta = \frac{AM}{AP} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

注意 三角函数ノ一ヲ知リテ他ノ總テヲ求ムル
公式ハ, 學生自ラ之ヲ作レ.

例 題

○ 4. $\sin A = \frac{3}{5}$ ヲ知リテ $\tan A$ 及ビ $\operatorname{cosec} A$ ヲ求メヨ.

○ 5. $\cos B = \frac{1}{3}$ ヲ知リテ $\sin B$ 及ビ $\cot B$ ヲ求メヨ.

○ 6. $\sec\theta = 4$ ヲ知リテ $\cot\theta$ 及ビ $\sin\theta$ ヲ求メヨ.

○ 7. $\sec A = \frac{m^2+1}{2m}$ ナルトキ他ノ三角函数ハ如何.

$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$

○ 8. $\sec A = \frac{13}{5}$ ナルトキ $\frac{2\sin A - 3\cos A}{4\sin A - 9\cos A}$ ノ値ヲ求メヨ.

○ 9. $\sin A - \cos A = 0$ ナルトキ $\operatorname{cosec} A$ ノ値ヲ求メヨ.

○ 10. $\sin\theta = a$, 及ビ $\tan\theta = b$ ナルトキ $(1-a^2)(1+b^2) = 1$ ヲ

證セヨ.

9. 7 款ノ公式 (2) 乃至 (5) ヲ用ヒテ, 三角函数
ヲ含ム式ヲ變形シ, 又ハ二式ガ恒等ナルコトヲ證明
シ得可シ.

例 1. $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ ヲ $\cos\theta$ ノ項ニテ表ハセ.

$$\begin{aligned}\sin^4\theta + \cos^4\theta &= (1 - \cos^2\theta)^2 + \cos^4\theta \\ &= (1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) + \cos^4\theta \\ &= 1 - 2\cos^2\theta + 2\cos^4\theta.\end{aligned}$$

例 2. $(1 + \tan A)^2 + (1 - \tan A)^2 = 2\sec^2 A$ ヲ證セヨ.

$$\begin{aligned}(1 + \tan A)^2 + (1 - \tan A)^2 &= (1 + 2\tan A + \tan^2 A) + (1 - 2\tan A + \tan^2 A) \\ &= 2 + 2\tan^2 A \\ &= 2(1 + \tan^2 A) \\ &= 2\sec^2 A.\end{aligned}$$

例 3. $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$ ヲ證セヨ.

$$\begin{aligned}\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A &= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A} \\ &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A \sin^2 A}$$

$$= \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A.$$

例 4. $(\sin A - \cos B)(\sin A + \cos B) = (\sin B - \cos A)(\sin B + \cos A)$

ヲ證セヨ.

$$(\sin A - \cos B)(\sin A + \cos B) = \sin^2 A - \cos^2 B,$$

$$\text{又 } (\sin B - \cos A)(\sin B + \cos A) = \sin^2 B - \cos^2 A$$

$$= (1 - \cos^2 B) - (1 - \sin^2 A)$$

$$= \sin^2 A - \cos^2 B.$$

故ニ 所題ノ等式ハ成立ス.

例 5. $\frac{\sec A - 1}{\tan A} = \frac{\tan A}{\sec A + 1}$ ヲ證セヨ.

$$\text{公式(5)ヨリ } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A,$$

$$\text{故ニ } \sec^2 A - 1 = \tan^2 A,$$

$$\text{即チ } (\sec A - 1)(\sec A + 1) = \tan^2 A,$$

$$\text{故ニ } \frac{\sec A - 1}{\tan A} = \frac{\tan A}{\sec A + 1}.$$

例 6. $\frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \cot \beta$ ヲ證セヨ.

$$\frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \beta - \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\frac{1}{\cot \beta} - \frac{1}{\tan \alpha}}$$

$$= \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \alpha \cot \beta}}$$

$$= \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{1} \times \frac{\tan \alpha \cot \beta}{\tan \alpha - \cot \beta}$$

$$= \tan \alpha \cot \beta.$$

例題

11. 次ノ各式ヲ $\cos \theta$ ノ項ニテ, 又 $\sin \theta$ ノ項ニテ表ハセ.

$$\heartsuit (1) \cos^4 \theta - \sin^4 \theta. \quad \heartsuit (2) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2.$$

$$\heartsuit (3) 1 - \tan^4 \theta. \quad \heartsuit (4) \sin^6 \theta + \cos^6 \theta.$$

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ [12 乃至 30].

$$\heartsuit 12. \sin A \cot A = \cos A. \quad \heartsuit 13. \cot A \sec A \sin A = 1.$$

$$\heartsuit 14. (1 - \sin^2 A) \sec^2 A = 1. \quad \heartsuit 15. \sec A \cot A = \operatorname{cosec} A.$$

$$\heartsuit 16. (1 - \cos^2 A)(1 + \tan^2 A) = \tan^2 A.$$

$$\heartsuit 17. \sin A \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1} = \cos A.$$

$$\heartsuit 18. \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1. \quad \heartsuit 19. \frac{\sin A \cot^2 A}{\cos A} = \frac{1}{\tan A}.$$

$$\heartsuit 20. \tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

恒等式ヲ證明スルニハ通例ハ 9 款例 2, 或ハ例 6 ノ如ク左邊ヲ變形シテ右邊トナスニアレドモ, 亦例 3 ノ如ク右邊ヲ變形シテ左邊トナスモ, 或ハ例 4 ノ如ク恒等式ノ兩邊ヲ變形シテ同ジ形トナスモ, 又ハ例 5 ノ如ク證明セントスル恒等式ヲ既知ノ關係ヨリ誘致スルモ, 證明ニ於テ嚴正ヲ缺ク所ナン.

21. $\sec\theta - \tan\theta \sin\theta = \cos\theta$,
 22. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$,
 23. $\cos^2 A (\sec^2 A - \tan^2 A) + \sin^2 A (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A) = 1$,
 24. $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = 2 \sec^2 A$,
 25. $\frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \cdot \frac{1 + \cot^2 A}{\cot^2 A} = \sin^2 A \sec^2 A$,
 26. $\frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$,
 27. $\tan^4 A = \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) - \sec^2 A}{(\sin^2 A + \cos^2 A) - \operatorname{cosec}^2 A}$,
 28. $\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = (\sec A - \tan A)^2$,
 29. $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = (\tan\theta + \sec\theta)^2$,
 30. $\cot^2\theta \frac{\sec\theta - 1}{1 + \sin\theta} + \sec^2\theta \frac{\sin\theta - 1}{1 + \sec\theta} = 0$.

10. 餘角 任意ノ鋭角ヲ直角ヨリ引キ去リタ

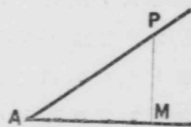
ル殘リヲ其ノ餘角ト云フ。例ヘバ 30° ノ角ノ餘角ハ 60° ノ角ニシテ、 θ ノ餘角ハ $90^\circ - \theta$ ナルガ如シ。サテ

$$\cos A = \frac{AM}{AP} = \sin APM = \sin(90^\circ - A),$$

$$\cot A = \frac{AM}{PM} = \tan APM = \tan(90^\circ - A),$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AP}{PM} = \sec APM = \sec(90^\circ - A)$$

ナルヲ以テ



或角ノ餘弦ハ其ノ餘角ノ正弦に等シ。

或角ノ餘切ハ其ノ餘角ノ正切に等シ。

或角ノ餘割ハ其ノ餘角ノ正割に等シ。

或ハ逆ニ次ノ如ク述ブルモ可ナリ。

或角ノ正弦ハ其ノ餘角ノ餘弦に等シ。

或角ノ正切ハ其ノ餘角ノ餘切に等シ。

或角ノ正割ハ其ノ餘角ノ餘割に等シ。

11. 45° の角の三角函數

Cヲ直角トスル二等邊三角形ABC

ヲ取ルトキハ幾何學ニ依リ

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\
 &= \sqrt{2 \cdot AC^2} = \sqrt{2} \cdot BC \\
 &= \sqrt{2} \cdot AC = \sqrt{2} \cdot BC,
 \end{aligned}$$

故ニ

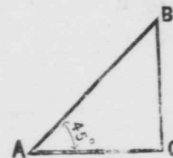
$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1.$$

從ヒテ

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2},$$



$$\sec 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\cot 45^\circ = 1.$$

12. 60° 及び 30° の角の三角函数

正三角形 ABC を取り、BC = 垂線

AD を引クトキハ、幾何學ニ依リテ

$$BD = \frac{1}{2}AB, AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

依リテ $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ,$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3} = \cot 30^\circ.$$

從ヒテ $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ,$

$$\sec 60^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 30^\circ,$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ.$$

例 1. $\sin A = \cos A$ ナルトキ A ノ値ヲ求ム.

$$\sin A = \cos A$$

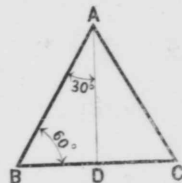
ナルヲ以テ $\tan A = 1,$

$$\therefore A = 45^\circ.$$

例 2. $\cos 2A = \sin 7A$ ナルトキ A ノ値ヲ求ム.

$$\cos 2A = \sin 7A$$

ナルヲ以テ $\sin(90^\circ - 2A) = \sin 7A,$



故ニ

$$90^\circ - 2A = 7A,$$

$$\therefore A = 10^\circ.$$

例題

次ノ各方程式ニ適スル角ノ値ヲ見出セ

[31 乃至 36].

31. $2\cos\theta = \sec\theta.$ 32. $3\tan\theta = \cot\theta.$

33. $\sec 5A = \operatorname{cosec} A.$ 34. $\cot A = \tan A.$

35. $\sin 2A = \cos 4A.$ 36. $2\sin A = \operatorname{cosec} A.$

次ノ各式ノ數値ヲ求メヨ [37 乃至 40].

37. $\tan^2 60^\circ + 2\tan^2 45^\circ.$

38. $\cot 60^\circ \tan 30^\circ + \sec^2 45^\circ.$

39. $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ.$

40. $3\tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}\sec^2 45^\circ - \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ.$

次ノ各式ヲ證明セヨ [41 乃至 45].

41. $\frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\sec 60^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

42. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ + \tan 60^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ + \cot 30^\circ.$

43. $\frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = (\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ)^2.$

44. $\sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) = \sin A.$

45. $\frac{\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A}{\cot(90^\circ - A)} \cdot \frac{\cot A}{\sec^2 A} = \sec^2(90^\circ - A) - 1.$

第二編

直角三角形の解法

13. 三角形ハ凡テ三ツノ邊ト三ツノ角トノ六ツノ部分ヨリ成ル、此ノ中、任意ノ三ツ[三ツガ角ノミノ場合ヲ除ク]ヲ知ルトキハ、他ノ三ツヲ定メ得可シ、此ノ法ヲ三角形ノ解法ト稱ス。

本編ニテハ直角三角形ノ解法ノミヲ論ズ。

直角三角形ニ於テハ、既ニ一ツノ角ガ直角ナルヲ以テ他ノ五ツノ中、二ツ[角ノミノ場合ヲ除ク]ヲ知レバ、他ノ三ツヲ定メ得可シ。

依リテ直角三角形ノ解法ニ四ツノ場合アリ、次ノ如シ。

- I. 斜邊ト一銳角トヲ知レルトキ。
- II. 直角ヲ夾ム一邊ト一銳角トヲ知レルトキ。
- III. 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊トヲ知レルトキ。
- IV. 直角ヲ夾ム二邊ヲ知レルトキ。

14. ABCハCヲ直角トスル三角形ナリトシ、角A, B, Cニ對スル邊ヲソレゾレ a, b, c トス。

I. 斜邊 $[c]$ 、及ビ一銳角 $[A]$

ヲ知レル場合。

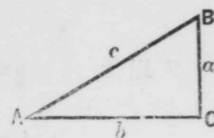
此ノ場合ニハ

$$B = 90^\circ - A,$$

及ビ

$$a = c \sin A,$$

$$b = c \cos A.$$



例 $c=8, A=60^\circ$ ナルトキ B, a 、及ビ b ヲ求ム。

茲ニ

$$B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

又 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ナルヲ以テ

$$a = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

$$b = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

II. 一銳角 $[B]$ 、及ビ直角ヲ夾ム一邊 $[a]$ ヲ知レル場合。

此ノ場合ニハ

$$A = 90^\circ - B,$$

及ビ

$$b = a \tan B,$$

$$c = \frac{a}{\cos B}.$$

例 $B=23^\circ 30', a=575$ ナルトキ A, b 、及ビ c ヲ求ム。

茲ニ

$$A = 90^\circ - 23^\circ 30' = 66^\circ 30'.$$

又三角函數表ヨリ $\tan 23^\circ 30' = .4348,$

$$\cos 23^\circ 30' = .9171$$

ナルヲ以テ $b = 575 \times .4348 \div 250.$

$$c = \frac{575}{0.9171} \div 627.$$

III. 斜邊 [c], 及ビ直角ヲ夾ム一邊 [b] ヲ知レル場合.

此ノ場合ニハ $\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$

而シテ $a = c \sin A.$

例 $b = 15, c = 27$ ナルトキ B, A 及ビ a ヲ求ム.

$$\sin B = \frac{b}{c} = \frac{15}{27} = .5556$$

ニシテ, 三角函數表ヨリ

$$\sin 33^\circ 40' = .5544$$

及ビ $\sin 33^\circ 50' = .5568$

ナルヲ以テ $10'$ ノ差 = .0024,

而シテ $\frac{\sin B}{\sin 33^\circ 40'} = \frac{.5556}{.5544} = \frac{12}{12}$

ナルヲ以テ $24 : 12 = 10 : x$

ヨリ $x = 5.$

故ニ $B = 33^\circ 40' + 5' = 33^\circ 45',$

從ヒテ $A = 90^\circ - 33^\circ 45' = 56^\circ 15',$

又

$$\begin{array}{r} \sin 56^\circ 20' = .8323 \\ \sin 56^\circ 10' = .8307 \\ \hline 16 \end{array}$$

ナルヲ以テ $10 : 5 = 16 : x$

ヨリ $x = 8,$

故ニ $\sin A = \sin 56^\circ 15'$

$$= .8307 + .0008$$

$$= .8315$$

ナルヲ以テ $a = c \sin A = 27 \times .8315$

$$= 22.45.$$

注意 此ノ場合ニハ $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ ヨリ a ヲ求ムルモ可ナリ.

IV. 直角ヲ夾ム二邊 [a, b] ヲ知レル場合.

此ノ場合ニハ $\tan A = \frac{a}{b}$

ヨリ A ヲ求メ, 而シテ $B = 90^\circ - A,$

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

例 $a = 24, b = 56$ ナルトキ A ヲ求ム.

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{24}{56} = .4286$$

ニシテ $\tan 23^\circ 10' = .4279$

及ビ $\tan 23^\circ 20' = .4314$

ナルヲ以テ $10'$ ノ差 = .0035.

而シテ

$$\begin{aligned}\tan A &= .4286 \\ \tan 23^\circ 10' &= .4279 \\ &\quad \quad \quad \frac{7}{7}\end{aligned}$$

ナルヲ以テ

$$35:7=10:x$$

ヨリ

$$x=2.$$

故ニ

$$A=23^\circ 10' + 2' = 23^\circ 12'.$$

例題

Cヲ直角トセル三角形ABCニ於テ、次ノ各ヲ與ヘテ、其ノ他ノ部分ヲ求メヨ。[1乃至8].

1. $c=18, A=30^\circ.$
2. $c=8, a=4\sqrt{3}.$
3. $B=45^\circ, a=25.$
4. $a=3\sqrt{2}, b=\sqrt{6}.$
5. $b=12, A=42^\circ 10'.$
6. $b=37, a=50.$
7. $c=16, B=38^\circ 20'.$
8. $c=2000, b=287.$
9. 三角形ABCニ於テ $BC=50, B=30^\circ, C=120^\circ$ ナルトキ、頂點Aヨリ底BCニ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ。

10. 前題ニ於ケル三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

15. 高さ及び距離の測定の簡易なる場合 高さ及び距離ヲ測量スル簡易ナル場合ニ直

角三角形ノ法ヲ應用スルコトヲ得可シ。此ノ目的ニ入用ノ主ナル器械ハ測鎖、經緯儀、及ビ六分儀ナリ。

測鎖ハ距離ヲ測ルニ用ヒラレ、經緯儀及ビ六分儀ハ角ヲ測ルニ用ヒラル。

今先ヅ之ニ關スル二三ノ定義ヲ示サントス。

鉛垂線 トハ重錘ヲ吊シタル絲ヲ自由ニ釣下セルモノヲ云フ。

垂直線 トハ鉛垂線ノ向キノ直線ヲ云フ。

垂直面 トハ垂直線ヲ含ム平面ヲ云フ。

水平面 トハ垂直線ニ直角ナル平面ヲ云フ。

水平線 トハ水平面上ノ直線ヲ云フ。

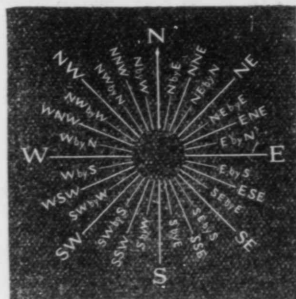
水平角 トハ角ノ二邊ガ水平面上ニアルモノヲ云フ。

垂直角 トハ角ノ二邊ガ垂直面上ニアルモノヲ云フ。

垂直角ノ一邊ガ水平ナルモノニ於テ、他ノ一邊ガ上ニ向ウトキハ之ヲ**仰角**ト稱シ、下ニ向ウトキハ之ヲ**俯角**ト云フ。仰角ハ亦時トシテハ**高度**ト稱ス。

航海用羅針盤 トハ磁針ヲ裝置セル圓盤ヨリ

成ルモノニシテ,全面ヲ三十二方位ニ分ツ,而シテ北
ヲ基トシ,ソレヨリ
時計ノ針ノ廻ルト
同ジ方ニ廻ルトキ
ノ方位ヲ順次ニ記
スレバ次ノ如シ.



北, 北微東,
北北東, 北東微北,

北東, 北東微東, 東北東, 東微北, 東, 東微南,
東南東, 南東微東, 南東, 南東微南, 南南東, 南微東,
南, 南微西, 南南西, 南西微南, 南西, 南西微西,
西南西, 西微南, 西, 西微北, 西北西, 北西微西,
北西, 北西微北, 北北西, 北微西.

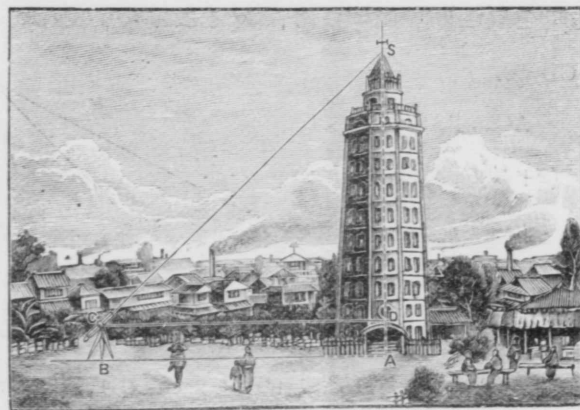
測地用羅針盤 モ亦磁針ヲ裝置セル圓盤ヨリ
成リ,東西南北ノ四方位ヲ記シ,全面ヲ 360° ニ分チ,南
北兩點ヨリ左右ヘ各 90° ニ至ル數字ヲ記ス.

16. 應用問題

例 1. 水平面上ニ立テル近ヅキ得可キ塔ノ高サ
ヲ測定スルコト.

測定セントスル高サヲ AS トシ,塔ノ趾ヨリ高サ
AS ト大差ナキ適宜ノ長サ AB ヲ測リ,經緯儀ノ中心
ガ丁度點 B ノ上ニアル様ニ置キ,角 SCD ヲ測ル,然ル
トキハ直角三角形 SCD ニ於テ,邊 $CD=AB$, 及ビ一角
ヲ知ル. 故ニ $SD=CD \tan SCD$, 之ニ經緯儀ノ高サ CB
ヲ加フレバ塔ノ高サ h ヲ得ルコト次ノ如シ.

$$h = CD \tan SCD + CB.$$



今前圖ヲ東京淺草ノ凌雲閣トシ, $AB=240$ 尺, 經緯
儀ノ高サヲ 4 尺, $\hat{SCD}=42^\circ$ ナリトセバ,三角函數表ヨ
リ

$$\tan 42^\circ = 0.9004$$

ナルヲ以テ $h = 240 \text{ 尺} \times 0.9004 + 4 \text{ 尺} \doteq 220 \text{ 尺}.$

注意 本例ノ如ク器械ニテ觀測シタル結果ニ,測

器ノ高サヲ加フルコトハ恒ニ之ニ準ズベシ。

故ニ下ノ例ニ於テハ、測器ノ高サヲ加フルコトハ、之ヲ略ス。

例 2. 或塔ヲ其ノ正西ニ當ル兩地ヨリ觀測セシニ仰角 45° 及ビ 30° ヲ得タリ、今觀測セシ兩地ノ距離ヲ 40 尺トセバ、塔ノ高サ如何。

塔ノ高サヲ BC 、觀測セシ兩地ヲ A, D トセバ $AD=40^R$, $\hat{BAC}=30^\circ$, $\hat{BDC}=45^\circ$. 又 $BC=x^R$ トスレバ

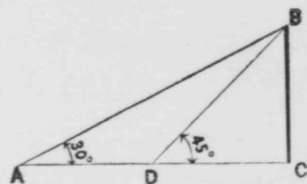
$$CD=x,$$

$$AC \tan BAC = BC,$$

$$\text{即チ } (x+40) \tan 30^\circ = x,$$

$$\text{即チ } (x+40) \frac{1}{\sqrt{3}} = x,$$

$$\text{之ヨリ } x = 20(\sqrt{3}+1)^R.$$



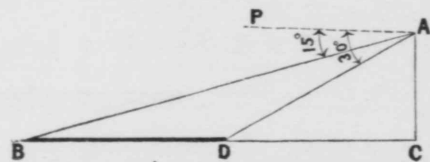
例 3. 高サ 300 尺ノ斷崖ノ上ヨリ、正北ニ當ル二船ヲ觀測セシニ、俯角 15° 及ビ 30° ヲ得タリ、然ラバ此ノ二船ノ距離如何。但 $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ トス。

$AC=300^R$ ヲ斷崖;

B, D ヲ二船ノ位

置トシ、 $\hat{PAB}=15^\circ$,

$\hat{PAD}=30^\circ$ トス。



然ルトキハ

$$CD = AC \tan DAC = 300 \tan 60^\circ = 300\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } BC = AC \tan BAC = 300 \tan 75^\circ = 300(2 + \sqrt{3}),$$

$$\therefore BD = BC - CD = 300^R \times 2 = 600^R.$$

例 4. 一船アリ、7 節半ノ速度ヲ以テ東ヨリ 40° 南ニ偏シテ航行スルトキ、午前 9 時ニ東ヨリ 50° 北ニ偏シテ一ノ港ヲ目撃ス、然ルニ午前 11 時ニ其ノ港ハ北ヨリ 20° 西ニ偏セリト云フ。サレバ各觀測點ニ於ケル船ヨリ港マデノ距離ヲ問フ。

B ヲ港トシ、 A 及ビ C ハ港ヲ觀測セシ船ノ二ツノ位置トス。

A ヲ過リテ東西及ビ南

北ニ走ルニ直線ヲ引クト

キハ $\hat{EAC}=40^\circ$, $\hat{EAB}=50^\circ$,

$\therefore \hat{BAC}=90^\circ$, 又 C ヲ過リ北

ニ向ヒテ CN' ヲ引クトキ

ハ $\hat{BCN'}=20^\circ$, 又 $\hat{ACN'}=\hat{CAS}=90^\circ-40^\circ=50^\circ$,

$$\therefore \hat{ACB}=\hat{ACN'}-\hat{BCN'}=50^\circ-20^\circ=30^\circ.$$

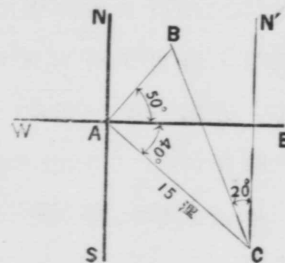
直角三角形 ACB ニ於テ

$$AB = AC \tan ACB = 15 \tan 30^\circ$$

$$= 15 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}, \text{ 即チ } 5\sqrt{3} \text{ 哩.}$$

而シテ

$$BC = AC \sec ACB = 15 \sec 30^\circ$$



$$=15 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}, \text{即チ } 10\sqrt{3} \text{ 哩.}$$

例 題

11. 直立セル樹木アリ、其ノ基底ヲ隔ツル6間ノ地ニ於テ、其ノ頂上ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ、樹木ノ高サ如何。
12. 高サ6尺ノ直立セル棒ノ影ノ長サ $2\sqrt{3}$ 尺ナルトキ、太陽ノ高度如何。
13. 海面ヨリ200尺ノ高サアル燈臺ノ頂上ヨリ二船ノ俯角ヲ測リ、ソレゾレ 45° 、 30° ヲ得タリ、而シテ其ノ方向一ツハ正北ニシテ、一ツハ正南ナリ、二船ノ距離如何。
14. 太陽ノ高度 30° ナルトキ、高サ4間ノ電柱ノ影ヲ問フ。
15. 水上ニ高サ326尺ヲ露出セル岩ノ頂上ヨリ、一端艇ヲ望見セシニ、其ノ俯角 24° ナリキト云フ、然ラバ岩ノ水際ヨリ端艇マデノ距離如何。
16. 塔ト同ジ水平面上ニ立テル高サ30尺ノ樓ノ基底ヨリ、其ノ塔ノ頂ヲ觀測セシニ、仰角 45° ニシテ、此ノ樓上ヨリ、塔ノ頂ノ仰角ハ 30° ナリト云フ、塔ノ高サ

及ビ塔ト樓トノ距離如何。

17. 小山ノ頂上ヨリ、正南ニ方リテ二ツノ隣接シタル一里塚ノ俯角ヲ測リシニ 45° 及ビ 22° ナルトキ、 $\cot 22^\circ = 2.475$ ヲ與ヘテ小山ノ高サヲ求メヨ。
18. 高サ117尺ノ塔ノ頂上ヨリ、高サ37尺ノ家屋ノ頂上ノ俯角ヲ測リ 30° ヲ得タリ、然ラバ塔ト家屋トノ距離如何。
19. 或塔ノ影ヲ測リシニ長サ100尺ナリ、同時ニ高サ9尺ノ電柱ノ影ヲ見タルニ $3\sqrt{3}$ 尺ナリキト云フ、然ラバ太陽ノ高度及ビ塔ノ高サ如何。
20. 眞直ナル川ノ一ノ岸AB上ノ一點Aニ立テル人アリ、對岸ノ點Cヲ望ミ角BACヲ測リシニ 30° ナリ、而シテ彼ハ川ニ沿ヒテ400間進ミBニ至リ、角ABCヲ測リシニ 60° アリキト云フ、然ラバ川幅ハ何程ナルカ。
21. 記念碑ノ高サ200尺ナルモノヲ、同ジ水平面上ニ於テ其ノ仰角ヲ測リ $3^\circ 30'$ ヲ得タリ、然ラバ測點ト碑トノ距離如何。
22. 某所ニ於テ一ノ塔ヲ望見セシニ仰角 $7^\circ 10'$ ナリ、今塔ニ向ヒテ100間進ムトキハ仰角 $30^\circ 20'$ ナリト云フ、然ラバ塔ノ高サ如何。

23. 或人川ノ橋上ニ立チ、橋ニ向ヒテ進行シ來ル川蒸氣船ヲ望見セシニ俯角 $7^{\circ}30'$ ナリ、此ノ人ノ眼ノ高サハ水面上 5 間アリトシ、船ハ毎時ノ速度 54 町ナリトセバ、此ノ船ハ幾時間ニシテ橋ノ下ニ來ルカ。

24. 空中ニ飛揚セル輕氣球ヲ、其ノ正南ナル甲地ニ於テ之ヲ望見セシニ仰角 60° ナリ、同時ニ甲地ヨリ正東 1 里ヲ隔ツル乙地ニテノ仰角ハ 45° ナリキト云フ、輕氣球ノ高サ何程ナルカ。

25. 或海岸ニアル斷崖ノ上ニ高サ 100 尺ノ燈臺アリ、今其ノ斷崖ノ麓ノ海濱ニ於テ、其ノ燈臺ノ頂上ト斷崖ノ頂上トノ仰角ヲ測リソレソレ 75° 、 60° ヲ得タリ、斷崖ノ高サヲ問フ。

26. 眞直ニ立タル棒ノ影ノ長サノ其ノ棒ノ長サニ對スル比ハ $\sqrt{3}:1$ ナリ、今此ノ棒ヲバ其ノ下端ヲ動カサズシテ垂直面上ニ廻轉セシメ、且影ハ恒ニ同一ノ方向ニアル如クセシム、然ラバ影ノ長サガ最初ノ影ノ長サニ等シカルベキトキ、棒ノ水平面トナス角ヲ問フ。

27. 正南ニ航スル船アリ、正西ニ當リニツノ燈臺ヲ望見ス、然ルニ 10 哩ヲ航セシ後ニ、此ノニツノ燈臺ハ北西及ビ西北西ノ方向ニ當レリト云フ、始ノ觀測

ノ位置ヨリニツノ燈臺マデノ距離ヲ問フ。

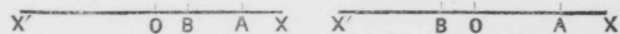
28. 木製ノ二等邊三角形ノ板ヲ、太陽ニ面シテ垂直ニ地上ニ建テ頂點ヲ上方ニス、今三角形ノ底ヲ $2a$ 尺、高サヲ h 尺、太陽ノ高度ヲ 30° トスレバ、三角形ノ影ノ頂角ノ半分ノ正切ハ如何。

第三編

任意の角の三角函数

17. 方向を示すに符號+, -の應用

$X'OAX$ ハ一ノ直線, O ハ其ノ上ノ一定點ニシテ, A ハ點 O ノ右ニ於テ $OA=a$ ナル如キ點トス.



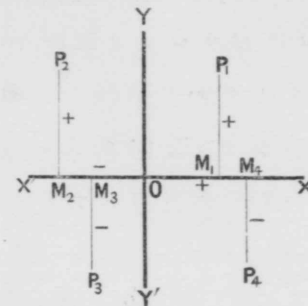
A ヨリ O ノ方ヘ $AB=b$ ヲ度レ. 然ルトキハ $OB=a-b$. サテ若シ $a>b$ ナルトキハ B ハ O ノ右ニアレドモ, 若シ $b>a$ ナルトキハ B ハ O ノ左ニアリ

今 O ヲ原點ト名ヅケ, $x=a-b$ トスルトキハ $a\geq b$, 即チ x ガ正ナルカ, 或ハ負ナルカニ從ヒ, B ハ原點ノ右, 或ハ左ニアリ. 故ニ一ノ方向ニ度リタル距離ヲ正トスレバ, 他ノ方向ニ度リタル距離ヲ負トセザルベカラズ. 今便利ノ爲ニ次ノ規約ヲ設ク.

原點より右方へ度りたる距離を正とし,
原點より左方へ度りたる距離を負とす.

18. O ヲ過リテ $X'OX$ ニ垂線 YOY' ヲ引クトキハ

平面ヲ四ツノ部分 XOY , YOX' , $X'OY'$, $Y'OX$ ニ分チ, ソレゾレ之ヲ第一分面, 第二分面, 第三分面, 第四分面ト名ヅク, 而シテ P ヲ此ノ平面上ノ一點トシ, P ヨリ $X'OX$ ニ垂線 PM ヲ引キ,

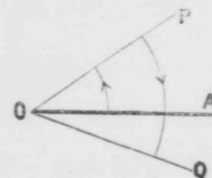
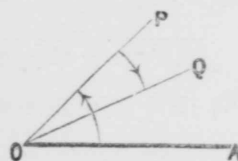


點 P ガ第一第二第三第四分面ニアルニ從ヒ, 添數 1, 2, 3, 4 ヲ以テ區別スルトキハ, OM ノ正負ハ前款ノ規約ノ通りニシテ, 即チ OM_1, OM_2 ハ正, OM_3, OM_4 ハ負ナリ. 又 PM ノ正負ニ關シテハ次ノ規約ヲ設ク.

$X'OX$ の上方の點より引ける垂線は正にして, 下方の點より引ける垂線は負なり.

即チ P_1M_1, P_2M_2 ハ正ニシテ, P_3M_3, P_4M_4 ハ負ナリ.

19. 正角及び負角 OP ガ OA ノ位置ヨリ A



度ノ角ヲ通シテ廻轉シ、以テ生ジタル角ヲ $\angle AOP$ トシ、
 OP ガソレヨリ B 度ダケ後戻リシテ OQ ノ位置ニ至
 ルトキハ $\angle AOQ = A \sim B$.

若シ $A > B$, 即チ $A - B$ ガ正ナルトキハ、圖ニ於テ OQ
 ハ OA ノ上方ニアル可ク、若シ $A < B$, 即チ $A - B$ ガ負
 ナルトキハ、 OQ ハ OA ノ下方ニアルベシ。

若シ B ヲ零ト見レバ、 OP ガ OA ノ位置ヨリ時計ノ
 針ト反對ノ向キニ廻轉シテ生ジタル角ヲ得。又若
 シ A ヲ零ト見レバ、時計ノ針ト同ジ向キニ廻轉シテ
 生ジタル角ヲ得。此ノ二ツノ角ヲ區別スルニハ正
 負ヲ用フ。今 OA ヲ首線、 OP ヲ動徑ト命ズレバ

動徑が首線の位置より、時計の針と反
 對の向きに廻轉して生じたる角を正と
 し、之と反對の向き、即ち時計の針と同じ
 向きに廻轉して生じたる角を負とす。

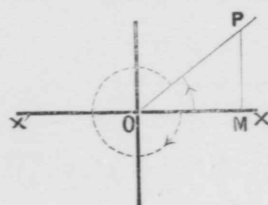
20. 三角函數の定義の擴張

角ノ一邊上ノ任意ノ點ヨリ、他ノ一邊又ハ其ノ延
 線ヘ垂線ヲ引キテ生ズル直角三角形ニ就キテ、4 款
 ノ定義ヲ應用スルコトヲ得可シ、但直角ヲ夾ム二邊

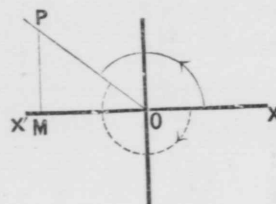
ノ正負ハ 17, 18 款ニ從ヒ、且斜邊ハ恒ニ正ナルモノ
 トス。

今各分面ニ於ケル三角函數ノ正負ヲ説明センニ、
 $\angle XOP$ ハ OP ガ正又ハ負ノ方向ニ廻轉シテ生ジタル
 角トシ、 OX 或ハ XO ノ延線ニ垂線 PM ヲ引ケバ次ノ
 如シ。

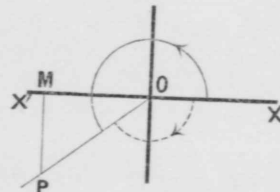
[1 圖]



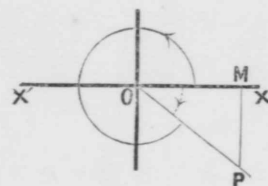
[2 圖]



[3 圖]



[4 圖]



第一分面ニ於テハ總テノ三角函數ハ正ナリ、

第二分面ニ於テハ OM ハ負ニシテ、 PM 及ビ OP ハ
 正ナリ。故ニ正弦ハ正ニシテ、餘弦及ビ正切ハ負ナ
 リ。

第三分面ニ於テハ OM 及ビ PM ハ負ニシテ、 OP ハ正

ナリ。故ニ正弦及ビ餘弦ハ負ニシテ、正切ハ正ナリ

第四分面ニ於テハ OM 及ビ OP ハ正ニシテ、PM ハ負ナリ。故ニ正弦及ビ正切ハ負ニシテ、餘弦ハ正ナリ。今第一分面ヨリ順次ニ各三角函數ノ正負ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ。

分面	一	二	三	四
正弦及ビ餘割	+	+	-	-
餘弦及ビ正割	+	-	-	+
正切及ビ餘切	+	-	+	-

而シテ7款ノ公式(2)乃至(5)ハ皆眞ナリ。

例題

1. 18 款ニ於テ XOX' ヨリ 5 寸, YOY' ヨリ 3 寸ノ距離ニアル點ハ、四ツノ分面ニ於テ、如何ニ區別セラレルカ。

2. 次ノ各角ニ於テ動徑ハ、第何分面ノ中ニアルカ。

280° , 150° , 235° , -100° , 530° ,

-449° , -1020° , 2795° , -870° , 760° .

3. 餘弦ト正切トガ負ナル角ノ動徑ハ、第何分面ニアルカ。又總テノ三角函數ガ負ナル角アルカ。

21. 餘角の定義の擴張 ニツノ角ノ和ガ 90° ナルトキハ、此ノ二ツノ角ヲ互ニ餘角ナリト云フ。

例ヘバ 35° ト 55° トノ二ツノ角ハ互ニ餘角ニシテ又 -30° ト 120° トノ二ツモ亦互ニ餘角ナルガ如シ。

22. 補角 ニツノ角ノ和ガ 180° ナルトキハ、此ノ二ツノ角ヲ互ニ補角ナリト云フ。

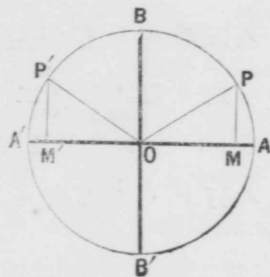
例ヘバ 135° 及ビ 45° ハ互ニ補角ヲナシ、而シテ -100° 及ビ 280° モ亦互ニ補角ヲナスガ如シ。

23. 補角の三角函數

O ヲ中心トシ、OA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ; AOA' BOB' ハ互ニ直角ナル二ツノ

徑トス。

OP ハ OA ノ位置ヨリ A 度ダケ廻轉シタリトシ、 OP' ハ OA' ノ位置ヨリ反對ノ向キニ A 度ダケ廻轉シタリトス。



$\therefore \angle A'OP' = 180^\circ - A$. AOA' ニ垂線 PM, $P'M'$ ヲ引ケ。

然ルトキハ二ツノ三角形 POM, $P'OM'$ ハ全ク相等シ。

然ルニ $\angle A'OP' = \angle AOP$ ナルユエ P 及ビ P' ハ恒ニ AOA' ノ同傍ニ、且 BOB' ノ異傍ニアリ、依リテ $P'M'$ ト PM

トハ同符號ニシテ, OM' ト OM トハ異符號ナリ.

$$\therefore P'M' = PM, \quad OM' = -OM, \quad OP' = OP.$$

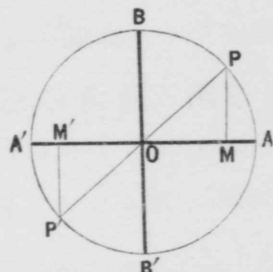
$$\therefore \sin(180^\circ - A) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{PM}{OP} = \sin A \quad \dots \dots (6)$$

$$\cos(180^\circ - A) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos A \quad \dots \dots (7)$$

$$\tan(180^\circ - A) = \frac{P'M'}{OM'} = -\frac{PM}{OM} = -\tan A \quad \dots \dots (8)$$

24. $180^\circ + A$ の三角函數

前款ト同ジク圓ヲ畫キ, 唯 OP' ヲ OA' ノ位置ヨリ角 A ヲ生ゼシト同ジ向キニ廻轉セシムベシ. 故ニ POP' ハ同一ノ直線ニシテ $\hat{AOP'} = 180^\circ + A$.



茲ニ前ノ如クニツノ三角形 $P'OM'$, POM ハ全ク相等シ. 而シテ P 及ビ P' ハニツノ直線 AOA' 及ビ BOB' ノ何レモノ異傍ニアリ.

$$\therefore P'M' = -PM, \quad OM' = -OM, \quad OP' = OP,$$

$$\therefore \sin(180^\circ + A) = \frac{P'M'}{OP'} = -\frac{PM}{OP} = -\sin A \quad \dots (9)$$

$$\cos(180^\circ + A) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos A \quad \dots (10)$$

$$\tan(180^\circ + A) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{-PM}{-OM} = \frac{PM}{OM} = \tan A \quad (11)$$

25. $-A$ の三角函數

前ノ如ク圓ヲ畫キ, OP' ヲ

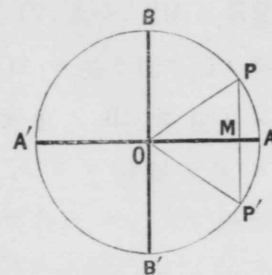
OA ノ位置ヨリ OP ト反對ノ

向キニ角 A ダケ廻轉セシム

レバ $\hat{AOP'} = -A$.

PP' ヲ結ビ付ケ OA , 或ハ AO

ノ延線ヲ M ニ於テ截ラシム.



然ルトキハ $OP = OP'$ ナルユエ, M ニ於ケル角ハ直角ニシテ三角形 POM , $P'OM$ ハ全ク相等シ, 而シテ P' , P ハ AOA' ノ異傍ニアルユエ $P'M = -PM$, $OP' = OP$.

$$\therefore \sin(-A) = \frac{P'M}{OP'} = -\frac{PM}{OP} = -\sin A \quad \dots \dots (12)$$

$$\cos(-A) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos A \quad \dots \dots (13)$$

$$\tan(-A) = \frac{P'M}{OM} = -\frac{PM}{OM} = -\tan A \quad \dots \dots (14)$$

注意 總テノ證明 [23 款乃至 25 款] ニ於テ, P ハ圓周上任意ノ所ニアリ得ルヲ以テ, 角 AOP ハ任意ノ値ヲモツコトヲ得. ニツノ銳角ハ同ジ三角函數ノ同ジ値ヲモツ能ハザルコト明カナリ. 同様ニ同ジ分面ニ於ケルニツノ角ハ決シテ同ジ三角函數ノ同ジ値ヲモツコト能ハズ. 故ニ角 A , $180^\circ - A$, $180^\circ + A$, $-A$ 及ビ是等ニ 360° ノ任意若干倍ヲ加減シタルモノノ

ミハ同ジ數値[絶對值]ノ三角函數ヲモツ角ナリ。

26. $90^\circ + A$ の三角函數

前ノ如ク圓ヲ畫キ, $\widehat{AOP} = A$

トシ, OQヲOBノ位置ヨリ

角Aダケ廻轉セシメ, AOA'

ニ垂線PM, QNヲ引ケ。

然ルトキハ $\widehat{AOQ} = 90^\circ + A$ 。

サテ $\widehat{NQO} = \widehat{QOB} = \widehat{POM}$, 而シ

テM, Nニ於ケル角ハ何レモ直角ニシテ, 又 $OP = OQ$

ナルヲ以テ三角形QON, OPMハ全ク相等シ。

故ニ幾何學的ニ $PM = ON$, $OM = QN$ 。

サテPガ AA' ノ上方ニアルカ, 又ハ下方ニアルカニ

從ヒテQハ BB' ノ左方ニアルカ, 又ハ右方ニアリ。

故ニ若シONガ負ナレバPMハ正, 若シONガ正ナレ

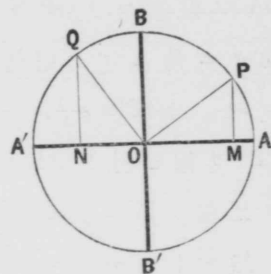
バPMハ負ナリ。依リテONトPMトハ異符號ニシ

テ, QNトOMトハ同符號ナリ。

$$\therefore \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP}, \quad \text{即チ} \quad \sin(90^\circ + A) = \cos A \quad \dots (15)$$

$$\frac{ON}{OQ} = -\frac{PM}{OP}, \quad \text{即チ} \quad \cos(90^\circ + A) = -\sin A \quad \dots (16)$$

$$\frac{QN}{ON} = -\frac{OM}{PM}, \quad \text{即チ} \quad \tan(90^\circ + A) = -\cot A \quad \dots (17)$$



例 $\sin 120^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\cot(-600^\circ)$ ヲ求ム。

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

或ハ $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cot(-600^\circ) &= -\cot 600^\circ = -\cot(360^\circ + 240^\circ) = -\cot 240^\circ \\ &= -\cot(180^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

例題

4. 135° , 150° , 240° , 300° ノ三角函數ヲ求メヨ。
5. -240° , 405° , -45° , 750° , 810° , 4005° ノ正弦ヲ求メヨ。
6. 510° , -30° , 3540° , 225° , 315° ノ餘弦, 及ビ 120° , 225° , -585° , 750° , 7320° ノ正切ヲ求メヨ。
7. $\sin 480^\circ$, $\cos 1080^\circ$, $\tan 3400^\circ$ ヲ求メヨ。
8. $\sin 7321^\circ$, $\cos(-8145^\circ)$, $\tan 7389^\circ$, $\cot 375^\circ$, $\sec(-8325^\circ)$, $\operatorname{cosec} 1732^\circ$ ヲ 45° 以下ノ角ノ三角函數ニ直セ。
9. Aノ三角函數ノ項ニテ $270^\circ + A$, 及ビ $270^\circ - A$ ノ三角函數ヲ求メヨ。
10. Aノ總テノ値ニ對シテ $\cos(90^\circ - A) = \sin A$, 及ビ

$\cot(90^\circ - A) = \tan A$ ヲ證明セヨ.

11. $\sin B = \sin A$, $\cos B = \cos A$ ナルトキハ $A - B$ ハ 0° ナルカ, 或ハ 360° ノ倍数ナリ.

12. n ガ整数ナルトキハ $\tan(n \cdot 180^\circ + A) = \tan A$ ナルコトヲ證セヨ.

13. $A - 90^\circ$ 及ビ $A - 180^\circ$ ノ三角函數ヲ求メヨ.

14. $\cos^2 A + \cos^2(90^\circ + A) + \cos^2(180^\circ + A) + \cos^2(270^\circ + A) = 2$ ナルコトヲ證セヨ.

15. $\cot(-\alpha) \operatorname{cosec}(-\alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = \cos(-\alpha)$ ヲ證セヨ.

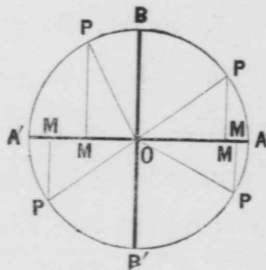
27. 角が 0° より 360° に變ずるに従ひて三角函數の値の變化

O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, 而シテ互ニ直角ナル徑 AOA', BOB',

ヲ引ケ.

動徑 OP ハ OA ノ位置ヨリ 360° ヲ通シテ廻轉スルモノトシ, OA ニ垂線 PM ヲ引ケ.

OA = r トスレバ, OP ハ恒ニ正ニシテ且恒ニ r ニ等シ.



サテ (1) OP ガ OA ヨリ OB マデ廻轉スルトキハ角 AOP [之ヲ A トス] ハ 0° ヨリ 90° マデ變ジ, 從ヒテ PM ハ 0 ヨリ r マデ變ジ且正ナリ, 而シテ OM ハ r ヨリ 0 マデ變ジ且又正ナリ.

故ニ第一分面ニ於テハ

$\sin A \left(= \frac{PM}{OP} \right)$ ハ正ニシテ 0 ヨリ 1 マデ増大シ,

$\cos A \left(= \frac{OM}{OP} \right)$ ハ正ニシテ 1 ヨリ 0 マデ減少シ,

$\tan A \left(= \frac{PM}{OM} \right)$ ハ正ニシテ 0 ヨリ ∞ マデ増大ス.

(2) OP ガ OB ヨリ OA' マデ廻轉スルトキハ, 角 A ハ 90° ヨリ 180° マデ變ジ, 從ヒテ PM ハ r ヨリ 0 マデ變ジ且正ナリ, 而シテ OM ハ 0 ヨリ $-r$ マデ變ジ且負ナリ.

故ニ第二分面ニ於テハ

$\sin A \left(= \frac{PM}{OP} \right)$ ハ正ニシテ, 1 ヨリ 0 マデ變ジ,

$\cos A \left(= \frac{OM}{OP} \right)$ ハ負ニシテ, 0 ヨリ -1 マデ變ジ,

$\tan A \left(= \frac{PM}{OM} \right)$ ハ負ニシテ, $-\infty$ ヨリ 0 マデ變ズ.

(3) OP ガ OA' ヨリ OB' マデ廻轉スルトキハ, 角 A ハ 180° ヨリ 270° マデ變ジ, 從ヒテ PM ハ 0 ヨリ $-r$

マデ變ジ且負ナリ,

而シテ OM ハ $-r$ ヨリ 0 マ

デ變ジ且負ナリ.

故ニ第三分面ニ於テハ

$$\sin A \left(= \frac{PM}{OP} \right) \text{ハ負ニシテ,}$$

0 ヨリ -1 マデ變ジ,

$$\cos A \left(= \frac{OM}{OP} \right) \text{ハ負ニシテ, } -1 \text{ ヨリ } 0 \text{ マデ變ジ,}$$

$$\tan A \left(= \frac{PM}{OM} \right) \text{ハ正ニシテ, } 0 \text{ ヨリ } \infty \text{ マデ變ズ.}$$

(4) OP ガ OB' ヨリ OA マデ廻轉スルトキハ, 角 A
ハ 270° ヨリ 360° マデ變ジ, 從ヒテ PM ハ $-r$ ヨリ 0
マデ變ジ且負ナリ, 而シテ OM ハ 0 ヨリ r マデ變ジ
且正ナリ.

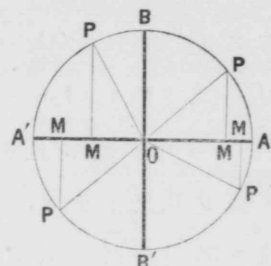
故ニ第四分面ニ於テハ

$$\sin A \left(= \frac{PM}{OP} \right) \text{ハ負ニシテ, } -1 \text{ ヨリ } 0 \text{ マデ變ジ,}$$

$$\cos A \left(= \frac{OM}{OP} \right) \text{ハ正ニシテ, } 0 \text{ ヨリ } 1 \text{ マデ變ジ,}$$

$$\tan A \left(= \frac{PM}{OM} \right) \text{ハ負ニシテ, } -\infty \text{ ヨリ } 0 \text{ マデ變ズ.}$$

注意 若シ角ガ 360° ヲ超過シテ増大スルトキハ,
三角函數ハ又前ト同一ノ値ヲ繰リ返スノミ.

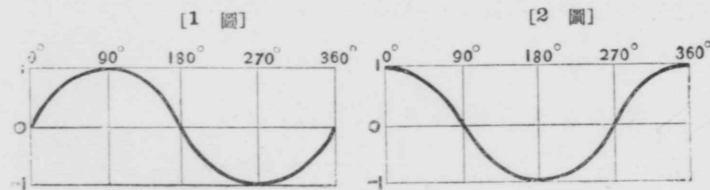


[脚註ニ正弦餘弦正切ノ値ノ變化ヲ圖示ス].

例題

16. $\cos 405^\circ$, $\tan 210^\circ$, $\cot(-315^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ.
17. 130° , 290° , -340° ナル角ノ三角函數ノ符號ヲ問フ.

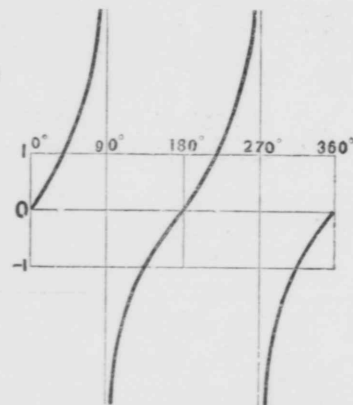
- 1 圖ハ 0° ヨリ 360° ニ至ル正弦ノ變化ヲ圖示セルモノニシテ
2 圖ハ同ジク餘弦ノ變化ヲ圖示セルモノナリ.



- 3 圖ハ同ジク正切ノ變化ヲ圖示セルモノナリ.

此ノ圖示法ハ O ニ於テ直角ニ交ル縦横二直線ヲ引キ, 横線ニ沿ヒテ適宜ノ單位ヲ以テ 0° ヨリ 360° ニ至ル角ヲ度ルモノトシ, 縦線ニ沿ヒテ適宜ノ單位ヲ以テ三角函數ノ値ヲ度ルモノトス.

然ルトキハ三角函數ノ値ヲ表ハス直線ノ一端ハ連續シテ一ノ曲線ヲ畫ク可シ



18. A ハ三角形ノ内角ニシテ $\cos A = -\frac{4}{5}$ ナルトキ,
 $\sin A$ 及ビ $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ.

19. $A = -25^\circ 19'$ 及ビ $\sin A = -\frac{3}{7}$ ナルトキ, $\cos A$ 及ビ
 $\cot A$ ノ値ヲ求メヨ.

次ノ各式ノ値ヲ求メヨ [20 乃至 23].

20. $2\cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3\sin 120^\circ \tan 135^\circ$.

21. $\tan 150^\circ \cos 0^\circ + 3\cos 180^\circ \cot 150^\circ$.

22. $a^2 \cos 0^\circ - b^2 \sin 270^\circ - 2ab \tan 135^\circ \cot 225^\circ$.

23. $\cos 180^\circ \tan(-45^\circ) + \sin 150^\circ \sec 210^\circ$.

次ノ各式ヲ證明セヨ [24 乃至 27].

24. $\frac{\sin^4 A - \cos^4 A}{1 - 2\sin A \cos A} \times \frac{1 - \cot A}{\sin A + \cos A} = \operatorname{cosec} A$.

25. $\cos \theta (\tan \theta + 2)(2\tan \theta + 1) = 2\sec \theta + 5\sin \theta$.

26. $\{\sin(90^\circ + A) + \cos(90^\circ + A)\} \{\sec(90^\circ - A) - \sec A\}$
 $= \sec A \sec(90^\circ - A) - 2$.

27. $\frac{\sin^3(90^\circ + A) + \cos^3(90^\circ + A)}{\sin(180^\circ + A) + \cos(360^\circ - A)}$
 $= 1 + \sin(90^\circ + A)\cos(270^\circ + A)$.

第四編

複角の三角函数

28. $\sin(A+B)$ 及び $\cos(A+B)$ の公式

$\hat{C}OD = A$, $\hat{D}OE = B$ トスレバ

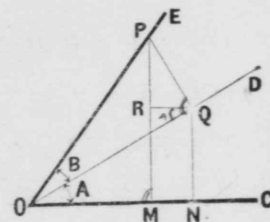
$$\hat{C}OE = A + B.$$

OE ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取

リ; OC, OD ニソレゾレ垂線 PM,

PQ ヲ引キ; 又 OC, PM ニソレ

ゾレ垂線 QN, QR ヲ引ケ.



然ルトキハ $\hat{P}MO$, $\hat{P}QO$ ハ直角ナルユエ, 幾何學ノ
 定理ニ依リ O, P, Q, M ハ同一ノ圓周上ニアリ.

$$\therefore \hat{Q}PM = \hat{Q}OM = A.$$

$$\text{サテ } \sin(A+B) = \frac{PM}{OP} = \frac{PR+RM}{OP} = \frac{QN}{OP} + \frac{PR}{OP}$$

$$= \frac{QN}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP},$$

$$\text{即チ } \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \dots \dots (1E)$$

$$\text{又 } \cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON-NM}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{QR}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP},$$

$$\text{即チ } \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \dots \quad (19)$$

29. $\sin(A-B)$ 及び $\cos(A-B)$ の公式

$\widehat{COD} = A$, $\widehat{DOE} = B$ トスレバ

$$\widehat{COE} = A - B.$$

OE ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取
リ; OC, OD = ソレゾレ垂線 PM,
PQ ヲ引キ, 又 OC = 垂線 QN ヲ,
MP ノ延線 = 垂線 QR ヲ引ケ.
然ルトキハ前ノ如ク O, M, P, Q ハ同一ノ圓周上ニ
アリ.

$$\therefore \widehat{QOM} + \widehat{QPM} = 2\widehat{R},$$

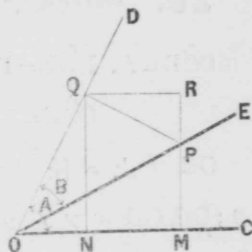
$$\therefore \widehat{QON} + \widehat{QPM} = \widehat{RPQ} + \widehat{QPM},$$

$$\therefore \widehat{RPQ} = A.$$

$$\begin{aligned} \text{サテ } \sin(A-B) &= \frac{PM}{OP} = \frac{RM - PR}{OP} = \frac{QN}{OP} - \frac{PR}{OP} \\ &= \frac{QN}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP}, \end{aligned}$$

$$\text{即チ } \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \dots \quad (20)$$

$$\text{又 } \cos(A-B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON + NM}{OP} = \frac{ON}{OP} + \frac{QR}{OP}$$



$$= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP},$$

$$\text{即チ } \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \dots \quad (21)^*$$

(18) 乃至 (21) ノ四ツヲ基本ノ公式ト稱ス.

例 題

次ノ各式ヲ證明セヨ [1 乃至 4].

$$1. \quad 2\sin(30^\circ - A) = \cos A - \sqrt{3}\sin A.$$

$$2. \quad \sin(45^\circ + A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A + \sin A).$$

$$3. \quad \cos(A + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A).$$

$$4. \quad \sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$5. \quad \sin A = \frac{4}{5}, \quad \sin B = \frac{3}{5} \quad \text{ナルトキ } \sin(A-B) \quad \text{及ビ} \\ \cos(A-B) \quad \text{ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$6. \quad \sin A = 0.6, \quad \sin B = \frac{5}{13} \quad \text{ナルトキ } \sin(A-B), \quad \text{及ビ} \\ \cos(A+B) \quad \text{ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$7. \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin B = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{ナルトキ } A+B \quad \text{ノ一ツ} \\ \text{ノ値ハ } 45^\circ \quad \text{ナルコトヲ證ヒヨ.}$$

* (18) 乃至 (21) ナル公式ハ, A 及ビ B ノ値如何ニ拘ハラズ眞ナ
レドモ, 其ノアラユル場合ニ對スル證明ハ茲ニ之ヲ省ク.

次ノ各式ヲ證明セヨ [8 乃至 15]

$$\textcircled{8} \quad \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \tan A.$$

$$\textcircled{9} \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$\textcircled{10} \quad \cot \alpha - \tan \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

$$\textcircled{11} \quad \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha.$$

$$\textcircled{12} \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha.$$

$$\textcircled{13} \quad \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$$

$$\textcircled{14} \quad \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

$$\textcircled{15} \quad \sin n A \cos A + \cos n A \sin A = \sin(n+1)A.$$

30. $\tan(A+B)$ 及び $\tan(A-B)$ の公式

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}.$$

此ノ分子ト分母トヲ $\cos A \cos B$ ニテ除シ且變化シテ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \dots \dots (22)$$

$$\text{同様} = \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \quad \dots \dots (23)$$

31. $\cot(A+B)$ 及び $\cot(A-B)$ の公式

前款ト類似ノ方法ヲ以テ、次ノ二式ヲ證明スルコ

トヲ得可シ.

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \quad \dots \dots (24)$$

$$\cot(A-B) = -\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B} \quad \dots \dots (25)$$

例 題

$$\textcircled{16} \quad \tan A = 1, \tan B = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ナルトキ次式ヲ證セヨ.}$$

$$\tan(A+B) = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{17} \quad \tan A = \frac{5}{6}, \tan B = \frac{1}{11} \text{ ナルトキ次式ヲ證セヨ.}$$

$$\tan(A+B) = 1.$$

$$\textcircled{18} \quad \text{前題ニ於テ } A+B \text{ ノ } 360^\circ \text{ ヨリ小ナル値ハ如何.}$$

$$\textcircled{19} \quad \tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3} \text{ ナルトキ } \tan(A+B) \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{20} \quad \cot A = \frac{5}{7}, \cot B = \frac{7}{5} \text{ ナルトキ } \cot(A+B), \text{ 及ビ } \tan(A-B) \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{21} \quad \cot A = \frac{11}{2}, \tan B = \frac{7}{24} \text{ ナルトキ } \cot(A-B), \text{ 及ビ } \tan(A+B) \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

次ノ各式ヲ證明セヨ [22 乃至 28].

$$\textcircled{22} \quad \tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{23} \quad \cot 75^\circ = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{24}. \tan(45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}, \quad \tan(45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

$$\textcircled{25}. \cot(45^\circ + A) = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}, \quad \cot(45^\circ - A) = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}.$$

$$\textcircled{26}. \tan(\theta - 45^\circ) + \cot(\theta + 45^\circ) = 0.$$

$$\textcircled{27}. \text{若シ } \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \text{ ナルトキハ}$$

$$\tan \gamma = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

$$\textcircled{28}. \frac{\tan(n+1)A - \tan nA}{1 + \tan(n+1)A \tan nA} = \tan A.$$

32. 倍角の正弦餘弦の公式

公式(18), (19) = 於テ $B=A$ トスレバ

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$= 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A \quad \dots \dots (28)$$

$$\text{又} \quad \sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$

$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$

$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\text{同様} = \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A \quad \dots \dots \dots (30)$$

33. 倍角の正切餘切の公式

公式(22), (24) = 於テ $B=A$ トスレバ

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \dots \dots \dots (31)$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \quad \dots \dots \dots (32)$$

例 題

$$\textcircled{29}. \cos A = \frac{1}{5} \text{ ナルトキ } \cos 2A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{30}. \sin A = \frac{1}{4} \text{ ナルトキ } \cos 2A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$31. \sin A = \frac{1}{2} \text{ ニシテ, 且 } A \text{ ハ } 90^\circ \text{ ヨリ小ナル角ナルトキ } \sin 2A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$32. 270^\circ < \theta < 360^\circ \text{ ニシテ, } \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ ナルトキ } \sin 2\theta \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{33}. \tan A = \frac{1}{3} \text{ ナルトキ } \tan 2A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$34. \tan \theta = \frac{1}{7} \text{ ナルトキ } \sin 2\theta \text{ 及ビ } \cos 2\theta \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{35}. \cos A = \frac{1}{2} \text{ ナルトキ } \cos 3A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{36}. \sin A = \frac{3}{5} \text{ ナルトキ } \sin 3A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$\textcircled{37}. \tan 3A = \frac{2 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \text{ ヲ證シ, 而シテ } \tan A = 3 \text{ ナルトキ } \tan 3A \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

38. $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$ ヲ證セヨ.
39. $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A, \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan^2 \theta$ ヲ證セヨ.
40. $\frac{3\sin A - \sin 3A}{\cos 3A + 3\cos A} = \tan^3 A$ ヲ證セヨ.

34. 分角の三角函數の公式

公式 (28) = 於テ A ノ代リニ $\frac{1}{2}A$ ヲ用ヒ變形シテ

$$\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1 - \cos A) \dots \dots \dots (33)$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1 + \cos A) \dots \dots \dots (34)$$

從ヒテ $\tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \dots \dots \dots (35)$

35. $\sin 18^\circ (= \cos 72^\circ)$ の値

$A = 18^\circ$ トスレバ $5A = 90^\circ$,

依リテ $\sin 2A = \sin(90^\circ - 3A) = \cos 3A$,

即チ $2\sin A \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,

$\cos A$ ニテ除スレバ

$$2\sin A = 4\cos^2 A - 3 = 1 - 4\sin^2 A.$$

コレ $\sin A$ ノ二次方程式ナリ、而シテ $\sin A$ ハ正ナル

可キヲ以テ、之ヲ解キテ $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = \cos 72^\circ$.

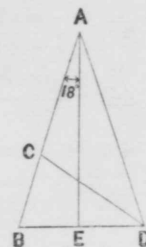
注意 $\sin 18^\circ$ ノ値ハ、又幾何學的ニ、圖形ニ依リテ求ムルコトヲ得ベシ.

ABD ハ底角 B, D ガ頂角 A ノ 2 倍ナル如キ二等邊三角形ナリトスレバ

$$A + 2A + 2A = 180^\circ$$

ナルヲ以テ $A = 36^\circ$.

角 BAD ヲ AE ニテ二等分スレバ AE ハ底邊 BD ヲ二等分ス可シ.



故ニ $\angle BAE = 18^\circ$.

今底角 D ヲ二等分スル直線ヲ DC トスレバ、幾何學ノ定理ニ依リ $AB \cdot BC = AC^2$,

而シテ $AC = CD = BD = 2BE$

ナルユエ $BE = x, AB = a$

トスレバ $a(a - 2x) = (2x)^2$,

之ヲ解キ、且 $\sin 18^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{x}{a}$

ニシテ、此ハ正ナルベキヲ以テ次式ヲ得ベシ.

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

例題

次ノ各式ヲ證明セヨ.

$$41. \cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$42. \sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$43. \frac{\sin A}{1-\cos A} = \cot \frac{1}{2}A.$$

$$44. \frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta} = 2\sin^2 \frac{1}{2}\theta.$$

$$45. \sin 8A = 8\sin A \cos A \cos 2A \cos 4A.$$

$$46. \left(\cos \frac{1}{2}A + \sin \frac{1}{2}A\right)^2 = 1 + \sin A.$$

$$47. \left(\cos \frac{1}{2}A - \sin \frac{1}{2}A\right)^2 = 1 - \sin A.$$

$$48. \sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ.$$

$$49. \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$50. \cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{3}{4}.$$

$$51. 4\sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1.$$

$$52. \frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2.$$

$$53. \frac{1}{\tan 3A - \tan A} + \frac{1}{\cot A - \cot 3A} = \cot 2A.$$

$$54. \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \cdot \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan \frac{A}{2}.$$

$$55. \frac{\cos \theta}{1-\sin \theta} = \frac{\cot \frac{1}{2}\theta + 1}{\cot \frac{1}{2}\theta - 1}.$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

36. 基本の公式の變形

公式(18)乃至(21)ヨリ加法或ハ減法ニ依リテ

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B \quad \dots \dots (36)$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \quad \dots \dots (37)$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B \quad \dots \dots (38)$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B \quad \dots \dots (39)$$

是等ノ公式ニ於テ $A+B=C$, $A-B=D$ トスレバ

$$\sin C + \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad \dots \dots (40)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \quad \dots \dots (41)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad \dots \dots (42)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \quad \dots \dots (43)$$

$$\begin{aligned} \text{例 1. } \sin 14\theta + \sin 6\theta &= 2\sin \frac{14\theta+6\theta}{2} \cos \frac{14\theta-6\theta}{2} \\ &= 2\sin 10\theta \cos 4\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2. } \cos 70^\circ - \cos 10^\circ &= -2\sin 40^\circ \sin 30^\circ \\ &= -\sin 40^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 3. } \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{5A}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{3A}{2} + \frac{5A}{2} \right) + \cos \left(\frac{3A}{2} - \frac{5A}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos 4A + \cos(-A) \} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 4A + \cos A). \end{aligned}$$

例 4. $2\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)$
 $= \cos 60^\circ - \cos 90^\circ$
 $= \frac{1}{2} - 0$
 $= \frac{1}{2}.$

例 題

次ノ各式ヲ和或ハ差ノ形ニ直セ[和或ハ差ノ形ニ直シテ後, 簡單ニシ得ルモノハ, 之ヲ簡單ニセヨ].

[56 乃至 61].

56. $2\sin\alpha\cos\beta.$ 57. $2\cos\gamma\cos\delta.$
 58. $2\sin 2\alpha\cos 3\beta.$ 59. $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$
 60. $\sin 4\theta\sin\theta.$ 61. $\cos 45^\circ\sin 15^\circ.$

次ノ各式ヲ積ノ形ニ直セ[積ノ形ニ直シテ後, 簡單ニシ得ルモノハ, 之ヲ簡單ニセヨ]. [62 乃至 67].

62. $\sin 10\theta + \sin 4\theta.$ 63. $\sin 60^\circ + \sin 20^\circ.$
 64. $\sin 40^\circ - \sin 10^\circ.$ 65. $\cos 8\theta + \cos 2\theta.$
 66. $\cos 6\theta - \cos 4\theta.$ 67. $\cos 5A - \cos 4A.$

次ノ各式ヲ證明セヨ [68 乃至 75].

68. $\sin 7A - \sin 5A = 2\cos 6A\sin A.$
 69. $\cos A - \cos 2A = 2\sin \frac{3A}{2} \sin \frac{A}{2}.$

70. $\frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\theta} = \tan \frac{3\theta}{2}.$
 71. $\frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{\cos \theta - \cos 2\theta} = \cot \frac{3\theta}{2}.$
 72. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = \frac{\cos A + \cos B}{\sin B - \sin A}.$
 73. $\sin(45^\circ + A) - \sin(45^\circ - A) = \sqrt{2}\sin A.$
 74. $\sin 3\theta - \sin \theta - \sin 5\theta = \sin 3\theta(1 - 2\cos 2\theta).$
 75. $\frac{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos \theta}{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin \theta} = \cot 2\theta.$

$$\sin 10\theta + \sin 4\theta = 2\sin \frac{10\theta + 4\theta}{2} \cos \frac{10\theta - 4\theta}{2}$$

$$= 2\sin 7\theta \cos 3\theta$$

第五編

三角形の性質

37. 三角形 ABC に於て A, B, C は、幾何學的ニハ三ツノ角頂ヲ代表シ、代數學的ニハソレゾレ是等ノ角頂ニ於ケル角度ヲ代表ス。

サテ幾何學ノ定理ニ依リ $A+B+C=180^\circ$ ナルユエ三角形ノ一角ハ 0° ト 180° トノ間ニアリ。

故ニ三角形ノ

- I. 一角ノ正弦ハ正ニシテ 1 ヨリ小サシ。
- II. 一角ノ餘弦ハ正、或ハ負ニシテ、絶對値ニ於テ 1 ヨリ小サシ。
- III. 一角ノ正切ハ正、若シクハ負ノ任意ノ値ヲモツコトヲ得。
- IV. 一角ノ正弦ガ與ヘラレタルトキハ、之ニ適スル角ハ二ツアリテ、互ニ補角ヲナス。
- V. 一角ノ餘弦、或ハ正切ガ與ヘラレタルトキハ、之ニ適スル角ハ唯一ツアルノミ。
- VI. 一角ノ半分ハ 90° ヨリ小サシ、依リテ其ノ三角函數ハ皆正ナリ。

VII. 一角ノ半分ノ任意ノ三角函數ガ與ヘラレタルトキハ、其ノ角ノ半分ハ決定セラル。

例題

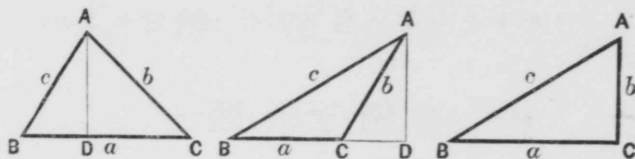
A, B, C ハ三角形ノ角ナルトキ、次ノ各式ヲ證セヨ。

1. $\sin(A+B+C)=0$.
2. $\cos(A+B+C)=-1$.
3. $\sin(A+B)=\sin C$.
4. $\cos(A+B)=-\cos C$.
5. $\tan(A+B)=-\tan C$.
6. $\sin \frac{1}{2}(A+B+C)=1$.
7. $\cos \frac{1}{2}(A+B+C)=0$.
8. $\tan \frac{1}{2}(A+B+C)=\infty$.
9. $\sin \frac{1}{2}(A+B)=\cos \frac{1}{2}C$.
10. $\cos \frac{1}{2}(A+B)=\sin \frac{1}{2}C$.
11. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$.
12. $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1$.
13. $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$.
14. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.
15. $\sin(B+C-A) - \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) = 4 \cos A \sin B \cos C$.

38. 正弦比例の式

三角形 ABC に於て B ハ鋭角ノ一トシ、BC 或ハ BC

ノ延線へ垂線 AD フ引ク。然ルトキハ



$$\sin B = \frac{AD}{AB}, \quad \therefore AD = AB \sin B = c \sin B.$$

又 C ガ鋭角ナルトモ、鈍角ナルトモ

$$\sin C = \sin ACD = \frac{AD}{AC}, \quad \therefore AD = b \sin C.$$

$$\text{故ニ} \quad b \sin C = c \sin B, \quad \text{即チ} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

C 或ハ B ヨリ對邊へ垂線ヲ引キテ、是等ノ式ハ何レ

モ $\frac{a}{\sin A}$ ニ等シキコトヲ證シ得可シ。

若シ $C = 90^\circ$ ナルトキハ D ハ C ト合シ、 $\sin C = 1$ 。

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{1} = \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

故ニ總テノ場合ニ於テ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots \dots \dots (44)$$

39. 一角の餘弦と邊との關係

前款ノ圖ヲ用ヒ、幾何學ノ定理ニ依リテ、

C ガ鋭角ナルトキハ

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \cdot CD.$$

若シ C ガ鈍角ナルトキハ

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \cdot CD.$$

サテ C ガ鋭角ナルカ、或ハ鈍角ナルカニ從ヒテ CD

ハ $b \cos C$ 、或ハ $-b \cos C$ ニ等シク、而シテ C ガ直角ナル

トキハ $CD = 0$ ナリ。故ニ總テノ場合ニ於テ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{依リテ} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \dots \dots \dots (45)$$

$$\text{同様ニ} \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \dots \dots \dots (46)$$

$$\text{及ビ} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \dots \dots \dots (47)$$

例 題

三角形 ABC ニ於テ次ノ各式ヲ證セヨ。

16. $\frac{\sin A + 2 \sin B}{a + 2b} = \frac{\sin C}{c}.$

17. $\frac{\sin^2 A - m \sin^2 B}{a^2 - mb^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}.$

18. $a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A.$

19. $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A.$

$$20. a \cos A + b \cos B - c \cos C = 2c \cos A \cos B.$$

$$21. a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0.$$

$$22. (a+b) \sin \frac{C}{2} = c \cos \frac{A-B}{2}.$$

$$23. (b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}.$$

$$24. \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c-b \cos A}{b-c \cos A}.$$

$$25. \frac{a-b}{c} = \frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C}.$$

40. 半角の正切と三邊との關係

$a+b+c=2s$ ト ス レ バ 公式 (47) ヨリ

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}. \end{aligned}$$

$$\text{同様} = \frac{1 + \cos A}{bc} = \frac{2s(s-a)}{bc}.$$

故ニ公式 (35) ヨリ

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \dots \dots (48)$$

$$\text{同様} = \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \dots \dots (49)$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \dots \dots (50)$$

41. 二角の差半の三角函数

公式 (44) ヨリ

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} &= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C)}{2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A}, \end{aligned}$$

$$[\because \sin \frac{1}{2}(B+C) = \cos \frac{1}{2}A].$$

$$\therefore \cos \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b+c}{a} \sin \frac{1}{2}A \dots \dots (51)$$

$\cos \frac{1}{2}(C-A), \cos \frac{1}{2}(A-B)$ ニモ亦同様ノ式アリ.

又

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(B+C)}{2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C)} \\ &= \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\tan \frac{1}{2}(B+C)} \\ &= \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\cot \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A \dots \dots \dots (52)$$

$\tan \frac{1}{2}(C-A), \tan \frac{1}{2}(A-B)$ = モ亦同様ノ式アリ.

42. 三角形の面積

三角形 ABC = 於テ A ヨリ BC
へ垂線 ADヲ引キ, ABC ノ面積ヲ

$$\Delta \text{トスレバ} \quad \Delta = \frac{1}{2}AD \cdot BC,$$

$$\text{然ルニ} \quad AD = AB \sin B = c \sin B,$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}ac \sin B \dots \dots \dots (53)$$

$$= \frac{1}{2}ac \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \frac{1}{2}ac \sqrt{(1 - \cos B)(1 + \cos B)}$$

$$\text{故ニ 40 款ニ依リ } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots \dots (54)$$

$$2s = a + b + c$$

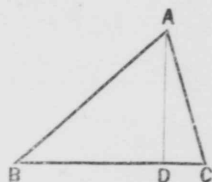
例題

三角形 ABC = 於テ次ノ各式ヲ證セヨ.

26. 三邊ガ 17, 25, 28 ナルトキ $\Delta = 210$.

$$27. \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$28. \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$



29. $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$.

30. $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$.

31. $\frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{c-b}{c}$ ナルトキハ $A = 60^\circ$.

32. $(b+c-a)\tan \frac{A}{2} = (a+b-c)\tan \frac{C}{2}$.

33. $(a-b)\cot \frac{C}{2} + (c-a)\cot \frac{B}{2} + (b-c)\cot \frac{A}{2} = 0$.

34. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

35. $\cos A = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{12}{13}$ ナルトキハ $\cos C = -\frac{16}{65}$.

36. $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$ ナルトキハ $A = 90^\circ$.

37. $a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = s$.

38. $\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}$.

第 六 編

三 角 形 の 解 法

43. 任意ノ三角形ノ解法ニハ四ツノ場合アリ

- I. 二角ト一邊トヲ知レルトキ.
- II. 三邊ヲ知レルトキ.
- III. 二邊ト其ノ夾角トヲ知レルトキ.
- IV. 二邊ト其ノ一ニ對スル角トヲ知レルトキ.

44. 二角 (B, C) と一邊 (a) とを知れるとき.

先ヅ $A=180^\circ-(B+C)$ ヨリ A ヲ知リ得可シ.

$$\text{次ニ} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\text{故ニ} \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$\text{及ビ} \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\text{故ニ} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

是等ノ二式ヨリ b 及ビ c ヲ求メ得可シ.

今コレヲ對數式ニ直セバ

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\text{同様ニ} \quad \log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

注意 上ノ如ク計算シテ得タル結果ハ公式 (51)

$$\text{ニ依リ} \quad a = (b+c) \sin \frac{1}{2}A / \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

ヲ以テ驗スコトヲ得可シ.

例 $c=176.4$, $C=18^\circ 27'$, $B=66^\circ 39'$ ヲ知リテ b, a, 及ビ

A ヲ求ム.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$$

$$A = 180^\circ - B - C$$

$$= 180^\circ - (B+C)$$

$$\text{算 式} \quad \log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$$

$$= \log c + \log \sin B + 10 - \log \sin C - 10$$

$$A = 180^\circ - (B+C), \quad \log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C,$$

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C.$$

A ノ 計 算

$$B = 66^\circ 39'$$

$$C = 18^\circ 27'$$

$$B+C = 85^\circ 6'$$

$$A+B+C = 179^\circ 60'$$

$$A = 94^\circ 54'$$

b ノ 計 算

$$\log c = 2.24650$$

$$\log \sin B = 1.96289$$

$$-\log \sin C = 0.49966$$

$$\log b = 2.70905$$

$$b = 511.74$$

a ノ 計 算

$$\log c = 2.24650$$

$$\log \sin A = 1.99841$$

$$-\log \sin C = 0.49966$$

$$\log a = 2.74457$$

$$a = 555.35$$

驗

$$\log c = \log(a+b) + \log \sin \frac{1}{2}C - \log \cos \frac{A-B}{2}.$$

$a = 555.35$	$A = 94^{\circ}54'$	$C = 18^{\circ}27'$
$b = 511.74$	$B = 66^{\circ}39'$	$\frac{C}{2} = 9^{\circ}13'30''$
$a+b=1067.09$	$A-B=28^{\circ}15'$	
	$\frac{A-B}{2} = 14^{\circ}7'30''$	

$$\log(a+b) = 3.02820$$

$$\log \sin \frac{C}{2} = \bar{1}.20496$$

$$-\log \cos \frac{A-B}{2} = 0.01334$$

$$\log c = 2.24650$$

$$c = 176.4$$

例題

次ノ各ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ。

1. $A=45^{\circ}41'$, $C=62^{\circ}5'$, $b=100$.
2. $a=123$, $B=29^{\circ}14'$, $C=124^{\circ}$.
3. $a=1652$, $B=26^{\circ}30'$, $C=47^{\circ}15'$.

45. 三邊 (a, b, c) を知れるとき。

此ノ場合ニハ公式 (48), (49), (50), 即チ

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \log \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ヨリ A, B, C ヲ求メ得可シ。

而シテ斯ク A, B, C ヲ求メタルトキハ

$$A+B+C=180^{\circ}$$

ニ依リテ, 其ノ結果ヲ驗スコトヲ得可シ。

今上式ヲ對數式ニ直セバ次ノ如シ。

$$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \},$$

而シテ $\log \tan \frac{B}{2}$, $\log \tan \frac{C}{2}$ モ亦コレニ準ズ。

例 1. $a=275.3$, $b=189.2$, $c=301.5$ ヲ與ヘテ A, B 及
ビ C ヲ求ム。

算式

$$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \},$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-c) + \log(s-a) - \log s - \log(s-b) \},$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c) \}.$$

豫備計算

$$a=275.3$$

$$s=383$$

$$= 2.58320$$

$$b=189.2$$

$$s-a=107.7$$

$$= 2.03222$$

$$c=301.5$$

$$s-b=193.8$$

$$= 2.28735$$

$$2s=766$$

$$s-c=81.5$$

$$= 1.91116$$

Aノ計算

$$\begin{aligned}
 \log(s-b) &= 2.28735 \\
 \log(s-c) &= 1.91116 \\
 -\log s &= \bar{3}.41680 \\
 -\log(s-a) &= \bar{3}.96778 \\
 \hline
 2\log \tan \frac{A}{2} &= \bar{1}.58309 \\
 \log \tan \frac{A}{2} &= \bar{1}.79154 \\
 \frac{A}{2} &= 31^\circ 44'.93 \\
 A &= 63^\circ 29' 52''
 \end{aligned}$$

Cノ計算

$$\begin{aligned}
 \log(s-a) &= 2.03222 \\
 \log(s-b) &= 2.28735 \\
 -\log s &= \bar{3}.41680 \\
 -\log(s-c) &= \bar{2}.08884 \\
 \hline
 2\log \tan \frac{C}{2} &= \bar{1}.82521 \\
 \log \tan \frac{C}{2} &= \bar{1}.91260 \\
 \frac{C}{2} &= 39^\circ 16'.38 \\
 C &= 78^\circ 32' 46''
 \end{aligned}$$

例 2. 前例ニ於ケル三角形ノ面積ヲ求ム。
算式 公式 (54) ヲ對數式ニ直セバ次ノ如シ。

$$\log \Delta = \frac{1}{2} \{ \log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c) \}.$$

Bノ計算

$$\begin{aligned}
 \log(s-c) &= 1.91116 \\
 \log(s-a) &= 2.03222 \\
 -\log s &= \bar{3}.41680 \\
 -\log(s-b) &= \bar{3}.71265 \\
 \hline
 2\log \tan \frac{B}{2} &= \bar{1}.07283 \\
 \log \tan \frac{B}{2} &= \bar{1}.53642 \\
 \frac{B}{2} &= 18^\circ 58'.66 \\
 B &= 37^\circ 57' 19''
 \end{aligned}$$

驗

$$\begin{aligned}
 A &= 63^\circ 29' 52'' \\
 B &= 37^\circ 57' 19'' \\
 C &= 78^\circ 32' 46'' \\
 \hline
 A+B+C &= 179^\circ 59' 57''
 \end{aligned}$$

6" 不足アリヨ

$$\begin{aligned}
 \log s &= 2.58320 \\
 \log(s-a) &= 2.03222 \\
 \log(s-b) &= 2.28735 \\
 \log(s-c) &= 1.91116 \\
 \hline
 2\log \Delta &= 8.81392 \\
 \log \Delta &= 4.40696 \\
 \Delta &= 25525
 \end{aligned}$$

$$\log \Delta = 4.40697$$

$$\log 25500 = 4.40654$$

$$253 \dots 43$$

$$\log 25525.3 = 4.40697$$

$$\Delta = 25525.3 (7才2)$$

例題

次ノ各ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ [4 乃至 6].

4. $a=15, b=7, c=13.$

5. $a=3, b=1.75, c=2.75.$

6. $a=283, b=317, c=428.$ A 角ヲ求ム

7. $a=654, b=784, c=598$ ヲ與ヘテ面積ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned}
 180^\circ - A &= B+C = \tan \frac{180^\circ - A}{2} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C) \cdot \frac{b-c}{b+c}}{\tan \frac{1}{2}(B+C)} \\
 \tan \frac{1}{2}(B-C)(b+c) &= (b-c) \tan \frac{1}{2}(B+C) \\
 \therefore \tan \frac{1}{2}(B-C) &= \frac{(b-c) \tan \frac{1}{2}(B+C)}{(b+c)}
 \end{aligned}$$

46. 二邊 (b, c) と其の夾角 (A) とを知 (b+c)

れるとき、 $\log \tan \frac{1}{2}(B-C) = \log(b-c) + \log \tan \frac{1}{2}(B+C) - \log(b+c)$

此ノ場合ニハ公式 (52), 即チ $\frac{1}{2}(B-C) = \Delta^\circ \square'$

$$\tan \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A,$$

及ビ

$$B+C=180^\circ - A \quad \frac{1}{2}(B+C) = \frac{180^\circ - A}{2}$$

$$\frac{1}{2}(B-C) = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B+C)$$

$$\tan \frac{1}{2}(B-C) = \log(b-c) + \log \tan \frac{1}{2}(B+C) - \log(b+c)$$

ヨリ B ト C トヲ求メ得可シ。

第一式ヲ對數式ニ直セバ次ノ如シ。

$$\log \tan \frac{1}{2}(B-C) = \log(b-c) - \log(b+c) + \log \cot \frac{1}{2}A.$$

既ニ B, C ヲ求メ得タルトキハ邊 a ハ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

ヨリ求メ得可シ.*

注意 1. 既ニ $\frac{1}{2}(B-C)$ ヲ得タルトキ B 及ビ C ヲ求メズシテ、直チニ邊 a ヲ求ムル場合ニハ公式 (51), 即チ

$$\cos \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b+c}{a} \sin \frac{1}{2}A$$

ヲ用フルヲ可ナリトス。

注意 2. 公式 (49), (50) ヨリ

$$\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{s-a}{s}.$$

此ノ式ノ對數ヲ取リ、以テ本款ニ於テ求メタル未知數ノ値ノ正否ヲ驗スルコトヲ得可シ。

* 此ノ場合ニハ補助角ヲ用ヒテ解クコトヲ得可シ。

$$\text{即チ } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$\text{サチ角 } \phi \text{ ヲ } \sin \phi = \frac{2\sqrt{bc} \cos \frac{1}{2}A}{b+c} \text{ ナル如ク取ルトキハ}$$

$$a^2 = (b+c)^2 \left\{ 1 - \frac{4bc}{(b+c)^2} \cos^2 \frac{A}{2} \right\} = (b+c)^2 (1 - \sin^2 \phi) = (b+c)^2 \cos^2 \phi.$$

$$\text{故ニ } a = (b+c) \cos \phi.$$

例 $b=456.12$, $c=296.86$, $A=74^\circ 20'$ ヨリ B, C, 及ビ

a ヲ求ム。

算式

$$\log \tan \frac{1}{2}(B-C) = \log(b-c) - \log(b+c) + \log \cot \frac{1}{2}A,$$

$$B+C=180^\circ - A,$$

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B.$$

B 及ビ C ノ計算

$$b=456.12$$

$$c=296.86$$

$$b-c=159.26$$

$$b+c=752.98$$

$$A=74^\circ 20'$$

$$\frac{A}{2}=37^\circ 10'$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 89^\circ 60'$$

$$\frac{B+C}{2} = 52^\circ 50'$$

$$\log b-c = 2.20211$$

$$-\log(b+c) = \bar{3}.12322$$

$$\log \cot \frac{A}{2} = 0.12026$$

$$\log \tan \frac{B-C}{2} = \bar{1}.44559$$

$$\frac{B-C}{2} = 15^\circ 35' 19''$$

$$\frac{B+C}{2} = 52^\circ 50'$$

$$B = 68^\circ 25' 19''$$

$$C = 37^\circ 14' 41''$$

a ノ計算

$$\log b = 2.65908$$

$$\log \sin A = \bar{1}.98356$$

$$-\log \sin B = 0.03155$$

$$\log a = 2.67419$$

$$a = 472.27$$

驗

$$\log \tan \frac{B}{2} + \log \tan \frac{C}{2} = \log(s-a) - \log s.$$

$$\frac{B}{2} = 34^\circ 12' 39''.5$$

$$\frac{C}{2} = 18^\circ 37' 20''.5$$

$$a = 472.27$$

$$b+c = 752.98$$

$$2s = 1225.25$$

$$s = 612.625$$

$$s-a = 140.355$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \bar{1}.83243$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \bar{1}.52759$$

$$\log \tan \frac{B}{2} + \log \tan \frac{C}{2} = \bar{1}.36002$$

$$-\log s = 3.21280$$

$$\log(s-a) = 2.14723$$

$$\log \frac{s-a}{s} = \bar{1}.36003$$

即チ此ノ二ツノ結果ハ僅ニ小數第五位ニ於テ1ノ差アルノミ。

例題

次ノ各ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ。

8. $a=9$, $b=6$, $C=60^\circ$.

9. $b=27$, $c=23$, $A=44^\circ 30'$.

10. $c=210$, $a=110$, $B=34^\circ 42'$.

47. 二邊(a, b)と其の一に對する角(A)とを知れるとき。

此ノ場合ニハ計算法ハ正弦比例ノ式ニ依ル可シ。

即チ $\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$

而シテ $C = 180^\circ - (A+B),$

從ヒテ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$

是等ノ公式ハ對數式ニ直スニ適ス可シ。然レドモ此ノ場合ニハ問題ハ恒ニ成立スルモノニアラズ。如何ニモ角 B ガ其ノ正弦ニ依リテ與ヘラレタルガ故ニ $\sin B < 1$, 從ヒテ $a > b \sin A$

ナルコトヲ要ス可ケレバナリ。

I. 上ノ要件ガ満足セラレタリトスレバ、角 B ニハ二ツノ値 B' , B'' ヲ得可ク、而シテ $B' + B'' = 180^\circ$.

是等ノ値ヲ、 C ヲ求ム可キ式ニ代入スレバ、 C ノ二ツノ値 C' 及ビ C'' ヲ得可シ。

故ニ題意ニ適スル二ツノ三角形ヲ得、然レドモ二ツノ三角形ガ恒ニ成立スルモノニアラズ。ソハ次ノ吟味ヨリ見ル可シ。

1°. A ヲ銳角ナリトス。同時ニ $a < b$ トスレバ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{ヨリ} \quad \sin A < \sin B,$$

即チ $A < B'$, 而シテ $A < B''$.*

* 茲ニ B' ハ銳角トス、從ヒテ B'' ハ其ノ補角ナルユエ勿論鈍角ナルベシ。

然ルニ $C' = 180^\circ - (A + B')$,

$$C'' = 180^\circ - (A + B'') = 180^\circ - (A + 180^\circ - B') = B' - A,$$

而シテ C ノ此ノ二ツノ値ガ正ナルコト明カナリ。

若シ $a > b$ トスレバ $\sin A > \sin B$,

故ニ $B' < A < B''$ 。

從ヒテ角 C'' ハ負トナルユエ $AB''C''$ ハ意味ナキモノトナル。

終ニ, $a < b$ トスレバ $\sin A = \sin B$,

コレヨリ $B' = A, B'' = 180^\circ - A$ 。

然ルトキハ C'' ハ零トナリ, 三角形 $AB''C''$ ハ成立セズ。

2°. A ヲ鈍角ナリトス。然ルトキハ a ハ b ヨリ大ナルコト明カナルユエ, $a \leq b$ ナル假定ハ最早成立セズ。而シテ $a > b$ ニ對シテハ C'' ハ負トナルユエ, 三角形 $AB''C''$ ハ成立セズ。

3°. A ヲ直角ナリトス。然ルトキハ又 $a \leq b$ ナル假定ハ成立セズ。而シテ $a > b$ ナルトキハ C'' ハ又負トナル。

II. 若シ $a = b \sin A$ ナルトキハ問題ハ成立ス。然レドモ此ノ場合ニハ直角三角形トナリ, 最早一ツノ解ヨリ外ニナシ。即チ $\sin B = 1, \therefore B = 90^\circ$,

$$C = 90^\circ - A, c = \frac{a \sin C}{\sin A} = a \cot A.$$

III. 終ニ, 若シ $a < b \sin A$ ナルトキハ問題ハ不能ナリ。

是等ノ吟味ヲ摘記スレバ次ノ如シ。*

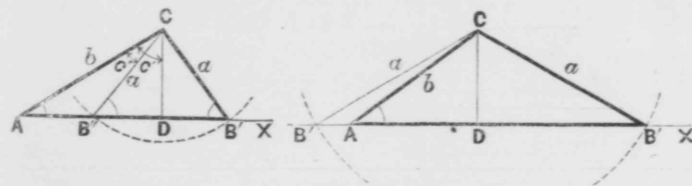
$$a > b \sin A \begin{cases} A < 90^\circ \begin{cases} a < b \text{ 二ツノ解アリ.} \\ a \geq b \text{ 一ツノ解アリ.} \end{cases} \\ A \geq 90^\circ \begin{cases} a \leq b \text{ 解ナシ.} \\ a > b \text{ 一ツノ解アリ.} \end{cases} \end{cases}$$

$$a = b \sin A \begin{cases} A < 90^\circ & \text{一ツノ解[直角三角形]アリ.} \\ A \geq 90^\circ & \text{解ナシ.} \end{cases}$$

$$a < b \sin A \quad \text{不能ナリ.}$$

* 是等ノ吟味ヲ明解セシメン爲ニ, 次ニ幾何學ノ解ヲ示スベシ。

A ヲ銳角トシ, A ニ等シキ角ヲ作り, 其ノ一邊上ニ b ニ等シキ長さ AC ヲ取り, C ヲ中心トシ, a ヲ半径トシテ圓ノ弧ヲ畫キ, 角 A ノ他ノ邊ヲ二點 B' 及ビ B'' ニ於テ截ラシム。然ルトキハ二ツノ角 $AB'C, AB''C$ ハ明カニ補角ナリ。邊 a ガ b ヨリ大ナル場合ニハ圓ノ弧ハ矢張り AX ヲ二點 B' 及ビ B'' ニ於テ截レドモ, 此ノ二點ハ A ノ異傍ニアリ。故ニ二ツノ三角形ノ一ハ與ヘラレタル角 A ヲ有セズシテ其ノ補角ヲ有ス, 依リテ此ハ問題ニ適セズ。



然ルニ圓ノ弧ガ邊 AX ニ交ル爲ニハ, a ガ垂線 CD ヨリ大ナルコトヲ要ス。悉ク云ヘバ $a > b \sin A$ 。若シ a ガ CD ニ等シキトキハ, 圓ハ邊

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

注意 上ノ計算ノ結果ハ44款ノ如ク公式

$$c = (a+b) \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

ヲ以テ驗スコトヲ得可シ。

例 $a=4945.2$, $b=5876.2$, $A=47^\circ 26'$ ヲ與ヘテ三角形

ヲ解ケ。 $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$
 $\log \sin B = \log 5876.2$

算式

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a,$$

$$C = 180^\circ - (A+B),$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

B及Cノ計算

$$\log b = 3.76910$$

$$\log \sin A = \bar{1}.86717$$

$$-\log a = \bar{4}.30581$$

$$\log \sin B = \bar{1}.94208$$

$$B = 61^\circ 3'43''$$

$$A = 47^\circ 26'$$

$$A+B = 108^\circ 29'43''$$

$$A+B+C = 179^\circ 59'60''$$

$$C = 71^\circ 30'17''$$

$$\text{或ハ } 118^\circ 56'17''$$

$$47^\circ 26'$$

$$166^\circ 22'17''$$

$$179^\circ 59'60''$$

$$13^\circ 37'43''$$

AXニ點Dニ於テ切ス。而シテ最早問題ニ適スルモノハ、一ツノ三角形[直角三角形]ヨリ外ニナシ。終ニaガCDヨリ小ナルトキハ、圓ハAXニ交ラズ又切セズ、而シテ問題ニ適スル三角形ナシ。Aガ鈍角又ハ直角ナル場合ニモ亦同様ニ論ジ得可シ。

cノ計算

$$\log a = 3.69419$$

$$\log \sin C = \bar{1}.97697$$

$$-\log \sin A = 0.13283$$

$$\log c = 3.80399$$

$$c = 6367.9$$

$$\text{或ハ } 3.69419$$

$$\bar{1}.37222$$

$$0.13283$$

$$3.19924$$

$$1582.1$$

驗

$$\log c = \log(a+b) + \log \sin \frac{1}{2}C - \log \cos \frac{1}{2}(B-A),$$

$$a = 4945.2$$

$$b = 5876.2$$

$$a+b = 10821.4$$

$$\frac{C}{2} = 35^\circ 45'8''.5$$

$$A = 47^\circ 26'$$

$$B = 61^\circ 3'43''$$

$$B-A = 13^\circ 37'43''$$

$$\frac{B-A}{2} = 6^\circ 48'51''.5$$

$$\log(a+b) = 4.03429$$

$$\log \sin \frac{C}{2} = \bar{1}.76662$$

$$-\log \cos \frac{B-A}{2} = 0.00308$$

$$\log c = 3.80399$$

$$c = 6367.9$$

$$\text{或ハ } 6^\circ 48'51''.5$$

$$47^\circ 26'$$

$$118^\circ 56'17''$$

$$71^\circ 30'17''$$

$$35^\circ 45'8''.5$$

$$4.03429$$

$$\bar{1}.07427$$

$$0.00308$$

$$3.19924$$

$$1582.1$$

例題

次ノ各ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ [11 乃至 13].

11. $b=379.4$, $c=483.7$, $B=34^{\circ}11'$. 角 γ ケ

12. $b=483.7$, $c=379.4$, $B=34^{\circ}11'$.

13. $B=40^{\circ}$, $b=140.5$, $a=170.6$.

14. 次ニ示ス (α) , (β) , (γ) ナル三ツノ場合ニ於テ兩意アルハ何レナルカ [本款ノ解中ニツノ三角形ヲ得ル場合ヲ時トシテハ兩意ノ場合ト稱ス].

(α) $A=30^{\circ}$, $a=125$, $c=250$.

(β) $A=30^{\circ}$, $a=200$, $c=250$.

(γ) $A=30^{\circ}$, $a=200$, $c=125$.

15. 三角形ノ三邊ガ 942, 812, 1270 ナルトキ面積ヲ求メヨ.

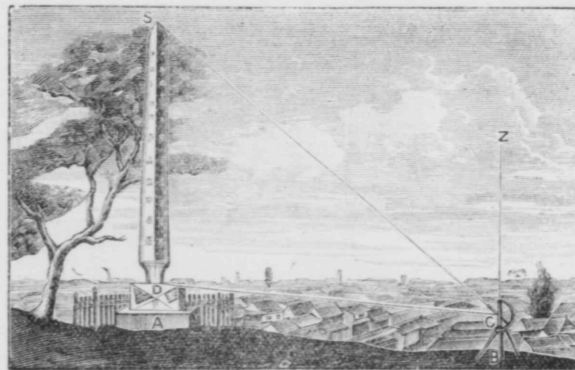
第七編

三角形解法の應用

48. 三角形ノ解法ヲ應用シテ距離及ビ高サノ測量ヲナスコトヲ得可シ.

49. 近づき得べき物の高さを測定すること. [但コノ物ハ測點ト同ジ水平面上ニアラス].

AS ヲ測定セントスル記念碑ノ高サトシ, 測器ノ高サニ等シキ高サ AD ヲ碑ニ記シ, 次ニ測器ヲ點 B



上圖ハ東京市九段坂上ノ西南戦争記念碑ナリ.

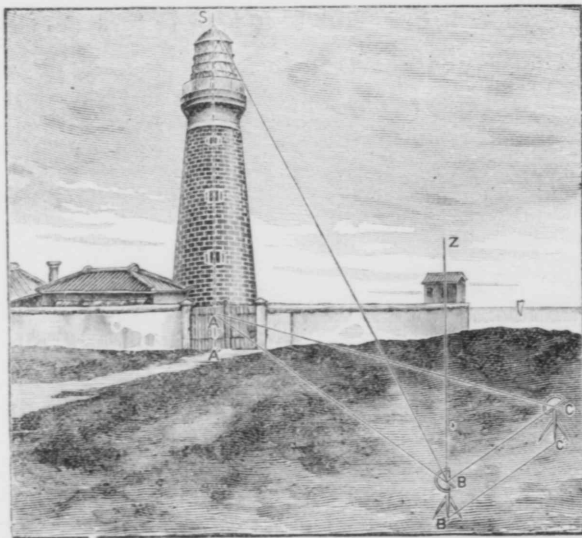
[距離 AB ハ測鎖ニテ豫メ測定セルモノトス]ニ移シ、然シテ順次ニ D 及ビ S ヲ覘望シテ角 DCS, SCZ ヲ測レバ、三角形 CSD ニ於テ邊 CD(=AB) ヲ既知シ、且角 DCS, DSC(=SCZ) ヲ既知スルユエ

$$SD = \frac{AB \sin DCS}{\sin SCZ},$$

從ヒテ 記念碑ノ高サ $h = \frac{AB \sin DCS}{\sin SCZ} + CB$.

50. 見得れども近づく可からざる物の高さを測定すること.*

SA' ヲ測定セントスル高サトシ、之ニ測器ノ高サ



AA' ヲ記シ、平地上ニ測定シ得ル基線 B'C' ヲ選ミ、其ノ兩端ニ順次ニ測器ヲ置キテ角 SBA, SBZ ヲ測リ、次ニ三點 A, B, C ノ平面内ニ於テ角 ABC, ACB ヲ測レバ、三角形 ABC ニ於テ邊 BC=B'C', 及ビ之ニ隣ルニツノ角ヲ知リタルユエ

$$AB = \frac{BC \sin ACB}{\sin(ACB + ABC)}$$

ナル式ヨリ AB ヲ計算シ得可ク、從ヒテ三角形 ABS ニ於テ邊 AB ハ計算ニ依リ、角 ABS, ASB(=SBZ) ハ直接ニ測リテ之ヲ知ル。故ニ A'S=h ハ

$$h = \frac{AB \sin ABS}{\sin SBZ} + BB'$$

ナル式ニ依リテ計算シ得可シ。或ハ AB = 其ノ値ヲ

$$\text{代入スレバ } h = \frac{BC \sin ACB \sin ABS}{\sin(ACB + ABC) \sin SBZ} + BB' +$$

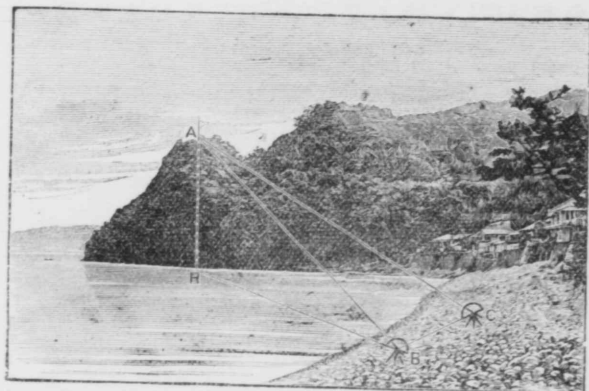
51. 山の高さを測定すること。

B ヲ測士ノ位置、A ヲ山ノ頂上トス。基線 BC ヲ測リ、點 B ニ測器ヲ置キテ仰角 ABH ヲ測リ、次ニ三點

* 近ヅキ得レドモ測點ヨリ高サノ証マアノ距離ヲ測鎖ニテ測定スルニ不便ナル場合モ亦之ニ準ズ、圖ハ下總國犬吠崎燈臺ノ寫生圖ニシテ此ノ例ニ屬ス。

† 測器ノ高サヲ加フルコトハ、恒ニ然カスベキモノナルユエ、以下之ヲ略ス。但コノ場合ニハ基底ヲ見ルニ妨ナケレバ、A ノ代リニ直チニ A' ヲ覘望スルヲ可ナリトス。

A, B, C ノ平面内ニ於テ角 ABC ヲ測リ、又點 C ニ於テ角 ACB ヲ測ル。然ルトキハ三角形 ABC ニ於テ、一邊及ビ二角ヲ定メ得タルユエ PA ヲ計算シ得ベシ。



即チ
$$BA = \frac{BC \sin ACB}{\sin(ACB + ABC)}.$$

次ニ直角三角形 ABH ニ於テ、斜邊及ビ一角ヲ知ル。

故ニ
$$AH = h = BA \sin ABH.$$

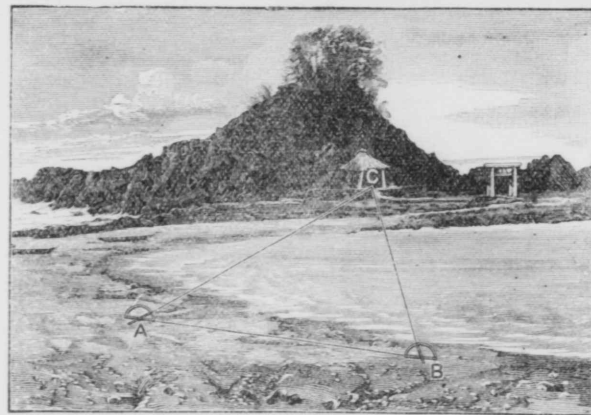
或ハ之ニ BA ノ値ヲ代入シテ

$$h = \frac{BC \sin ACB \sin ABH}{\sin(ACB + ABC)}.$$

52. 見得れども近づく可からざる一點に至る距離を測定すること。

上圖ハ相模國伊豆山温泉場ナリ。

AC ヲ測定セントスル距離トシ、適宜ノ方向ニ於テ基線 AB* ヲ測リ、順次ニ點 A 及ビ B ニ測器ヲ置キテ角 BAC, CBA ヲ測ル。然ルトキハ三角形 ABC ニ



於テ、一邊及ビ之ニ隣ル二ツノ角ヲ知レルユエ、此ノ三角形ヲ解キ得ベシ。

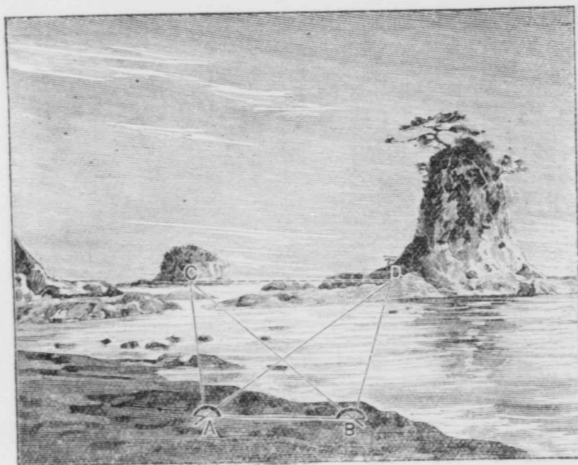
即チ
$$AC = \frac{AB \sin B}{\sin(A + B)}.$$

53. 見得れども近づく可からざる二點間の距離を測定すること。

* 基線 AB ノ方向ハ任意ナレドモ、三角形ノ角ヲ甚ダ小サクモ、亦甚ダ 180° ニ近クモアラザルヤウニ選ムヲ可ナリトス。

上圖ハ羽前國加茂港辨天島ナリ。

CDヲ測定セントスル所ノ距離トシ、Aヲ測士ノ位置トス。點Aヨリ適宜ノ方向ニ基線ABヲ測リ、次ニ點Aニ測器ヲ置キ、角CAB及ビDABヲ測定シ、



次ニ測器ヲ點Bニ移シ、角DBC, DBA, 及ビCBAヲ測レバ、三角形CABニ於テ一邊及ビ之ニ隣ルニツノ角ヲ知ル。故ニ邊BCヲ計算シ得可シ。

即チ
$$BC = \frac{AB \sin CAB}{\sin(CAB + CBA)}.$$

同様ニ三角形DABニ於テ、一邊及ビ之ニ隣ルニツノ角ヲ知ル。從ヒテ
$$BD = \frac{AB \sin DAB}{\sin(DAB + DBA)}.$$

上圖ハ安房國小湊蓮華ヶ淵ナリ。

終ニ、此ノ計算ヨリ邊BC、及ビBDヲ知レリ、加之直接ニ角DBCヲ測リテ知レルユエ、三角形DBCニ於テ二邊、及ビ其ノ夾角ヲ知レリ。依リテ此ノ三角形ヲ解キ得可ク、從ヒテ邊CDヲ求メ得可シ。

注意 若シ四點A, B, C, Dガ同一ノ平面上ニアルコトヲ知レバ、角DBCハニツノ角DBA, CBAノ差ナルヲ以テ直接ニ測ルニ及バズ。

例題

- 49款ニ於テ $AB=14.982$, $\widehat{DCS}=43^\circ 19'$, $\widehat{SCZ}=32^\circ 27'$, $CB=1.2$ ナルトキ記念碑ノ高サハ如何。但米突ヲ單位トス。
- 50款ニ於テ $BC=158.27$, $\widehat{ACB}=52^\circ 28'$, $\widehat{ABC}=61^\circ 19'$, $\widehat{ABS}=25^\circ 17'$, $\widehat{SBZ}=52^\circ 34'$, $BB'=1.2$ ナルトキ燈臺ノ高サヲ問フ。但米突ヲ單位トス。
- 51款ニ於テ $BC=577.19$, $\widehat{ACB}=58^\circ 25'$, $\widehat{ABC}=67^\circ 47'$, $\widehat{ABH}=39^\circ 38'$ ナルトキ山ノ高サヲ求メヨ。但測器ノ高サハ 1.25 ニシテ單位ハ米突トス。
- 52款ニ於テ $AB=248^m$, $A=39^\circ 28'$, $B=71^\circ 42'$ ナルトキACヲ求メヨ。

5. 53 款 = 於テ $AB=352^m$, $\hat{CAB}=95^\circ 17'$,
 $\hat{DAB}=41^\circ 28'$, $\hat{CBA}=53^\circ 36'$, $\hat{DBA}=103^\circ 51'$, $\hat{DBC}=57^\circ 43'$
 ナルトキ CD ヲ求メヨ.

54. 三角測量に於ては基線を測定する爲の器械と、角を測定する爲の器械とを要す.

基線ヲ測ルニハ、測量ス可キ區域ガ極メテ狹小ナルトキハ、測鎖ヲ用フレバ可ナリ、併シ全國測量ノ如キハ、基線ノ測定極メテ精密ヲ要スルガ故ニ、鋼製ノ直杆ヲ用ヒテ數回コレヲ測度シ、一温度ヲ檢シテ其ノ直杆ノ伸縮ヲ計算スルコトヲ要ス.

我ガ國ニ於テ、目下陸地測量部ニテ引キタル基線ノ長程概算ハ次ノ如シ、但米突ヲ單位トス.

相模國高座郡	相模原基線	5209.970.
遠江國濱名郡	三方原基線	10839.770.
近江國高島郡	饗庭野基線	3065.724.
阿波國阿波郡	西林村基線	3832.212.
伯耆國久米郡	天神野基線	3301.805.
筑後國三井郡	久留米基線	3161.007.
大隅國肝屬郡	笠野原基線	5875.509.
羽前國最上郡	鹽野原基線	5129.587.
信濃國上高井郡	須 阪基線	3291.912.

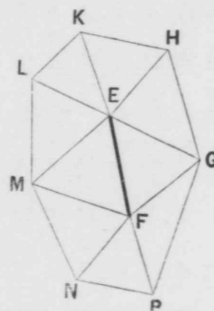
陸奥國三戸郡	鶴兒平基線	4006.031.
石狩國札幌郡	札幌基線	4539.770.
根室國目梨郡	薰別基線	4069.850.
北見國宗谷郡	聲問基線	2677.503.
琉球國中頭郡	沖繩基線	4151.677.

角ヲ測ルニハ轉鏡經緯儀、又ハ六分儀ナドヲ用フルヲ通例ナリトス.

55. 地面を測量するには通例夥多の三角形を連接し、之を三角網といふ.

EF ハ基線ニシテ之ヲ精測シ、其ノ周圍ニ圖ノ如ク三角網ヲ作り、各角ヲ精測シ、之ヲ最小二乘法ニテ平均シ、其ノ結果ヲ用ヒテ各三角形ノ邊ヲ求ムルナリ.

一ノ基線ニ依リ三角網ヲ通シテ計算シタル線ハ、漸次ニ誤差ヲ大キクスルヲ以テ全國測量ノ如キ、數ヶ所ニ基線ヲ設クルノ必要アリ.

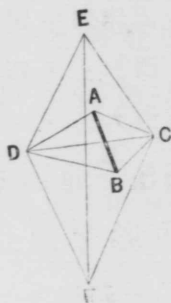


56. 三角測量に於ては、通例一等 [Primary], 二等 [Secondary], 三等 [Tertiary] に分つ.

我ガ國ノ一等三角ハ、其ノ邊ノ中等距離約ソ60軒

ニシテ、二等三角ノ一邊ノ中等距離ハ約ソ12軒、三等三角ノ一邊ノ中等距離ハ約ソ4軒トス。

基線 AB ノ長サヲ測定シ、他ニ二點 C, D ヲ選取シ [C, D ヲ選取スルニハ、二ツノ角 ACB, ADB ヲシテ約ソ 34° 以上 60° 以下ナラシム可シ] CD ノ長サヲ算出シ、又他ニ二點 E, F ヲ選取シ [前ト同様ニ] テ EF ノ長サヲ算出ス、而シテ斯ク基線 AB ヲ CD ニ増大シ、又 CD ヲ EF ニ増大シ、此ノ EF ヲ一等三角ノ基線ニ取ルモノトス。



本書ノ卷首ニ掲ゲタル圖ハ、陸地測量部ニテ實測シタル一等三角網圖ノ一片ナリ。*

此ノ圖ニ於テ A ヲ下溝村ニアル相模野基線ノ北端トシ、B ヲ座間村ニアル相模野基線ノ南端トスレバ、此ノ基線ヲ長津田村及ビ鷲尾山ニ増大シタルモノハ CD ニシテ、再ビ之ヲ EF ニ増大シ、F ハ淺間山ニ取リ、E ハ連光寺村ノ一等點トナル。

各測點ニハ花崗石ニ、其ノ何等測點タルコトヲ刻

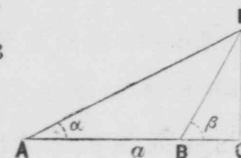
* 陸地測量部ノ地圖ハ上方ヲ北トスル定メタルユエ方位ヲ記入セザルヲ通例ナリトス。

シタルモノヲ埋メ永遠ニ保存シ、本邦ニ於ケル各種ノ測量ハ皆コレニ憑據セシム。

例題

- ⑥ 6. 水平線 ABC 上ニアル高サ PC ヲ求メン爲ニ、點 A ニ於テ仰角 α 度ヲ測リ、點 B ニ於テ仰角 β 度ヲ測レリ、而シテ AB ノ長サガ a ナルトキハ

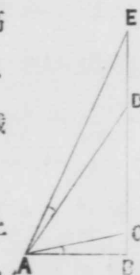
$$PC = a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\beta - \alpha)$$



ナルコトヲ證セヨ。

- ⑦ 7. 或人山ノ高サヲ測ラント欲シ、某所ニテ其ノ山頂ノ仰角 15° ヲ測リ、ソレヨリ山ニ向ヒテ水平線上1里進ミテ、又其ノ山頂ノ仰角 75° ヲ測レリ、山ノ高サ如何。

- ⑧ 8. 高サ10尺ノ城壁ノ上ニ立テル高サ20尺ノ旗竿ヲ、地上ノ一點ニ於テ含ム角ノ正切ガ0.5ナルトキ、同ジ點ニ於テ城壁ノ高サヲ含ム角ノ正切ハ如何。



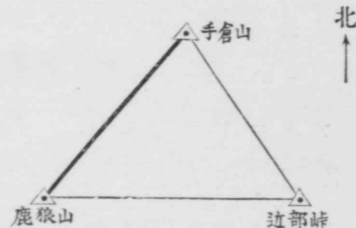
- ⑨ 9. 水平面上ニ立テル塔 BCD ノ頂上ニ塔尖 DE アリ、水平線 BA ノ一端 A ヲ

リ BC 及ビ DE ガ等角ヲ含ムコトヲ見ル.

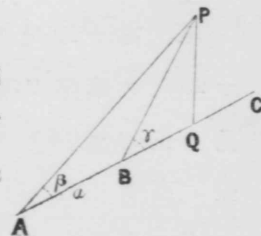
今 $BC=9^R$, $CD=72^R$, $DE=36^R$ ナルトキハ, BA ノ長サ如何.

10. 塔ノ基底ト何ジ水平面上ノ一點ニ於テ, 其ノ塔ノ高サガ仰角 α ヲ含ミ, 又其ノ點ノ直上 a 尺ノ所ニ登リシニ, 塔ノ仰角 β トナレリ, 然ルトキハ塔ノ高サ h ハ $a \cos \beta \sin \alpha \operatorname{cosec}(\alpha - \beta)$ ナルコトヲ證セヨ.

11. 磐城國相馬郡内手倉山ト鹿狼山トノ距離ハ $9062^{\text{米}} \cdot 4$, 手倉山ヨリ鹿狼山ト近部峠トヲ含ム角ハ $64^\circ 22' 38''$ ニシテ, 鹿狼山ヨリ手倉山ト近部峠トヲ含ム角ハ $53^\circ 36' 47''$ ナリ, 然ラバ手倉山, 及ビ鹿狼山離如何.*



12. 垂直ノ向キト角 α ヲナス斜面 ABC 上ニ立ツ塔 PQ アリ. 點 A 及ビ B ニ於テ, 塔ヲ含ム角ガソレゾレ β 及ビ γ ニシテ, $AB=a$ ナルトキ, 塔ノ高サ h ヲ求メヨ.



* 此ノ問題ノ材料ハ某局技師ノ實測ニ取レリ, 然レドモ此ハ單

13. ABCD ハ P ト同ジ水平面上ニ立ツ記念碑トス. 點 P ニ於テ AB, AC, AD ナル部分ガ, ソレゾレ角 α, β, γ ヲ含ムコトヲ見ル. 今 $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$, $AP=x$ 及ビ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ナルトキハ $(a+b+c)x^2 = abc$ ナルコトヲ證セヨ.

14. 岩アリ, 某點ニ於テ之ヲ觀測セシニ仰角 47° ナリ, ソレヨリ岩ニ向ヒテ斜面上ヲ 1000 尺進ミシニ, 其ノ岩ノ仰角 77° トナレリ, 依リテ始ノ觀測點上岩ノ垂直高ヲ求メヨ. 但斜面ノ傾斜ハ 32° トス.

15. 登リ $\frac{1}{6}$ ナル阪路ノ長サヲ 1 里 24 町トスルトキ, 登リ $\frac{1}{12}$ ニシテ前ト同ジ高サニ達スル阪路ノ長サ幾里ナルカ.

16. 水平面上ニ立テル塔アリ, 此ノ塔ヲ距ルコト 48 尺, 水平面上 14 尺ノ高サノ一點ヨリ塔ノ窓ノ上部ト下部トガ相等シキ角ヲ含ムコトヲ觀測セリ. 今水平面上窓ノ高サハ 30 尺ナリトセバ塔ノ高サ如何.

17. 水平面上ノ三角形 ABC ニ於テ $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ ナリ, 今 C ニ一ノ塔アリ, 其ノ高サ $CD=h$ ニシテ角 ADB ハ δ ナルトキ, 塔ノ高サ h ハ如何.

ニ實測ノ結果ヨリ作圖セルモノニシテ, 實測ニ於テハ斯ク簡單ナルモノニアラザルコトハ斷リ置ク.

18. 塔 AB ノ上ニ旗竿 BC フ立テタルモノアリ、塔ノ基底ト同水平面上ニ於テ BC フ最大ノ角ニ見ル點 E ハ塔ヨリ c 尺ノ所ニアリ然ラバ塔ノ高サハ

$$c \tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

旗竿ノ高サハ $2c \tan \alpha$ ナルコトヲ證セヨ。但 $\widehat{BEC} = \alpha$ 。

19. 球狀ノ輕氣球アリ、其ノ半徑ハ r トス、而シテ之ヲ某所ニ於テ望ムニ角 α フ含ミ、其ノ中心ノ仰角ハ β ナリト云フ、然ラバ輕氣球ノ高サハ $r \sin 3 \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \alpha$ ナルコトヲ證セヨ。

20. 學校ノ建物ノ長サガ、某點ニ於テ 30° ノ角ヲ含ムコトヲ觀測セリ、然ラバ其ノ建物ノ兩端ト測點トヲ過ル圓ノ徑ハ建物ノ長サノ 2 倍ナルコトヲ證セヨ。

21. 二點 A, B ノ距離ガ同水平面上ノ二點 C, D ニ於テ相等シキ角ヲ含ムコトヲ知リテ

$$AB \sin CBD = CD \sin ADB$$

ナルコトヲ證セヨ。

22. ABC ハ水平面上ニアリテ C フ直角トセル三角形ナリトス、今 B 及ビ C ヨリ A ニ於ケル塔ノ仰角ヲ測リシニ、ソレゾレ 15° 及ビ 45° ナリト云フ、然ラバ

$$\tan B = \frac{1}{2} \{3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}}\}$$

ナルコトヲ證セヨ。

23. A, B, C ハ路傍ニ於テ相等シキ間隔ヲ有スル三ツノ電信柱トシ、 τ, τ' ハ點 P ニ於テ AB, BC フ含ム角ノ正切トシ、T ハ PB ヲ路 BC トナス角ノ正切ナリトスルトキハ $\frac{2}{T} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}$ ナルコトヲ證セヨ。

附 録

對 數

1. 若シ $x=a^m$ ナルトキハ、 m ハ a ナル底ニ於ケル
 x ノ對數ト稱シ、之ヲ $m=\log_a x$

トシテ表ハス

實用ニ行ハルル對數ハ10底ノ對數ニシテ之ヲ集
録シタル表アリ.*

2. 次ニ示スハ底ノ如何ヲ論ゼズ、對數一般ノ性
質ナリ。

$$(1) \log_a mn = \log_a m + \log_a n.$$

$$(2) \log_a (m \div n) = \log_a m - \log_a n.$$

$$(3) \log_a m^r = r \log_a m.$$

$$\text{例ヘバ } \log_{10} 6 = \log_{10} (3 \times 2) = \log_{10} 3 + \log_{10} 2.$$

$$\log_{10} (7 \div 3) = \log_{10} 7 - \log_{10} 3.$$

$$\log_{10} 5^4 = 4 \log_{10} 5,$$

$$\text{及ビ } \log_{10} \sqrt[3]{3} = \log_{10} 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{10} 3.$$

* 同若者ノ新對數表ハ、アラユル四桁ノ數ノ對數ヲ集録セリ、此
ノ表ハ1ヨリ10000マデハ勿論、ソレ以上ノ數ノ對數モ或程度マ
デハ求メ得可シ。

但10底ノ對數ハ、通例10ヲ略シテ單ニ $\log$ ト記スル
モノトス。

$$3. \text{ 例ヘバ } 10^0=1, \quad \therefore \log 1=0.$$

$$10^1=10, \quad \therefore \log 10=1.$$

$$10^2=100, \quad \therefore \log 100=2.$$

$$10^3=1000, \quad \therefore \log 1000=3.$$

$$10^4=10000, \quad \therefore \log 10000=4.$$

.....

是ニ依リテ整數部ガ二桁ナル數ノ對數ノ整數部
ハ1、整數部ガ三桁ナル數ノ對數ノ整數部ハ2、.....、
即チ對數ノ整數部ハ恒ニ整數ノ桁數ヨリ一少ナシ。
對數ノ整數部ヲ指標ト云ヒ、小數部ヲ假數ト云フ。

4. 茲ニ任意ノ數、例ヘバ 6783.6 アルトキ、表ヨリ

$$\log 6783.6 = 3.83146.$$

若シ 6783.6 ヲ順次ニ 10, 100, ニテ除スレバ、2 款
ノ (2) ヨリ、其ノ對數ハ 1, 2, ダケ減少スベシ。

$$\text{依リテ } \log 678.36 = 2.83146,$$

$$\log 67.836 = 1.83146,$$

$$\log 6.7836 = 0.83146,$$

$$\log 0.67836 = \bar{1}.83146,$$

$$\log 0.067836 = \bar{2}.83146,$$

$$\log 0.0067836 = \bar{3}.83146.$$

.....

依リテ整數位ガー桁ヨリ成レル數ノ對數ノ指標ノ
0, 小數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ, 其ノ絶對値ハ小
數點ト第一有効數字トノ間ノ零ノ數ヨリ一多シ.

例 題

1. $\log_4 4$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, $\log_3 \sqrt{27}$ ノ値ヲ求メヨ.
2. $\log_3 13$, $\log_{13} 3$, $\log_7 350$ ノ指標ヲ問フ.
3. $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, $\log 7 = 0.84510$ ヲ與ヘ
テ $\sqrt[3]{6}$, 0.6, 0.0015, 4.05, 3.43 ノ對數ヲ問フ.
4. 2^{17} ニ於ケル數字ノ數ヲ問フ.
5. $8^x = 4^y$, $16^y = 32(2^x)$ ヲ解ケ.

對數表用法

本書第一表ハ, 1 ヨリ 2000 マデノ數ニ對スル五桁
ノ對數ノ假數ノミヲ掲ゲタルモノニシテ, 其ノ用法
ハ次ノ如シ.*

I. 或數ノ對數ヲ求ムルコト.

(1) 1 ヨリ 2000 マデノ間ニアル數ノ對數ハ直チ
ニ次ノ方法ニテ求メ得可シ.

例ヘバ 1374 ノ對數ヲ求メンニ, 表ノ最モ左ノ端 N.
字ノ行ニ於テ始ノ三桁 137 ニ相當スル數ヲ求メ, 此
ノ頁ノ最モ上ノ列ニ於テ最後ノ數 4 ヲ求メ, 137 ト
同ジ橫列ニ在リテ且 4 ト同ジ縱行ニ於ケル數 799 ヲ
求メ, 此ノ 799 ト同ジ橫列ニ於テ, 假數中ノ最モ左ノ
端ニ於ケル空地ヲ上ノ方ニ見上ゲテ, 最初ニ得ベキ
13 ヲ此ノ 799 ノ前ニ添加シ 13799 トシタルモノハ, 即
チ 1374 ノ對數ノ假數ナリ. 然ルニ 1374 ノ對數ノ指
標ハ 3 ナルヲ以テ $\log 1374 = 3.13799$.

* 2000 ヨリ大ナル數ノ對數ト雖モ, 或程度マデハ求メ得可シ.
例ヘバ 38572 ノ對數ヲ求メンニハ, 385 ノ對數, 及ビ之ト 386 ノ對數
トノ差ヨリ求メ得ラルルガ如シ.

若シ他ノ數ニ於テ、此ノ 799 ニ相當シタル數ヲ求メタルトキ、此ノ數ノ左ノ裾ニ * 形ヲ附シタルモノニ遭遇セバ、假數ノ左端ノ空地ヲ上ノ方ニ見上ゲズシテ下ノ方ニ見下シ、最初ニ得タル數ヲ添加ス可キモノトス。例ヘバ 186.5 ノ對數ヲ求ムルニハ、前ト同様ノ方法ニテ、186 ト同ジ横列ニテ 5 ト同ジ縦行ニ相當スル數 068 ヲ求ムレバ、此ノ數ノ左ノ裾ニ * 形アルヲ以テ、此ノ左端ノ空地ヲ下ノ方ニ見下シテ得タル 27 ヲ添加シタル 27068 ハ所要ノ假數ナリ。依リテ之ニ指標 2 ヲ更ニ添加シテ得タル 2.27068 ハ所要ノ對數ナリ。

(2) 2000 ヨリ大ナル數ノ對數。

例ヘバ 17968 ノ對數ヲ求ム。

先ツ (1) ノ方法ニテ 1796 ニ相當スル假數ヲ求ムレバ 25431 ヲ得、更ニ之ニ隣レル數 1797 ニ相當スル假數ヲ求ムレバ 25455 ヲ得、故ニ眞數 1 ニ對應スル對數ノ差ハ $25455 - 25431 = 24$ ナリ。眞數ノ差ハ對數ノ差ト互ニ比例スルモノニアラザレドモ、假ニ之ヲ比例スルモノトスルモ、其ノ差ハ多クノ場合ニ於テ極メテ小ナリ、故ニ近似値ニ於テ之ヲ比例スルモノト見做シ得ベシ。然ルトキハ 1796.8 ト 1796 トノ對數ノ差

・ 次ノ比例式ニ適スル x ノ値ナリ、即チ

$$1:0.8=24:x, \text{ [但 } 0.8=1796.8-1796\text{].}$$

然ルトキハ $x=19.2$.

鼠ニ所題ノ 17968 ノ對數ハ $25431+19=25450$ ナリ。然レドモ斯様ニ一ニ比例式ヲ作リテ計算スルコトハ甚ダ面倒ナリ。假數ノ右ノ端ニ於ケル P.P. ノ欄ハ此ノ勞ヲ省ク爲ニ用フ可キ表ニシテ、之ヲ用フレバ今ノ 17968 ノ對數ハ、次ノ如クシテ求メ得可シ。

1796 ニ對スル假數 25431. 此ノ隣ノ數 1797 ニ對スル假數 25455 ト今ノ假數トノ差ハ 24 ナリ。P.P. ノ欄ニテ太字ニテ 24 ト書キタル數ヲ求メ、此ノ數ノ下ニテ縦線ノ左ニ於ケル 8 ノ列ビニテ 19.2 ヲ求メ、之ヲ 25431 ニ加ヘタル 25450 ハ所要ノ對數ナリ。

II. 或對數ニ對應スル數ヲ求ムルコト。

假數ガ表中ニアルモノハ、直チニ其ノ眞數ヲ求メ得可シ。

例ヘバ $\log^{-1} 1.87157^*$

ニ對應スル眞數ヲ求メンニハ、先ヅ假數 87157 ニ對應スル眞數ヲ求ムレバ 744 ナリ、而シテ指標ハ 1 ナルヲ以テ、之ヲ小數點ノ上位ガ 2 桁トナル様ニ小數點ヲ打チテ 74.4 トスレバ、コレ所要ノ眞數ナリ。

三角函數の對數表用法

此ノ表ニ於テ特ニ注意ス可キコトハ、表中指標ノ負トナルヲ避クル爲ニ、對數ノ値ニシテ負トナルベキモノ〔即チ函數ノ値ニシテ1ヨリ小ナルベキモノ〕即チ $\sin$, $\cos$. 全體、及ビ 45° 以下ノ $\tan$. 及ビ 45° 以上ノ $\cot$. ニハ悉ク10ヲ加ヘ置キタリ、依リテ斯カルモノニ遭遇セバ、表中ノ數ヨリ10ヲ減ジタルモノガ眞ノ對數ノ値ナルコトヲ忘ルベカラズ。對數ノ負トナラザルモノ、即チ 45° 以上ノ $\tan$. 及ビ 45° 以下ノ $\cot$ ニハ10ヲ加ヘザルモノトス。而シテ此ノ表ノ用法ハ下ノ例ニテ見ルベシ。

例 1. $\log \sin 22^\circ 40'$ ヲ求メヨ。

表ノ左ノ端ノ $^\circ$ ノ行ニテ度數22ノ所ヲ求メ、又次ノ行ニテ40ノ所ヲ求メ、此ノ40ノ列ヲ横ニタドリテ $\sin$. ヲ戴ケル行マデ來レバ 9.58588 ヲ得。依リテ

$$\log \sin 22^\circ 40' = 9.58588 - 10.$$

例 2. $\log \sin 34^\circ 20' 30''$ ヲ求メヨ。

例 1 ノ場合ノ如クシテ $\sin 34^\circ 20'$ ニ對スル $\log$ ハ 9.75128-10 ナリ、而シテ此ノ欄ノ右ノ行 D. ノ字ノ下

ニ於テ、此ノ對數ト其ノ次ノ對數トノ中間ニ 185 トアリ、コレ10分ニ對スル差ナルヲ以テ30秒、即チ 0.5 ニ對スル差ハ $10:0.5=185:x$ ナル比例式ヨリ得ベク、即チ $x=9.25$ ナリ。故ニ

$$9.75128 - 10 + 0.00009 = 9.75137 - 10$$

ハ所要ノ對數ナリ。

而シテ茲ニ注意スベキコトハ三角函數ノ値ハ角ノ増加ニ伴レテ増加スルモノト、或ハ角ノ増加ニ伴レテ反對ニ減少スルモノトアリ、角ノ増加ニ伴レテ増加スルモノ、即チ $\sin$., $\tan$. ニ於テハ比例ニテ得タル差ヲ加ヘ、角ノ増加ニ伴レテ減少スルモノ、即チ $\cos$., $\cot$. ニ於テハ比例ニテ得タル數ヲ減ゼザル可カラズ。 45° 以上ノ角ノ三角函數ノ對數ハ表ノ下底ニテ各其ノ函數ヲ求メ、度分ハ表ノ右ノ端ノ行ニテ求ムベシ。

三角函數ヲ與ヘテ角度ヲ求ムルニハ、前ノ用法ヲ逆用シテ之ヲ得可シ。

三角函數表用法

此ノ表ノ用法ハ前二表ニ準ジテ自ラ明カナラン

注 意

I. 止ム可キ位[第五位]ノ次ノ値[第六位及ビソレヨリ後]ガ、其ノ原位ノ $0^{\text{m}}.5$ ヨリ大ナラバ止ム可キ位ニ.1ヲ加ヘ以下切リ棄ツ、例ヘバ 0.243867 ヲ 0.24387トスルガ如シ、此ノ場合ニ4ヲ5トシタルトキハ5ノ如ク上ニ横線ヲ引ク。

II. 止ム可キ位ノ次ノ値ガ、其ノ位ノ $0^{\text{m}}.5$ ヨリ小ダラバ單ニ切リ棄ツ、例ヘバ 0.134624 ヲ 0.13462トスルガ如シ、此ノ場合ニ切リ棄テタル結果ノ末位ガ5トナラバ、5ノ如ク點ヲ打ツモノトス。

III. 止ム可キ位ノ次ノ値ガ、丁度其ノ原位ノ $0^{\text{m}}.5$ ナルトキハ、止ム可キ位ガ奇數ナラバ1ヲ繰リ上ゲ、偶數ナラバ單ニ切リ棄ツ可シ。

$$\begin{array}{l} \log 6.789 \\ \log 6.78 = 0.83123 \\ \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 57.6 \\ \hline \log 6.789 = 0.83181 \end{array} \quad \begin{array}{r} .83187 \\ .83123 \\ \hline 64 \times \frac{9}{10} \\ \quad \quad 9 \\ \hline 57.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \angle A: 56^{\circ} 28' \\ \angle A: 56^{\circ} 20' = 9.92027 \\ \quad \quad \quad 3' \quad \quad \quad 25.2 \\ \hline \angle A: 56^{\circ} 23' = 9.92052 \end{array} \quad \begin{array}{r} \angle 10' \text{ 差} \\ \frac{84}{10} \times 3 = 25.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log a = 2.70505 \\ \log 511 = 2.70842 \\ \quad \quad \quad 0.74 \quad \quad \quad 63 \\ \hline \log 511.74 = 2.70505 \\ \quad \quad \quad A = 511.74 \end{array} \quad \begin{array}{r} .70927 \\ .70842 \\ \hline 85 \\ \frac{1 \times 63}{85} = 0.74 \end{array}$$

附 表

(I) 1—2000ノ五桁ノ對數表

(II) 十分飛ノ三角函數ノ對數表 $\frac{5}{5}$ $\frac{33}{33}$

(III) 十分飛ノ三角函數表 $\frac{5}{5}$ $\frac{33}{33}$

$$\begin{array}{l} \angle A = 9.92347 \\ \angle A: 56^{\circ} 50' = 9.92277 \\ \quad \quad \quad 8'32'' = \quad \quad \quad 70 \\ \hline \angle A: 56^{\circ} 58'32'' = 9.92347 \\ \quad \quad \quad A = 56^{\circ} 58'32'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{101}{82} \times 70 = 8'32'' \\ \frac{101}{82} \times 70 = 8'32'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \angle C: 32^{\circ} 47'52'' = \\ \angle C: 32^{\circ} 40' = 9.92522 \\ \quad \quad \quad + 7'52'' = \quad \quad \quad -64 \\ \hline \angle C: 32^{\circ} 47'52'' = 9.92458 \\ \angle C: A = 9.73653 \\ \angle C: 57^{\circ} = 9.73611 \\ \quad \quad \quad 2.2'10'' = \quad \quad \quad +42 \\ \hline \angle C: 56^{\circ} 57'50'' = 9.73653 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{81}{10} \times \frac{52}{60} = 64 \\ \frac{101}{194} \times 42 = 2'10'' \end{array}$$

N.	L.0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424	
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

N.	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
50	69	897	69	984	70	070	70	157	70	243	70	329	70	415	70	501	70	586	70	672
51	70	757	70	842	70	927	71	012	71	096	71	181	71	265	71	349	71	433	71	517
52	71	600	71	684	71	767	71	850	71	933	72	016	72	099	72	181	72	263	72	346
53	72	428	72	509	72	591	72	673	72	754	72	835	72	916	72	997	73	078	73	159
54	73	239	73	320	73	400	73	480	73	560	73	640	73	719	73	799	73	878	73	957
55	74	036	74	115	74	194	74	273	74	351	74	429	74	507	74	586	74	663	74	741
56	74	819	74	896	74	974	75	051	75	128	75	205	75	282	75	358	75	435	75	511
57	75	587	75	664	75	740	75	815	75	891	75	967	76	042	76	118	76	193	76	268
58	76	343	76	418	76	492	76	567	76	641	76	716	76	790	76	864	76	938	77	012
59	77	085	77	159	77	232	77	305	77	379	77	452	77	525	77	597	77	670	77	743
60	77	815	77	887	77	960	78	032	78	104	78	176	78	247	78	319	78	390	78	462
61	78	533	78	604	78	675	78	746	78	817	78	888	78	958	79	029	79	099	79	169
62	79	239	79	309	79	379	79	449	79	518	79	588	79	657	79	727	79	796	79	865
63	79	934	80	003	80	072	80	140	80	209	80	277	80	346	80	414	80	482	80	550
64	80	618	80	686	80	754	80	821	80	889	80	956	81	023	81	090	81	158	81	224
65	81	291	81	358	81	425	81	491	81	558	81	624	81	690	81	757	81	823	81	889
66	81	954	82	020	82	086	82	151	82	217	82	282	82	347	82	413	82	478	82	543
67	82	607	82	672	82	737	82	802	82	866	82	930	82	995	83	059	83	123	83	187
68	83	251	83	315	83	378	83	442	83	506	83	569	83	632	83	696	83	759	83	822
69	83	885	83	948	84	011	84	073	84	136	84	198	84	261	84	323	84	386	84	448
70	84	510	84	572	84	634	84	696	84	757	84	819	84	880	84	942	85	003	85	065
71	85	126	85	187	85	248	85	309	85	370	85	431	85	491	85	552	85	612	85	673
72	85	733	85	794	85	854	85	914	85	974	86	034	86	094	86	153	86	213	86	273
73	86	332	86	392	86	451	86	510	86	570	86	629	86	688	86	747	86	806	86	864
74	86	923	86	982	87	040	87	099	87	157	87	216	87	274	87	332	87	390	87	448
75	87	506	87	564	87	622	87	679	87	737	87	795	87	852	87	910	87	967	88	024
76	88	081	88	138	88	195	88	252	88	309	88	366	88	423	88	480	88	536	88	593
77	88	649	88	705	88	762	88	818	88	874	88	930	88	986	89	042	89	098	89	154
78	89	209	89	265	89	321	89	376	89	432	89	487	89	542	89	597	89	653	89	708
79	89	763	89	818	89	873	89	927	89	982	90	037	90	091	90	146	90	200	90	255
80	90	309	90	363	90	417	90	472	90	526	90	580	90	634	90	687	90	741	90	795
81	90	849	90	902	90	956	91	009	91	062	91	116	91	169	91	222	91	275	91	328
82	91	381	91	434	91	487	91	540	91	593	91	645	91	698	91	751	91	803	91	855
83	91	908	91	960	92	012	92	065	92	117	92	169	92	221	92	273	92	324	92	376
84	92	428	92	480	92	531	92	583	92	634	92	686	92	737	92	788	92	840	92	891
85	92	942	92	993	93	044	93	095	93	146	93	197	93	247	93	298	93	349	93	399
86	93	450	93	500	93	551	93	601	93	651	93	702	93	752	93	802	93	852	93	902
87	93	952	94	002	94	052	94	101	94	151	94	201	94	250	94	300	94	349	94	399
88	94	448	94	498	94	547	94	596	94	645	94	694	94	743	94	792	94	841	94	890
89	94	939	94	988	95	036	95	085	95	134	95	182	95	231	95	279	95	328	95	376
90	95	424	95	472	95	521	95	569	95	617	95	665	95	713	95	761	95	809	95	856
91	95	904	95	952	95	999	96	047	96	095	96	142	96	190	96	237	96	284	96	332
92	96	379	96	426	96	473	96	520	96	567	96	614	96	661	96	708	96	755	96	802
93	96	848	96	895	96	942	96	988	97	035	97	081	97	128	97	174	97	220	97	267
94	97	313	97	359	97	405	97	451	97	497	97	543	97	589	97	635	97	681	97	727
95	97	772	97	818	97	864	97	909	97	955	98	000	98	046	98	091	98	137	98	182
96	98	227	98	272	98	318	98	363	98	408	98	453	98	498	98	543	98	588	98	632
97	98	677	98	722	98	767	98	811	98	856	98	900	98	945	98	989	99	034	99	078
98	99	123	99	167	99	211	99	255	99	300	99	344	99	388	99	432	99	476	99	520
99	99	564	99	607	99	651	99	695	99	739	99	782	99	826	99	870	99	913	99	957
100	00	000	00	043	00	087	00	130	00	173	00	217	00	260	00	303	00	346	00	388

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	44 43 42
101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1 4.4 4.3 4.2
102		860	903	945	988	030	072	115	157	199	242	2 8.8 8.6 8.4
103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3 13.2 12.9 12.6
104		703	745	787	828	870	912	953	995	036	078	4 17.6 17.2 16.8
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5 22.0 21.5 21.0
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6 26.4 25.8 25.2
107		938	979	019	060	100	141	181	222	262	302	7 30.8 30.1 29.4
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8 35.2 34.4 33.6
109		743	782	822	862	902	941	981	021	060	100	9 39.6 38.7 37.8
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	41 40 39
111		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	1 4.1 4.0 3.9
112		922	961	999	038	077	115	154	192	231	269	2 8.2 8.0 7.8
113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3 12.3 12.0 11.7
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	032	4 16.4 16.0 15.6
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5 20.5 20.0 19.5
116		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	6 24.6 24.0 23.4
117		819	856	893	930	967	004	041	078	115	151	7 28.7 28.0 27.3
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8 32.8 32.0 31.2
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9 36.9 36.0 35.1
120		918	954	990	027	063	099	135	171	207	243	38 37 36
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1 3.8 3.7 3.6
122		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2 7.6 7.4 7.2
123		991	026	061	096	132	167	202	237	272	307	3 11.4 11.1 10.8
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4 15.2 14.8 14.4
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	003	5 19.0 18.5 18.0
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6 22.8 22.2 21.6
127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7 26.6 25.9 25.2
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	025	8 30.4 29.6 28.8
129	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	9 34.2 33.3 32.4
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	35 34 33
131		727	760	793	826	860	893	926	959	992	024	1 3.5 3.4 3.3
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2 7.0 6.8 6.6
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3 10.5 10.2 9.9
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	001	4 14.0 13.6 13.2
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5 17.5 17.0 16.5
136		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	6 21.0 20.4 19.8
137		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	7 24.5 23.8 23.1
138		988	019	051	082	114	145	176	208	239	270	8 28.0 27.2 26.4
139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9 31.5 30.6 29.7
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	32 31 30
141		922	953	983	014	045	076	106	137	168	198	1 3.2 3.1 3.0
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2 6.4 6.2 6.0
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3 9.6 9.3 9.0
144		836	866	897	927	957	987	017	047	077	107	4 12.8 12.4 12.0
145	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	5 16.0 15.5 15.0
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6 19.2 18.6 18.0
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7 22.4 21.7 21.0
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8 25.6 24.8 24.0
149		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	9 28.8 27.9 27.0
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29 28
151		898	926	955	984	013	041	070	099	127	156	1 2.9 2.8
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2 5.8 5.6
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3 8.7 8.4
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	005	4 11.6 11.2
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5 14.5 14.0
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6 17.4 16.8
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7 20.3 19.6
158		866	893	921	948	976	003	030	058	085	112	8 23.2 22.4
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9 26.1 25.2
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	27 26
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1 2.7 2.6
162		952	978	005	032	059	085	112	139	165	192	2 5.4 5.2
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3 8.1 7.8
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4 10.8 10.4
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5 13.5 13.0
166	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6 16.2 15.6
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7 18.9 18.2
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8 21.6 20.8
169		789	814	840	866	891	917	943	968	994	019	9 24.3 23.4
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	25
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1 2.5
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2 5.0
173		805	830	855	880	905	930	955	980	005	030	3 7.5
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4 10.0
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5 12.5
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6 15.0
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	018	7 17.5
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8 20.0
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9 22.5
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	24 23
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1 2.4 2.3
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2 4.8 4.6
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3 7.2 6.9
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4 9.6 9.2
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5 12.0 11.5
186		951	975	998	021	045	068	091	114	138	161	6 14.4 13.8
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7 16.8 16.1
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8 19.2 18.4
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9 21.6 20.7
190		875	898	921	944	967	989	012	035	058	081	22 21
191	28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	1 2.2 2.1
192		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	2 4.4 4.2
193		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	3 6.6 6.3
194		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	4 8.8 8.4
195	29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	5 11.0 10.5
196		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	6 13.2 12.6
197		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	7 15.4 14.7
198		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	8 17.6 16.8
199		885	907	929	951	973	994	016	038	060	081	9 19.8 18.9
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	

°	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
0	—	—	—	—	—	10. 00 000	0	0	90
10	7. 46 373	30102	7. 46 373	30103	2. 53 627	10. 00 000	1	50	
20	7. 76 475	17603	7. 76 475	17610	2. 23 524	9. 99 999	1	40	
30	7. 94 084	12494	7. 94 086	12495	2. 05 914	9. 99 998	1	30	
40	8. 06 578	9690	8. 06 581	9692	1. 93 419	9. 99 997	2	20	
50	8. 16 268	7918	8. 16 273	7919	1. 83 727	9. 99 995	2	10	
1	8. 24 186	6693	8. 24 192	6696	1. 75 808	9. 99 993	2	0	89
10	8. 30 879	5799	8. 30 888	5801	1. 69 112	9. 99 991	3	50	
20	8. 36 678	5114	8. 36 689	5118	1. 63 311	9. 99 988	3	40	
30	8. 41 792	4574	8. 41 807	4578	1. 58 193	9. 99 985	3	30	
40	8. 46 366	4138	8. 46 385	4142	1. 53 615	9. 99 982	3	20	
50	8. 50 504	3778	8. 50 527	3781	1. 49 473	9. 99 978	4	10	
2	8. 54 282	3475	8. 54 308	3480	1. 45 692	9. 99 974	5	0	88
10	8. 57 757	3216	8. 57 788	3221	1. 42 212	9. 99 969	5	50	
20	8. 60 973	2995	8. 61 009	3000	1. 38 991	9. 99 964	5	40	
30	8. 63 968	2801	8. 64 009	2807	1. 35 991	9. 99 959	5	30	
40	8. 66 769	2631	8. 66 816	2637	1. 33 184	9. 99 953	6	20	
50	8. 69 400	2480	8. 69 453	2487	1. 30 547	9. 99 947	6	10	
3	8. 71 880	2346	8. 71 940	2352	1. 28 060	9. 99 940	7	0	87
10	8. 74 226	2225	8. 74 292	2233	1. 25 708	9. 99 934	7	50	
20	8. 76 451	2117	8. 76 525	2124	1. 23 475	9. 99 926	7	40	
30	8. 78 568	2017	8. 78 649	2025	1. 21 351	9. 99 919	8	30	
40	8. 80 585	1928	8. 80 674	1936	1. 19 326	9. 99 911	8	20	
50	8. 82 513	1845	8. 82 610	1854	1. 17 390	9. 99 903	9	10	
4	8. 84 358	1770	8. 84 464	1779	1. 15 536	9. 99 894	9	0	86
10	8. 86 128	1701	8. 86 243	1710	1. 13 757	9. 99 885	9	50	
20	8. 87 829	1635	8. 87 953	1645	1. 12 047	9. 99 876	9	40	
30	8. 89 464	1576	8. 89 598	1587	1. 10 402	9. 99 866	10	30	
40	8. 91 040	1521	8. 91 185	1531	1. 08 815	9. 99 856	10	20	
50	8. 92 561	1469	8. 92 716	1479	1. 07 284	9. 99 845	11	10	
5	8. 94 030	1420	8. 94 195	1432	1. 05 805	9. 99 834	11	0	85
10	8. 95 450	1375	8. 95 627	1386	1. 04 373	9. 99 823	11	50	
20	8. 96 825	1332	8. 97 013	1345	1. 02 987	9. 99 812	12	40	
30	8. 98 157	1293	8. 98 358	1304	1. 01 642	9. 99 800	12	30	
40	8. 99 450	1254	8. 99 662	1268	1. 00 338	9. 99 787	13	20	
50	9. 00 704	1219	9. 00 930	1232	0. 99 070	9. 99 775	14	10	
6	9. 01 923	1186	9. 02 162	1199	0. 97 838	9. 99 761	14	0	84
10	9. 03 109	1153	9. 03 361	1167	0. 96 639	9. 99 748	13	50	
20	9. 04 262	1124	9. 04 528	1138	0. 95 472	9. 99 734	14	40	
30	9. 05 386	1095	9. 05 666	1109	0. 94 334	9. 99 720	15	30	
40	9. 06 481	1067	9. 06 775	1083	0. 93 225	9. 99 705	15	20	
50	9. 07 548	1041	9. 07 858	1056	0. 92 142	9. 99 690	15	10	
7	9. 08 589	1017	9. 08 914	1033	0. 91 086	9. 99 675	16	0	83
10	9. 09 606	993	9. 09 947	1009	0. 90 053	9. 99 659	16	50	
20	9. 10 599	971	9. 10 956	987	0. 89 044	9. 99 643	17	40	
30	9. 11 570	949	9. 11 943	966	0. 88 057	9. 99 627	17	30	
40	9. 12 519	928	9. 12 909	945	0. 87 091	9. 99 610	17	20	
50	9. 13 447	909	9. 13 854	926	0. 86 146	9. 99 593	18	10	
8	9. 14 356	889	9. 14 780	908	0. 85 220	9. 99 575	18	0	82
°	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

°	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
8	9. 14 356	889	9. 14 780	908	0. 85 220	9. 99 575	18	0	82
10	9. 15 245	871	9. 15 688	889	0. 84 312	9. 99 557	18	50	
20	9. 16 110	854	9. 16 577	873	0. 83 423	9. 99 539	19	40	
30	9. 16 970	837	9. 17 450	856	0. 82 550	9. 99 520	19	30	
40	9. 17 807	821	9. 18 306	840	0. 81 694	9. 99 501	19	20	
50	9. 18 628	805	9. 19 146	825	0. 80 854	9. 99 482	20	10	
9	9. 19 433	790	9. 19 971	811	0. 80 029	9. 99 462	20	0	81
10	9. 20 223	776	9. 20 782	796	0. 79 218	9. 99 442	21	50	
20	9. 20 999	762	9. 21 578	783	0. 78 422	9. 99 421	21	40	
30	9. 21 761	748	9. 22 361	769	0. 77 639	9. 99 400	21	30	
40	9. 22 509	735	9. 23 130	757	0. 76 870	9. 99 379	22	20	
50	9. 23 244	723	9. 23 887	745	0. 76 113	9. 99 357	22	10	
10	9. 23 967	710	9. 24 632	733	0. 75 368	9. 99 335	22	0	80
10	9. 24 677	699	9. 25 365	721	0. 74 635	9. 99 313	23	50	
20	9. 25 376	687	9. 26 086	711	0. 73 914	9. 99 290	23	40	
30	9. 26 063	676	9. 26 797	699	0. 73 203	9. 99 267	24	30	
40	9. 26 739	666	9. 27 496	690	0. 72 504	9. 99 243	24	20	
50	9. 27 405	655	9. 28 186	679	0. 71 814	9. 99 219	24	10	
11	9. 28 061	645	9. 28 865	670	0. 71 135	9. 99 195	25	0	79
10	9. 28 705	635	9. 29 535	660	0. 70 465	9. 99 170	25	50	
20	9. 29 340	626	9. 30 195	651	0. 69 805	9. 99 145	25	40	
30	9. 29 966	616	9. 30 846	643	0. 69 154	9. 99 119	26	30	
40	9. 30 582	607	9. 31 489	633	0. 68 511	9. 99 093	26	20	
50	9. 31 189	599	9. 32 122	625	0. 67 878	9. 99 067	27	10	
12	9. 31 788	590	9. 32 747	618	0. 67 253	9. 99 040	27	0	78
10	9. 32 378	582	9. 33 365	609	0. 66 635	9. 99 013	27	50	
20	9. 32 960	574	9. 33 974	602	0. 66 026	9. 98 986	28	40	
30	9. 33 534	566	9. 34 576	594	0. 65 424	9. 98 958	28	30	
40	9. 34 100	558	9. 35 170	587	0. 64 830	9. 98 930	28	20	
50	9. 34 658	551	9. 35 757	579	0. 64 243	9. 98 901	29	10	
13	9. 35 209	543	9. 36 336	573	0. 63 664	9. 98 872	29	0	77
10	9. 35 752	537	9. 36 909	567	0. 63 091	9. 98 843	29	50	
20	9. 36 289	530	9. 37 476	559	0. 62 524	9. 98 813	30	40	
30	9. 36 819	522	9. 38 035	554	0. 61 965	9. 98 783	30	30	
40	9. 37 341	517	9. 38 589	547	0. 61 411	9. 98 753	31	20	
50	9. 37 858	510	9. 39 136	541	0. 60 864	9. 98 722	31	10	
14	9. 38 368	503	9. 39 677	535	0. 60 323	9. 98 690	32	0	76
10	9. 38 871	498	9. 40 212	530	0. 59 788	9. 98 659	31	50	
20	9. 39 369	491	9. 40 742	524	0. 59 258	9. 98 627	32	40	
30	9. 39 860	486	9. 41 266	518	0. 58 734	9. 98 594	33	30	
40	9. 40 346	479	9. 41 784	513	0. 58 216	9. 98 561	33	20	
50	9. 40 825	475	9. 42 297	508	0. 57 703	9. 98 528	33	10	
15	9. 41 300	468	9. 42 805	503	0. 57 195	9. 98 494	34	0	75
10	9. 41 768	464	9. 43 305	498	0. 56 692	9. 98 460	34	50	
20	9. 42 232	458	9. 43 806	493	0. 56 194	9. 98 426	34	40	
30	9. 42 690	453	9. 44 299	488	0. 55 701	9. 98 391	35	30	
40	9. 43 143	448	9. 44 787	484	0. 55 213	9. 98 356	35	20	
50	9. 43 591	443	9. 45 271	479	0. 54 729	9. 98 320	36	10	
16	9. 44 034	443	9. 45 750	479	0. 54 250	9. 98 284	36	0	74
°	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

° ' "	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	' "
16 °	0. 44 034	438	9. 45 750	474	0. 54 250	9. 98 284	36	0 74
10	0. 44 472	433	9. 46 224	470	0. 53 776	9. 98 248	37	50
20	0. 44 905	429	9. 46 694	466	0. 53 306	9. 98 211	37	40
30	0. 45 334	424	9. 47 160	462	0. 52 840	9. 98 174	38	30
40	0. 45 758	420	9. 47 622	458	0. 52 378	9. 98 136	38	20
50	0. 46 178	416	9. 48 080	454	0. 51 920	9. 98 098	38	10
17 °	0. 46 594	411	9. 48 534	450	0. 51 466	9. 98 060	39	0 73
10	0. 47 005	406	9. 48 984	446	0. 51 016	9. 98 021	39	50
20	0. 47 411	403	9. 49 430	442	0. 50 570	9. 97 982	40	40
30	0. 47 814	399	9. 49 872	439	0. 50 128	9. 97 942	40	30
40	0. 48 213	394	9. 50 311	435	0. 49 689	9. 97 902	41	20
50	0. 48 607	391	9. 50 746	432	0. 49 254	9. 97 861	41	10
18 °	0. 48 998	387	9. 51 178	428	0. 48 822	9. 97 821	42	0 72
10	0. 49 385	383	9. 51 606	425	0. 48 394	9. 97 779	42	50
20	0. 49 768	380	9. 52 031	421	0. 47 969	9. 97 738	42	40
30	0. 50 148	375	9. 52 452	418	0. 47 548	9. 97 696	43	30
40	0. 50 523	373	9. 52 870	415	0. 47 130	9. 97 653	43	20
50	0. 50 896	368	9. 53 285	412	0. 46 715	9. 97 610	43	10
19 °	0. 51 264	365	9. 53 697	409	0. 46 303	9. 97 567	44	0 71
10	0. 51 629	362	9. 54 106	406	0. 45 894	9. 97 523	44	50
20	0. 51 991	359	9. 54 512	403	0. 45 488	9. 97 479	44	40
30	0. 52 350	355	9. 54 915	400	0. 45 085	9. 97 435	45	30
40	0. 52 705	351	9. 55 315	397	0. 44 685	9. 97 390	46	20
50	0. 53 056	349	9. 55 712	395	0. 44 288	9. 97 344	46	10
20 °	0. 53 405	346	9. 56 107	391	0. 43 893	9. 97 299	47	0 70
10	0. 53 751	342	9. 56 498	389	0. 43 502	9. 97 252	46	50
20	0. 54 093	340	9. 56 887	387	0. 43 113	9. 97 206	47	40
30	0. 54 433	336	9. 57 274	384	0. 42 726	9. 97 159	47	30
40	0. 54 769	333	9. 57 658	381	0. 42 342	9. 97 111	48	20
50	0. 55 102	331	9. 58 039	379	0. 41 961	9. 97 063	48	10
21 °	0. 55 433	328	9. 58 418	376	0. 41 582	9. 97 015	49	0 69
10	0. 55 761	324	9. 58 794	374	0. 41 206	9. 96 966	49	50
20	0. 56 085	323	9. 59 168	372	0. 40 832	9. 96 917	49	40
30	0. 56 408	319	9. 59 540	369	0. 40 400	9. 96 868	50	30
40	0. 56 727	317	9. 59 909	367	0. 40 091	9. 96 818	51	20
50	0. 57 044	314	9. 60 276	365	0. 39 724	9. 96 767	51	10
22 °	0. 57 358	311	9. 60 641	363	0. 39 359	9. 96 717	52	0 68
10	0. 57 669	309	9. 61 004	360	0. 38 996	9. 96 665	52	50
20	0. 57 978	306	9. 61 364	358	0. 38 636	9. 96 614	52	40
30	0. 58 284	304	9. 61 722	357	0. 38 278	9. 96 562	53	30
40	0. 58 588	301	9. 62 079	354	0. 37 921	9. 96 509	53	20
50	0. 58 889	299	9. 62 433	352	0. 37 567	9. 96 456	53	10
23 °	0. 59 188	296	9. 62 788	350	0. 37 215	9. 96 403	54	0 67
10	0. 59 484	294	9. 63 135	349	0. 36 865	9. 96 349	54	50
20	0. 59 778	292	9. 63 484	346	0. 36 516	9. 96 294	55	40
30	0. 60 070	289	9. 63 830	345	0. 36 170	9. 96 240	55	30
40	0. 60 359	287	9. 64 175	342	0. 35 825	9. 96 185	55	20
50	0. 60 646	285	9. 64 517	341	0. 35 483	9. 96 129	56	10
24 °	0. 60 931		9. 64 858		0. 35 142	9. 96 073		0 66
° ' "	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	' "

° ' "	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	' "
24 °	0. 60 931	283	9. 64 858	339	0. 35 142	9. 96 073	56	0 66
10	0. 61 214	280	9. 65 107	338	0. 34 803	9. 96 017	57	50
20	0. 61 494	279	9. 65 355	335	0. 34 465	9. 95 960	58	40
30	0. 61 773	276	9. 65 870	334	0. 34 130	9. 95 902	58	30
40	0. 62 049	274	9. 66 204	333	0. 33 796	9. 95 844	58	20
50	0. 62 323	272	9. 66 537	330	0. 33 463	9. 95 786	58	10
25 °	0. 62 595	270	9. 66 867	329	0. 33 133	9. 95 728	60	0 65
10	0. 62 865	268	9. 67 196	328	0. 32 804	9. 95 668	59	50
20	0. 63 133	265	9. 67 524	326	0. 32 476	9. 95 609	60	40
30	0. 63 398	264	9. 67 850	324	0. 32 150	9. 95 549	61	30
40	0. 63 662	262	9. 68 174	323	0. 31 826	9. 95 488	61	20
50	0. 63 924	260	9. 68 497	321	0. 31 503	9. 95 427	61	10
26 °	0. 64 184	258	9. 68 818	320	0. 31 182	9. 95 366	62	0 64
10	0. 64 442	256	9. 69 138	319	0. 30 862	9. 95 304	62	50
20	0. 64 698	255	9. 69 457	317	0. 30 543	9. 95 242	63	40
30	0. 64 953	252	9. 69 774	315	0. 30 226	9. 95 179	63	30
40	0. 65 205	251	9. 70 089	315	0. 29 911	9. 95 116	64	20
50	0. 65 456	249	9. 70 404	313	0. 29 596	9. 95 052	64	10
27 °	0. 65 705	247	9. 70 717	311	0. 29 283	9. 94 988	65	0 63
10	0. 65 952	245	9. 71 028	311	0. 28 972	9. 94 923	65	50
20	0. 66 197	244	9. 71 339	309	0. 28 661	9. 94 858	65	40
30	0. 66 441	241	9. 71 648	307	0. 28 352	9. 94 793	66	30
40	0. 66 682	240	9. 71 955	307	0. 28 045	9. 94 727	67	20
50	0. 66 922	239	9. 72 262	305	0. 27 738	9. 94 660	67	10
28 °	0. 67 161	237	9. 72 567	305	0. 27 433	9. 94 593	67	0 62
10	0. 67 398	235	9. 72 872	303	0. 27 128	9. 94 526	68	50
20	0. 67 633	233	9. 73 175	301	0. 26 825	9. 94 458	68	40
30	0. 67 866	232	9. 73 476	301	0. 26 524	9. 94 390	69	30
40	0. 68 098	230	9. 73 777	300	0. 26 223	9. 94 321	69	20
50	0. 68 328	229	9. 74 077	298	0. 25 923	9. 94 252	70	10
29 °	0. 68 557	227	9. 74 375	298	0. 25 625	9. 94 182	70	0 61
10	0. 68 784	226	9. 74 673	296	0. 25 327	9. 94 112	71	50
20	0. 69 010	224	9. 74 969	295	0. 25 031	9. 94 041	71	40
30	0. 69 234	222	9. 75 264	294	0. 24 736	9. 93 970	71	30
40	0. 69 456	221	9. 75 558	294	0. 24 442	9. 93 898	72	20
50	0. 69 677	220	9. 75 852	292	0. 24 148	9. 93 826	72	10
30 °	0. 69 897	218	9. 76 144	291	0. 23 856	9. 93 753	73	0 60
10	0. 70 115	217	9. 76 435	290	0. 23 565	9. 93 680	73	50
20	0. 70 332	215	9. 76 725	290	0. 23 275	9. 93 606	74	40
30	0. 70 547	214	9. 77 015	288	0. 22 985	9. 93 532	74	30
40	0. 70 761	212	9. 77 303	288	0. 22 697	9. 93 457	75	20
50	0. 70 973	211	9. 77 591	286	0. 22 409	9. 93 382	75	10
31 °	0. 71 184	209	9. 77 877	286	0. 22 123	9. 93 307	75	0 59
10	0. 71 393	209	9. 78 163	285	0. 21 837	9. 93 230	76	50
20	0. 71 602	207	9. 78 448	284	0. 21 552	9. 93 154	77	40
30	0. 71 809	205	9. 78 732	283	0. 21 268	9. 93 077	77	30
40	0. 72 014	204	9. 79 015	282	0. 20 985	9. 92 999	78	20
50	0. 72 218	203	9. 79 297	282	0. 20 703	9. 92 921	78	10
32 °	0. 72 421		9. 79 579		0. 20 421	9. 92 842	79	0 58
° ' "	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	' "

°	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
32	0. 72 421	201	9. 79 579	281	0. 20 421	9. 92 842	79	0	58
10	9. 72 622	201	9. 79 860	280	0. 20 140	9. 92 763	80	50	
20	9. 72 823	199	9. 80 140	279	0. 19 860	9. 92 683	80	40	
30	9. 73 022	197	9. 80 419	278	0. 19 581	9. 92 603	81	30	
40	9. 73 219	197	9. 80 697	278	0. 19 303	9. 92 522	81	20	
50	9. 73 416	195	9. 80 975	277	0. 19 025	9. 92 441	82	10	
33	0. 73 611	194	9. 81 252	276	0. 18 748	9. 92 359	82	0	57
10	9. 73 805	192	9. 81 528	275	0. 18 472	9. 92 277	83	50	
20	9. 73 997	192	9. 81 803	275	0. 18 197	9. 92 194	83	40	
30	9. 74 189	190	9. 82 078	274	0. 17 922	9. 92 111	84	30	
40	9. 74 379	189	9. 82 352	274	0. 17 648	9. 92 027	85	20	
50	9. 74 568	188	9. 82 626	273	0. 17 374	9. 91 942	85	10	
34	0. 74 756	187	9. 82 899	272	0. 17 101	9. 91 857	85	0	56
10	9. 74 943	185	9. 83 171	271	0. 16 829	9. 91 772	86	50	
20	9. 75 128	185	9. 83 442	271	0. 16 558	9. 91 686	87	40	
30	9. 75 313	183	9. 83 713	271	0. 16 287	9. 91 599	87	30	
40	9. 75 496	182	9. 83 984	270	0. 16 016	9. 91 512	87	20	
50	9. 75 678	181	9. 84 254	269	0. 15 746	9. 91 425	89	10	
35	0. 75 859	180	9. 84 523	268	0. 15 477	9. 91 338	88	0	55
10	9. 76 039	179	9. 84 791	268	0. 15 209	9. 91 248	89	50	
20	9. 76 218	177	9. 85 059	268	0. 14 941	9. 91 158	90	40	
30	9. 76 395	177	9. 85 327	267	0. 14 673	9. 91 069	91	30	
40	9. 76 572	175	9. 85 594	266	0. 14 406	9. 90 978	91	20	
50	9. 76 747	175	9. 85 860	266	0. 14 140	9. 90 887	91	10	
36	0. 76 922	173	9. 86 126	266	0. 13 874	9. 90 796	92	0	54
10	9. 77 095	173	9. 86 392	264	0. 13 608	9. 90 704	93	50	
20	9. 77 268	171	9. 86 656	264	0. 13 344	9. 90 611	93	40	
30	9. 77 439	170	9. 86 921	264	0. 13 079	9. 90 518	94	30	
40	9. 77 609	169	9. 87 185	263	0. 12 815	9. 90 424	94	20	
50	9. 77 778	168	9. 87 448	263	0. 12 552	9. 90 330	95	10	
37	0. 77 946	167	9. 87 711	263	0. 12 289	9. 90 235	96	0	53
10	9. 78 113	167	9. 87 974	262	0. 12 026	9. 90 139	96	50	
20	9. 78 280	167	9. 88 236	262	0. 11 764	9. 90 043	96	40	
30	9. 78 445	164	9. 88 498	262	0. 11 502	9. 89 947	98	30	
40	9. 78 609	163	9. 88 759	261	0. 11 241	9. 89 849	97	20	
50	9. 78 772	162	9. 89 020	261	0. 10 980	9. 89 752	99	10	
38	0. 78 934	161	9. 89 281	260	0. 10 719	9. 89 653	99	0	52
10	9. 79 095	161	9. 89 541	260	0. 10 459	9. 89 554	99	50	
20	9. 79 256	159	9. 89 801	260	0. 10 199	9. 89 455	101	40	
30	9. 79 415	158	9. 90 061	259	0. 09 939	9. 89 354	100	30	
40	9. 79 573	158	9. 90 320	258	0. 09 680	9. 89 254	102	20	
50	9. 79 731	156	9. 90 578	258	0. 09 422	9. 89 152	102	10	
39	0. 79 887	154	9. 90 837	258	0. 09 163	9. 89 050	102	0	51
10	9. 80 043	154	9. 91 095	258	0. 08 905	9. 88 948	104	50	
20	9. 80 197	154	9. 91 353	257	0. 08 647	9. 88 844	103	40	
30	9. 80 351	153	9. 91 610	258	0. 08 390	9. 88 741	105	30	
40	9. 80 504	152	9. 91 868	257	0. 08 132	9. 88 636	105	20	
50	9. 80 656	151	9. 92 125	256	0. 07 875	9. 88 531	106	10	
40	0. 80 807	151	9. 92 381	256	0. 07 619	9. 88 425	106	0	50
°	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

°	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
40	0. 80 807	150	9. 92 381	257	0. 07 619	9. 88 425	106	0	50
10	9. 80 957	149	9. 92 638	256	0. 07 362	9. 88 319	107	50	
20	9. 81 106	148	9. 92 894	256	0. 07 106	9. 88 212	107	40	
30	9. 81 254	148	9. 93 150	256	0. 06 850	9. 88 105	109	30	
40	9. 81 402	147	9. 93 406	255	0. 06 594	9. 87 996	109	20	
50	9. 81 549	145	9. 93 661	255	0. 06 339	9. 87 887	109	10	
41	0. 81 694	145	9. 93 916	255	0. 06 084	9. 87 778	110	0	49
10	9. 81 839	144	9. 94 171	255	0. 05 829	9. 87 668	111	50	
20	9. 81 983	143	9. 94 426	255	0. 05 574	9. 87 557	111	40	
30	9. 82 126	143	9. 94 681	254	0. 05 319	9. 87 446	112	30	
40	9. 82 269	141	9. 94 935	255	0. 05 065	9. 87 334	113	20	
50	9. 82 410	141	9. 95 190	254	0. 04 810	9. 87 221	114	10	
42	0. 82 551	140	9. 95 444	254	0. 04 556	9. 87 107	114	0	48
10	9. 82 691	139	9. 95 698	254	0. 04 302	9. 86 993	114	50	
20	9. 82 830	138	9. 95 952	253	0. 04 048	9. 86 879	114	40	
30	9. 82 968	138	9. 96 205	253	0. 03 795	9. 86 763	116	30	
40	9. 83 106	136	9. 96 459	253	0. 03 541	9. 86 647	117	20	
50	9. 83 242	136	9. 96 712	253	0. 03 288	9. 86 530	117	10	
43	0. 83 378	135	9. 96 966	253	0. 03 034	9. 86 413	118	0	47
10	9. 83 513	135	9. 97 219	253	0. 02 781	9. 86 295	119	50	
20	9. 83 648	133	9. 97 472	253	0. 02 528	9. 86 176	119	40	
30	9. 83 781	133	9. 97 725	253	0. 02 275	9. 86 056	120	30	
40	9. 83 914	132	9. 97 978	253	0. 02 022	9. 85 936	120	20	
50	9. 84 046	131	9. 98 231	253	0. 01 769	9. 85 815	122	10	
44	0. 84 177	131	9. 98 484	253	0. 01 516	9. 85 693	122	0	46
10	9. 84 308	129	9. 98 737	252	0. 01 263	9. 85 571	122	50	
20	9. 84 437	129	9. 98 989	252	0. 01 011	9. 85 448	123	40	
30	9. 84 566	128	9. 99 242	253	0. 00 758	9. 85 324	124	30	
40	9. 84 694	128	9. 99 495	252	0. 00 505	9. 85 200	124	20	
50	9. 84 822	127	9. 99 747	252	0. 00 253	9. 85 074	126	10	
45	0. 84 949	127	10. 00 000	253	0. 00 000	9. 84 949	125	0	45
°	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

注意

L. sin., L. tan. ハソレゾレ sin., tan.

ノ對數ニ 10 ナ加ヘタルモ ノ, L. cot.,

L. tan. ハソレゾレ cot., tan. ノ對數

ナ意味ス.

$0^{\circ}-12^{\circ}$

$^{\circ}$	$'$	sin.	tan.	cot.	cos.	$^{\circ}$
0	0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0 90
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50	
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40	
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30	
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20	
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10	
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
$^{\circ}$	$'$	cos.	cot.	tan.	sin.	$^{\circ}$

$^{\circ}$	$'$	sin.	tan.	cot.	cos.	$^{\circ}$	$'$	sin.	tan.	cot.	cos.	$^{\circ}$	
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89	7	0	0.1210	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50		10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50	
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40		20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40	
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30		30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30	
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20		40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20	
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10		50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10	
2	0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88	8	0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50		10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50	
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40		20	0.1449	0.1465	6.8260	0.9894	40	
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30		30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30	
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20		40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20	
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10		50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10	
3	0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87	9	0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50		10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50	
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40		20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40	
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30		30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30	
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20		40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20	
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10		50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10	
4	0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86	10	0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50		10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50	
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40		20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40	
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30		30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30	
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20		40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20	
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10		50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10	
5	0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85	11	0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50		10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50	
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40		20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40	
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30		30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30	
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20		40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20	
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10		50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10	
6	0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0 84	12	0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50		10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50	
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40		20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40	
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30		30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30	
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20		40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20	
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10		50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10	
7	0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83	13	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
$^{\circ}$	$'$	cos.	cot.	tan.	sin.	$^{\circ}$	$'$	cos.	cot.	tan.	sin.	$^{\circ}$	

 $77^{\circ}-89^{\circ}$

°	'	sin.	tan.	cot.	cos.	°	'	sin.	tan.	cot.	cos.	°
13	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0	77	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50		10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40		20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30		30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20		40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10		50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
14	0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0	76	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50		10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40		20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30		30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20		40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10		50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
15	0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0	75	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0
10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50		10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40		20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30		30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20		40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10		50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
16	0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0	74	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50		10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40		20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30		30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20		40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10		50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
17	0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0	73	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50		10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40		20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30		30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20		40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10		50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
18	0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0	72	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50		10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40		20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30		30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20		40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10		50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
19	0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0	71	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50		10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40		20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30		30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20		40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10		50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
20	0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0	70	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50		10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40		20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.3502	0.3739	2.6740	0.9367	30		30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20		40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10		50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
21	0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0	69	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0
		cos.	cot.	tan.	sin.			cos.	cot.	tan.	sin.	

° ' sin. tan. cot. cos. ' °	° ' sin. tan. cot. cos. ' °
29 0 0.4848 0.5543 1.8040 0.8746 0 61	37 0 0.6018 0.7536 1.3270 0.7986 0 53
10 0.4874 0.5581 1.7917 0.8732 50	10 0.6041 0.7581 1.3190 0.7969 50
20 0.4899 0.5619 1.7799 0.8718 40	20 0.6065 0.7627 1.3111 0.7951 40
30 0.4924 0.5658 1.7675 0.8704 30	30 0.6088 0.7673 1.3032 0.7934 30
40 0.4950 0.5696 1.7556 0.8689 20	40 0.6111 0.7720 1.2954 0.7916 20
50 0.4975 0.5735 1.7437 0.8675 10	50 0.6134 0.7766 1.2876 0.7898 10
30 0 0.5000 0.5774 1.7321 0.8660 0 60	38 0 0.6157 0.7813 1.2799 0.7880 0 52
10 0.5025 0.5812 1.7205 0.8646 50	10 0.6180 0.7860 1.2723 0.7862 50
20 0.5050 0.5851 1.7090 0.8631 40	20 0.6202 0.7907 1.2647 0.7844 40
30 0.5075 0.5890 1.6977 0.8616 30	30 0.6225 0.7954 1.2572 0.7826 30
40 0.5100 0.5930 1.6864 0.8601 20	40 0.6248 0.8002 1.2497 0.7808 20
50 0.5125 0.5969 1.6753 0.8587 10	50 0.6271 0.8050 1.2423 0.7790 10
31 0 0.5150 0.6009 1.6643 0.8572 0 59	39 0 0.6293 0.8098 1.2349 0.7771 0 51
10 0.5175 0.6048 1.6534 0.8557 50	10 0.6316 0.8146 1.2276 0.7753 50
20 0.5200 0.6088 1.6426 0.8542 40	20 0.6338 0.8195 1.2203 0.7735 40
30 0.5225 0.6128 1.6319 0.8526 30	30 0.6361 0.8243 1.2131 0.7716 30
40 0.5250 0.6168 1.6212 0.8511 20	40 0.6383 0.8292 1.2059 0.7698 20
50 0.5275 0.6208 1.6107 0.8496 10	50 0.6406 0.8342 1.1988 0.7679 10
32 0 0.5299 0.6249 1.6003 0.8480 0 58	40 0 0.6428 0.8391 1.1918 0.7660 0 50
10 0.5324 0.6289 1.5900 0.8465 50	10 0.6450 0.8441 1.1847 0.7642 50
20 0.5348 0.6330 1.5798 0.8450 40	20 0.6472 0.8491 1.1778 0.7623 40
30 0.5373 0.6371 1.5697 0.8434 30	30 0.6494 0.8541 1.1708 0.7604 30
40 0.5398 0.6412 1.5597 0.8418 20	40 0.6517 0.8591 1.1640 0.7585 20
50 0.5422 0.6453 1.5497 0.8403 10	50 0.6539 0.8642 1.1571 0.7566 10
33 0 0.5446 0.6494 1.5399 0.8387 0 57	41 0 0.6561 0.8693 1.1504 0.7547 0 49
10 0.5471 0.6536 1.5301 0.8371 50	10 0.6583 0.8744 1.1436 0.7528 50
20 0.5495 0.6577 1.5204 0.8355 40	20 0.6604 0.8796 1.1369 0.7509 40
30 0.5519 0.6619 1.5108 0.8339 30	30 0.6626 0.8847 1.1303 0.7490 30
40 0.5544 0.6661 1.5013 0.8323 20	40 0.6648 0.8899 1.1237 0.7470 20
50 0.5568 0.6703 1.4919 0.8307 10	50 0.6670 0.8952 1.1171 0.7451 10
34 0 0.5592 0.6745 1.4826 0.8290 0 56	42 0 0.6691 0.9004 1.1106 0.7431 0 48
10 0.5616 0.6787 1.4733 0.8274 50	10 0.6713 0.9057 1.1041 0.7412 50
20 0.5640 0.6830 1.4641 0.8258 40	20 0.6734 0.9110 1.0977 0.7392 40
30 0.5664 0.6873 1.4550 0.8241 30	30 0.6756 0.9163 1.0913 0.7373 30
40 0.5688 0.6916 1.4460 0.8225 20	40 0.6777 0.9217 1.0850 0.7353 20
50 0.5712 0.6959 1.4370 0.8208 10	50 0.6799 0.9271 1.0786 0.7333 10
35 0 0.5736 0.7002 1.4281 0.8192 0 55	43 0 0.6820 0.9325 1.0724 0.7314 0 47
10 0.5760 0.7046 1.4193 0.8175 50	10 0.6841 0.9380 1.0661 0.7294 50
20 0.5783 0.7089 1.4106 0.8158 40	20 0.6862 0.9435 1.0599 0.7274 40
30 0.5807 0.7133 1.4019 0.8141 30	30 0.6884 0.9490 1.0538 0.7254 30
40 0.5831 0.7177 1.3934 0.8124 20	40 0.6905 0.9545 1.0477 0.7234 20
50 0.5854 0.7221 1.3848 0.8107 10	50 0.6926 0.9601 1.0416 0.7214 10
36 0 0.5878 0.7265 1.3764 0.8090 0 54	44 0 0.6947 0.9657 1.0355 0.7193 0 46
10 0.5901 0.7310 1.3680 0.8073 50	10 0.6967 0.9713 1.0295 0.7173 50
20 0.5925 0.7355 1.3597 0.8056 40	20 0.6988 0.9770 1.0235 0.7153 40
30 0.5948 0.7400 1.3514 0.8039 30	30 0.7009 0.9827 1.0176 0.7133 30
40 0.5972 0.7445 1.3432 0.8021 20	40 0.7030 0.9884 1.0117 0.7112 20
50 0.5995 0.7490 1.3351 0.8004 10	50 0.7050 0.9942 1.0058 0.7092 10
37 0 0.6018 0.7536 1.3270 0.7986 0 53	45 0 0.7071 1.0000 1.0000 0.7071 0 45
° ' cos. cot. tan. sin. ' °	° ' cos. cot. tan. sin. ' °

復習雜題

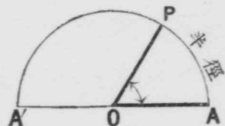
緒論之部

1. 正三角形ノ一角ノ測度ヲ1トセバ, 正方形ノ一邊ヲ其ノ外接圓周上ノ一點ニ於テ含ム角如何.
2. 正六角形ノ一角ノ度数ヲ問フ.
3. ABCD ハ圓ニ内接スル四邊形ニシテ, 其ノ角 A ハ $44^{\circ}35'$, B ハ $72^{\circ}48'12''$ ナルトキ, 角 C 及ビ D ノ度数ハ如何.
4. 正八角形ノ一邊ヲ外接圓周上ノ一點ニ於テ含ム角ハ幾度ナルカ.
5. a 直角ノ測度ガ b ナル單位ニ於テ, 幾度ノ角ガ c ニテ表ハサルルカ.
6. 正十五角形ノ一邊ト, 其ノ隣ノ邊ノ延線トノ間ノ角ヲ單位ニ取レバ, 直角ノ測度ハ如何.
7. 正四十八邊形ノ一角ト二直角トノ差ヲ分ニテ求メヨ.
8. 時計ノ兩針ハ, 5 時ト 7 時 40 分トノ間ニ, 各幾度ノ角ヲ廻轉スルカ.
9. 正多角形ノ一角ガ 170° ナルトキ, 其ノ邊數ヲ問フ.

10. 多角形アリ, 其ノ内角ノ各ハ順次ニ等差級數ヲナシ, 其ノ最小角ガ 120° ニシテ, 公差ガ 5° ナルトキ, 本形ノ邊數如何.

弧 度 法

中心Oナル圓ニ於テ、弧APノ長
サヲ半徑ニ等シク取リ; AO, POヲ
結ビ付クレバ、幾何學ノ定理ニ依



リ、圓ノ中心ニ於ケル角ハ、其ノ立ツ所ノ弧ニ比例ス

$$\frac{\widehat{AOP}}{2\text{直角}} = \frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}} = \frac{\text{徑}}{\text{圓周}} = \frac{1}{\pi}.$$

今直角ヲ $\widehat{R}$ ニテ表ハストキハ

$$\widehat{AOP} = 2\widehat{R} \text{ ノ } \frac{1}{\pi} = 180^\circ \times \frac{1}{\pi} = (\text{一定數}).$$

依リテ測角ノ單位ニ $\widehat{AOP}$ ヲ取ルコトヲ得.

角 AOP ヲ單位ニ取レル測角法ヲ弧度法ト稱シ、
 $\widehat{AOP}$ ヲ **れてあん** ト稱ス.

故ニ或角ノ弧度トハ、其ノ中ニ含メル**れてあん**ノ
數ナリ. **れてあん**ヲ單位トスルハ、次ノ二ツノ理由
ニ基ヅク. 即チ

(1) 總テノ**れてあん**ハ相等シキコト.

(2) **れてあん**ヲ單位ニ取リテ角ヲ測ルトキハ、解
析的三角法ノ公式ノ多クヲ簡單ニスルコト[又解析
的數學ノ公式ヲ簡單ニスルコトアリ].

$$\text{1 れてあん} = 180^\circ \times \frac{1}{\pi} = 57^\circ.2957 \dots\dots$$

又或角ノ度數ヲ D トシ、其ノ弧度ノ數ヲ α トスルト
キハ

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$$

此ノ式ヨリ六十分法ノ度數ヲ弧度ニ、又弧度ノ數ヲ
六十分法ノ度數ニ換算スルコトヲ得ベシ.

1. $90^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ ノ角ノ弧度ヲ問フ.

2. 弧度 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ ノ角ノ度數ヲ問フ.

3. $42^\circ 45' 30''$ ノ角ノ弧度ヲ問フ.

4. 弧度 $\frac{\pi}{12}$ ノ角ノ度數如何.

5. n 邊ノ正多角形ノ一角ノ弧度ハ $\frac{n-2}{n}\pi$ ナルコ
トヲ證セヨ.

6. 三角形ノ各角ノ比ガ $3:5:7$ ナルトキ、各角ノ
弧度ヲ問フ.

7. 半徑1尺2寸ナル圓ノ中心ニ於テ、5寸ノ弧ヲ
含ム角ノ度數ヲ問フ.

8. 多角形ノ各角ノ和ガ 10π ナルトキ、其ノ邊數
ヲ問フ.

9. 正多角形ノ一外角ガ一内角ノ六分ノ一ナルト
キ、各角ヲ弧度ニテ表ハセ. 又多角形ノ邊數ヲ問フ.

10. 地球ノ半徑ヲ4000哩トシ、赤道ニ於ケル一分ノ弧ノ長ヲ求メヨ。

11. ニツノ角アリ、其ノ和ハ 84° ニシテ、其ノ差ハ直角ノ0.1ナルトキ、各何度ナルカ、又幾直角ナルカ。

12. 半徑25尺ナル圓ニ於テ、長サ $37\frac{1}{2}$ 尺ナル弧ノ中心ニ於テノ角ハ幾れてあんなルカ。

13. 半徑 $3\frac{2}{11}$ 寸ノ圓ニ於テ、長サ1尺5寸ノ弧ノ上ニ立ツ中心ニ於テノ角ハ幾直角ナルカ。

14. 半徑4尺ノ圓ニ於テ、中心角 80° ナル弧ノ長サヲ求メヨ。

15. 半徑5尺ノ圓ニ於テ、中心角 $\frac{2}{3}$ 直角ナル弧ノ長サヲ問フ。

鋭角の三角函数

1. 次ノ各題ニ於テ、與ヘラレタル三角函数ヲ知リテ、他ノ總テノ三角函数ヲ算出セヨ。

$$(1) \sin A = \frac{1}{2}. \quad (2) \cos A = \frac{8}{17}. \quad (3) \tan A = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \cot \theta = -\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}. \quad (5) \sin \theta = \frac{7}{25}. \quad (6) \sin \phi = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

2. $\sec A = \frac{41}{9}$ ヲ知リテ $\sin A$ 及ビ $\cot A$ ヲ求メヨ。

3. $\sin A = \frac{m}{n}$ ナルトキハ、 $\sqrt{n^2 - m^2} \tan A = m$ ナルコトヲ證セヨ。

4. $\sec A$ ノ項ニテ $\sin A$ 及ビ $\cot A$ ヲ表ハセ。

5. $\cos \theta = h$, $\tan \theta = k$ ナルトキ、 h 及ビ k ヲ連結スル方程式如何。

6. $\cot A = \frac{p}{q}$ ナルトキ $\frac{p \cos A - q \sin A}{p \cos A + q \sin A}$ ノ値ヲ求メヨ。

7. $A < 90^\circ$ ナルトキハ、 $\sin A + \cos A > 1$ ナルコトヲ證セヨ。

8. $\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ ヲ $\cos \theta$ ノ項ニテ表ハセ。

9. $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta$ ヲ $\tan \theta$ ノ項ニテ表ハセ。

10. $\tan^2 A + \cot^2 A$ ヲ $\sin A$ ノ項ニテ表ハセ。

次ノ恒等式[11乃至25]ヲ證明セヨ.

11. $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$
12. $(1 + \cos A)^2 + (1 + \sin A)^2 = 3 + 2(\sin A + \cos A).$
13. $(\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta)(\sin \theta + \cos \theta) = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta + 2.$
14. $\frac{(\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta)^2}{\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta} = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta.$
15. $\sin^3 A + \cos^3 A = (1 - \sin A \cos A)(\sin A + \cos A).$
16. $(\sin \theta + \cos \theta)(\tan \theta + \cot \theta) = \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta.$
17. $(1 + \tan A + \tan^2 A)(1 - \cot A + \cot^2 A) = \tan^2 A + \cot^2 A + 1$
18. $\tan A(1 - \cot^2 A) + \cot A(1 - \tan^2 A) = 0.$
19. $\frac{1 - \sec A + \tan A}{1 + \sec A - \tan A} = \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}.$
20. $(\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = (1 + \tan \theta)^2 + (1 + \cot \theta)^2.$
21. $\tan \theta = \frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}.$
22. $(2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).$
23. $\frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta.$
24. $(1 + \cos A - \sin^2 A)^2(1 - \cos A)^2$
 $+ 1 + \sin A - \cos^2 A)^2(1 - \sin A)^2 = \sin^2 A \cos^2 A.$
25. $\tan \theta + \cot \theta = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^3 \theta \sec \theta + \cos^3 \theta \operatorname{cosec} \theta.$
26. $\tan A + \sin A = m, \tan A - \sin A = n$ ナルトキハ

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

ナルコトヲ證セヨ.

$$27. \sin \theta = \frac{m^2 + 2mn}{m^2 + 2mn + 2n^2} \text{ ナルトキハ}$$

$$\tan \theta = \frac{m^2 + 2mn}{2mn + 2n^2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

28. 次ノ各方程式 = 適スル角ノ値ヲ見出セ.

- (1) $4 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta.$
- (2) $4 \sin \theta - 3 \operatorname{cosec} \theta = 0.$
- (3) $\sin 5A = \cos 4A$
- (4) $4 \cos \theta - 3 \sec \theta = 0.$
- (5) $\tan 3\theta = \cot 2\theta.$
- (6) $\tan \theta + 3 \cot \theta = 4.$
- (7) $2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 2.$
- (8) $\cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta + \frac{3}{4} = 0.$

$$29. \tan 60^\circ \cdot \sin^2 45^\circ, \quad \frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}, \quad \text{及ヒ}$$

$$\cos A \tan A \tan(90^\circ - A) \operatorname{cosec}(90^\circ - A) \text{ノ數値ヲ問フ.}$$

次ノ各式ヲ證明セヨ[30乃至33].

$$30. \sin^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{6} \tan 60^\circ \cot 30^\circ.$$

$$31. \frac{\sin(90^\circ - A)}{\sec(90^\circ - A)} \cdot \frac{\tan(90^\circ - A)}{\cos A} = \cos A.$$

$$32. \frac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A.$$

$$33. (1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}.$$

$$34. \sin^2 30^\circ, \sin^2 45^\circ, \sin^2 60^\circ, \sin^2 90^\circ \text{ハ等差級數ヲ}$$

スコトヲ證セヨ。

$$35. \tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ \text{ ヨリ } x \text{ヲ求メ}$$

ヨ。

$$36. \tan(90^\circ - A) + \cot(90^\circ - A) \text{ ト } \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec}(90^\circ - A) \text{ トハ}$$

相等シキヤ否ヤ。

$$37. \sec A \operatorname{cosec}(90^\circ - A) - x \cot(90^\circ - A) = 1 \text{ ヨリ } x \text{ヲ求メ}$$

ヨ。

直角三角形

1. Cヲ直角トスル三角形ABCニ於テ

$$\tan A + \tan B = \frac{c^2}{ab}$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. 任意ノ三角形ニ於テ、高サハ底邊ヲ其ノ兩隣角ノ餘切ト比例スル二部ニ分ツコトヲ證セヨ。

3. 任意ノ三角形ノ高サニテ分タレタル頂角ノ二部ノ餘弦ハ、兩隣邊ト反比例ヲナスコトヲ證セヨ。

4. 塔及ビ塔尖ハ、其ノ塔ノ基底ヲ距ルコト a 間ナル同ジ水平面上ノ一點ニ於テ等角ヲ含ムト云フ、今塔ノ高サヲ h 間トセバ、塔尖ノ高サハ $\left(\frac{a^2 + h^2}{a^2 - h^2}\right)h$ 間ナルコトヲ證セヨ。

5. Cヲ直角トセル三角形ABCニ於テ

(1) $a=20$, $c=40$ ヲ知リテ b , A , 及ビ B ヲ求メヨ。

(2) $A=30^\circ$, $b=5$ ヲ知リテ a 及ビ c ヲ求メヨ。

(3) $B=25^\circ 43'$, $c=100$ ヲ知リテ A , a , 及ビ b ヲ求メ

ヨ。但 $\tan 25^\circ 43' = 0.482$, $\cos 25^\circ 43' = 0.901$ トス。

(4) $a=3$, $\sin A = \frac{3}{5}$ ヲ知リテ b , c , 及ビ $\sin B$ ヲ求メヨ。

(5) $A=38^\circ 10'$, $c=50$ ヲ知リテ a ヲ求メヨ.

(6) $b=20$, $A=78^\circ 20'$ ヲ知リテ c ヲ求メヨ.

(7) $a=37$, $c=100$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

但 $\sin 21^\circ 43' = 0.37$, $\cos 21^\circ 43' = 0.93$ トス.

(8) $a=225$, $b=272$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

但 $\tan 50^\circ 24' = 1.209$ トス.

6. 三角形 ABC ニ於テ; $A=30^\circ$, $B=135^\circ$, $AB=100^R$ ナルトキ, C ヨリ AB ノ延線ヘ引ケル垂線ノ長サヲ求メヨ.

7. 三角形 ABC ニ於テ, AD ハ BC ヘ垂線ニシテ, $AD=5$, $\hat{A}BD=60^\circ$, $\hat{A}CD=45^\circ$ ナルトキ, 本形ヲ解ケ.

8. 直角三角形 PQR ニ於テ

$$QR=8, \hat{Q}RP=60^\circ, \hat{Q}PR=30^\circ$$

ヲ知リテ, Q ヨリ斜邊 PR ヘ引ケル垂線ニテ分テル斜邊ノ二部ノ長サヲ求メヨ.

9. PQ ハ直線 QRS ヘ引ケル垂線ナルトキ

$$PQ=20, \hat{PRS}=135^\circ, \hat{PSR}=30^\circ$$

ヲ知リテ, RS ヲ求メヨ.

10. CD ハ直線 DBA ヘ引ケル垂線ニシテ

$$AB=59, \hat{C}BD=45^\circ, \hat{C}AB=32^\circ 50',$$

$\cot 32^\circ 50' = 1.5497$ ナルトキ, DC 及 $\hat{C}BD$ ヲ求メヨ.

11. 高サ 160 尺ノ帆檣ノ頂上ヨリ, 一ノ端艇ヲ望ムニ俯角 30° ナリ, 然ラバ本船ヨリ端艇マデノ距離如何.

12. 塔ノ基底ヨリ同ジ水平面上 $86^R.6$ ノ距離ノ一點ニ於テ, 塔ノ仰角 30° ナルトキ, 塔ノ高サ如何.

13. 高サ 132 尺ノ斷崖ノ下底ト同ジ水平面上ノ一點ニ於テ, 其ノ斷崖ノ仰角 $41^\circ 18'$ ナルトキ, 其ノ斷崖ノ頂上ヨリ觀測者マデノ距離ヲ問フ.

14. 塔ノ正東ニ當リテ互ニ 200 間ヲ離ルル兩地ヨリ, 其ノ塔ノ頂上ヲ望ムニ仰角 45° 及 $\hat{C} 30^\circ$ ナルトキ, 塔ノ高サヲ問フ.

15. 海面上高サ 80 間ノ燈臺ノ頂上ヨリ, 其ノ正西ニ當ルニツノ岩ノ俯角ガ 75° 及 $\hat{C} 15^\circ$ ナルトキ, 其ノ相互ノ距離ヲ問フ. 但 $\cot 75^\circ = 0.268$, 及 $\hat{C} \cot 15^\circ = 3.732$.

16. 正東ニ航スル船中ノ人ガ, 或トキ正南ニ當リテ他ノ二船ヲ觀測セリ, 而シテソレヨリ 3 哩行進セシニ, 二船ハ西ヨリ南ニ偏スルコト 60° 及 $\hat{C} 30^\circ$ ナリ, 依リテ今觀測者ヨリ二船マデノ距離如何.

17. 或日午前 10 時ニ燈臺ヨリ, 南東ノ方向ニ駛リツツアル一ノ小蒸氣船ヲ觀測セシニ, 北東 9 哩先ニアリ, 然ルニ此ノ日ノ午後一時ニ此ノ小蒸氣船ノ位置ハ, 東ヨリ南ニ偏スルコト 15° ノ方向ニアリ, 然ラバ

小蒸氣船ノ毎時ノ速度、及ビ二度目ノ觀測ノトキ、燈臺ヨリ小蒸氣船マデノ距離ヲ問フ。

18. 同ジ高サノ旗竿アリ、 x 尺ヲ離レテ立ツ、今コノ旗竿ノ基底ノアル直線上近キモノヨリ、 b 尺ノ所〔旗竿ト旗竿トノ間ニアラズ〕ノ一點ヨリ之ヲ望ムニ、近キモノハ α 度、遠キモノハ β 度ナル角ヲ含ムトキ

$$x = b(\tan \alpha \cot \beta - 1)$$

ナルコトヲ證セヨ。

19. 藥研形ノ溪谷ヨリ、之ニ長サ l ナル水平ノ橋ヲ架スルニ、溪谷ノ兩岸ノ斜面ハ橋トソレゾレ角 α 及ビ β ヲナスト云フ、然ラバ溪谷ノ底ヨリ橋マデノ高サハ

$$\frac{l}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

ナルコトヲ證セヨ。

20. 塔ノ頂上ニ旗竿アリ、其ノ塔ノ基底ヲ距ル a 尺ノ處ヨリ、旗竿ハ α 度ノ角ヲ含ミ、又塔ノ基底ヨリ b 尺ノ處ニテモ α 度ノ角ヲ含ムト云フ、然ラバ旗竿ノ長サハ如何。

21. 西南西ノ方向ニ敷設セル鐵道ニ於テ、停車場Aヨリ停車場Bニ走ル汽車アリ、Aニ停車セシトキ、互ニ1哩半ヲ離ルルニツノ塔ヲ、共ニ北北西ノ方向ヲ覘望セリ、然ルニBニ於テハ、其ノ塔ノ一ヲ北ヨリ

$70\frac{1}{2}$ 度東ニ、一ヲ北ヨリ $37\frac{1}{2}$ 度東ニ覘望シ、汽車ハAヨリBニ至ルニ2分間ヲ要セリ、然ラバ此ノ汽車毎時ノ速度如何。

任意の角の三角函數

1. 次ノ各角ニ於テ動徑ハ第何分面ニアルカ.

- (1) 290° . (2) 160° . (3) 255° . (4) -110° .
 (5) 570° . (6) -420° . (7) -660° . (8) 1120° .

2. 次ノ各三角函數ノ値ヲ求メヨ.

- (1) $\sin 495^\circ$, $\cos 495^\circ$, $\cot 495^\circ$.
 (2) $\sec 120^\circ$, $\tan 120^\circ$, $\operatorname{cosec} 120^\circ$.
 (3) $\operatorname{cosec} 315^\circ$, $\sec 315^\circ$, $\cot 315^\circ$.
 (4) $\tan(-300^\circ)$, $\cot(-300^\circ)$, $\sec(-300^\circ)$.
 (5) $\cos(-240^\circ)$, $\sec(-240^\circ)$, $\tan(-240^\circ)$.

3. 次ノ各三角函數ヲ 90° 以下ノ三角函數ニテ表ハセ.

$$\sin(-300^\circ), \quad \tan 1345^\circ, \quad \cos(-1000^\circ).$$

4. $A-270^\circ$ ノ三角函數ヲ求メヨ.

5. 次ノ三式ヲ最簡ニセヨ.

- (1) $\tan(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A)\sec(90^\circ - A)$.
 (2) $\sec(180^\circ + A)\sec(180^\circ - A) + \cot(90^\circ + A)\tan(180^\circ + A)$.
 (3) $\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A}{\sin(90^\circ + A)}$.

6. 角 A ハ 90° ヨリ小ナルモノトシテ, 次式ヲ幾何學的ニ證明セヨ.

$$(1) \sec(A-180^\circ) = -\sec A.$$

$$(2) \tan(270^\circ + A) = -\cot A.$$

$$(3) \cos(A-90^\circ) = \sin A.$$

7. 次ノ各方程式ニ適スル 360° ヨリ小ナル總テノ正角ヲ求メヨ.

$$(1) \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2) \tan \theta = -\sqrt{3}.$$

$$(3) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4) \tan \theta = -1.$$

8. 60° 及 $\pi-120^\circ$ ナル角ノ同ジ三角函數ニシテ, 同ジ値トナルモノハ何ナルカ.

9. -23° , -157° , 及 $\pi-157^\circ$ ナル角ノ同ジ三角函數ニシテ, 同ジ値トナルモノハ何ナルカ.

10. $\cos B = \cos A$, $\tan B = -\tan A$ ナルトキハ $A+B$ ハ 0° カ或ハ 360° ノ倍數ナリ

11. 次ノ三式ヲ證セヨ.

$$(1) \cos \theta (\tan \theta + 2)(2 \tan \theta + 1) = 2 \sec \theta + 5 \sin \theta.$$

$$(2) (\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \cot A + \tan A) = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A} - \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}$$

$$(3) \operatorname{cosec}(90^\circ + A)\sec(360^\circ - A) + \sin(180^\circ + A)\sec A \tan(180^\circ + A) \\ = \tan(45^\circ + A)\tan(45^\circ - A).$$

12. $\sin(90^\circ - A) + \sin(180^\circ - A) = 0$ ナルトキ, A ノーッ
ノ値ヲ求メヨ.

複角の三角函数

(1) 公式 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ノ別證ヲ次ニ示ス.

頂角 C ハ鈍角ナル三角形ノ二ツノ底角ヲ A, B ト
シ, AB ニ垂線 CN ヲ引ケ.

然ルトキハ頂角 C ノ外角 BCE

ハ鋭角ニシテ, $A+B$ ニ等シ.

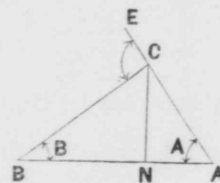
$$\text{故ニ} \quad \sin(A+B) = \frac{2\triangle ABC}{AC \cdot BC}$$

$$= \frac{NC \cdot BA}{AC \cdot BC}$$

$$= \frac{NC \cdot (BN + NA)}{AC \cdot BC}$$

$$= \frac{NC}{AC} \cdot \frac{BN}{BC} + \frac{NA}{AC} \cdot \frac{NC}{BC}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

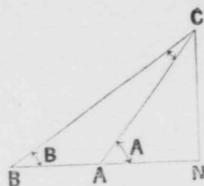


又三角形 ABC ノ A ニ於ケル外角ヲ A' トシ, 且コハ鋭

角ナリトシ、B ハーノ内角ナリ
トス。

BA ノ延線ニ垂線 CN ヲ引ケ。

然ルトキハ $\hat{ACB} = A - B$,



$$\begin{aligned} \text{故ニ } \sin(A-B) &= \frac{2\triangle ABC}{AC \cdot BC} \\ &= \frac{NC \cdot BA}{AC \cdot BC} \\ &= \frac{NC \cdot (BN - AN)}{AC \cdot BC} \\ &= \frac{NC}{AC} \cdot \frac{BN}{BC} - \frac{AN}{AC} \cdot \frac{NC}{BC}, \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B. \end{aligned}$$

而シテ $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ ノ公式モ亦同様ニシテ證明シ得ベシ。

$$(2) \text{ 公式 } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B},$$

$$\text{及ビ } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

ノ別證ヲ次ニ示ス。

本文 28 款ノ圖ニ於テ

$$\tan(A+B) = \frac{PM}{OM} = \frac{ON+PR}{ON-PQ}$$

$$= \frac{\frac{QN}{ON} + \frac{PR}{ON}}{1 - \frac{PQ}{ON}} = \frac{\frac{QN}{ON} + \frac{PR}{ON}}{1 - \frac{RQ}{PR} \cdot \frac{PR}{ON}}.$$

$$\text{サテ } \frac{QN}{ON} = \tan A, \quad \frac{RQ}{PR} = \tan A,$$

$$\text{而シテ } \frac{PR}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \tan B$$

ナルヲ以テ、之ヲ前式ニ代入スレバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

而シテ $\tan(A-B)$ ノ公式モ亦同様ニシテ證明シ得ベシ。

$$(3) \text{ 公式 } \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

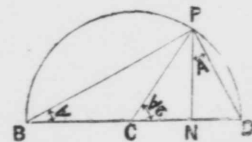
ノ別證ヲ次ニ示ス。

C ヲ中心トシ、BD ヲ徑ト

スル半圓周上ニ任意ノ點 P

ヲ取リ、PB, PC, PD ヲ結ビ付

ケ、BD ニ垂線 PN ヲ引ケ。



而シテ $\hat{PBD} = A$ トスレバ $\hat{PCD} = 2A$,

又

$$\widehat{NPD} = 90^\circ - \widehat{PDN} = \widehat{PBD} = A.$$

$$\begin{aligned}\sin 2A &= \frac{PN}{CP} = \frac{2PN}{2CP} \\ &= \frac{2PN}{BD} = 2 \frac{PN}{BP} \cdot \frac{BP}{BD} \\ &= 2 \sin A \cos A.\end{aligned}$$

而シテ $\cos 2A$ ノ三ツノ公式ヲ證明スルモ亦同様ナリ.

1. $\sin A = \frac{11}{61}$, $\sin B = \frac{9}{41}$ ナルトキ, $\cos(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ.

2. $\sec A = \frac{17}{15}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{61}{11}$ ナルトキ, $\sin(A+B)$ ヲ求メヨ.

3. $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ ナルトキ, $\sec(A+B)$ ヲ求メヨ.

4. $\tan A = a$, $\tan B = b$ ナルトキ, 次式ヲ證セヨ.

$$\sin(A+B) = \frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

次ノ各式ヲ證セヨ[5 乃至 38].

$$5. \frac{1-\cos A}{\sin A} = \tan \frac{1}{2}A. \quad 6. \frac{1+\cos A}{\sin A} = \cot \frac{1}{2}A.$$

$$7. \tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \sin \beta}. \quad 8. \cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$9. \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A - 1} = \sec 2A. \quad 10. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

$$11. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{\alpha+\beta}{2}. \quad 12. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$13. \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad 14. \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$15. \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha+\beta}{2} \cot \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$16. \frac{\tan A \cot B + 1}{\tan A \cot B - 1} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$$

$$17. \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right).$$

$$18. \cos(n-1)A \cos A - \sin(n-1)A \sin A = \cos nA.$$

$$19. \cos(n-1)A \cos(n+1)A - \sin(n-1)A \sin(n+1)A = \cos 2nA.$$

$$20. \tan \alpha = \frac{m}{m+1}, \quad \tan \beta = \frac{1}{2m+1} \text{ ナルトキハ}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = 1.$$

$$21. \tan \alpha = a+1, \quad \tan \beta = a-1 \text{ ナルトキハ}$$

$$2 \cot(\alpha-\beta) = a^2.$$

$$22. \frac{\tan(n+1)A + \tan(1-n)A}{1 - \tan(n+1)A \tan(1-n)A} = \tan 2A.$$

$$23. \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A.$$

$$24. \frac{1 + \cos \theta + \cos \frac{1}{2}\theta}{\sin \theta + \sin \frac{1}{2}\theta} = \cot \frac{\theta}{2}. \quad 25. \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}\theta}{1 - \tan \frac{1}{2}\theta}.$$

26. $\frac{\cos(\theta-3\phi)-\cos(3\theta+\phi)}{\sin(3\theta+\phi)+\sin(\theta-3\phi)}=\tan(\theta+2\phi).$
27. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0.$
28. $\tan A \pm \tan B = \sin(A \pm B) \sec A \sec B.$
29. $\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A$
 $+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C.$
30. $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C.$
 $- \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B.$
31. $\frac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} = \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C.$
32. $\frac{\cos(A+B+C)}{\sin A \sin B \sin C} = \cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C.$
33. $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}.$
34. $\cot(A+B+C) = \frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1}.$
35. $\cos^2 A + \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}, *$
36. $\sin^2 A + \sin^2(120^\circ + A) + \sin^2(120^\circ - A) = \frac{3}{2}.$
37. $\cos 20^\circ \cos 10^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$
38. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキハ、
- (1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

* $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$ ナ用ヒヨ。

- (2) $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1.$
39. $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ヲ四ツノ正弦ノ和ノ形ニ直セ。
40. $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ ヲ四ツノ餘弦ノ和ノ形ニ直セ。

分角の三角函數

(1) $\cos A$ の項ニテ $\frac{A}{2}$ の三角函數ヲ求ムルコト.

本文公式 (33), (34) ヨリ次ノ如シ.

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

若シ A ノ値ヲ知ルトキニハ, $\frac{A}{2}$ ガ第何分面ニアルカヲ知リ得可ク, 從ヒテ其ノ正弦餘弦ニハ兩意アルコトナシ. 然レドモ若シ A ガ唯或一定ノ餘弦ヲモツト云フコトノミガ知ラレタルトキハ, A ハ其ノ餘弦ヲモツ銳角又ハ鈍角ナルベシ. 故ニ其ノ角ハ A , 或ハ $360^\circ - A$, 又ハ是等ヨリ 360° ノ或倍數ニテ差フ所ノ任意ノ角ナルベシ. 依リテ其ノ半角ハ $\frac{A}{2}$, 或ハ $180^\circ \pm \frac{A}{2}$, 又ハ $360^\circ - \frac{A}{2}$, 若シクハ是等ヨリ 180° ノ倍數ニテ差フ所ノ角ナルベシ. サテ 180° ノ倍數ニテ差フ所ノ角ノ三角函數ハ唯符號ヲ異ニスルノミナルユエ, ソレヨリ符號ノ兩意ヲ説明シ得ベシ.

$$\text{又} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}.$$

サテ $1 + \cos A$ ハ正ナルヲ以テ $\tan \frac{A}{2}$ ハ $\sin A$ ト同符號ヲ有ス, 依リテ $\frac{A}{2}$ ノ正切ニハ兩意ナシ, 而シテ $A < 180^\circ$ ナルトキハ, $\sin A$ 及ビ $\tan \frac{A}{2}$ ハ正ナリ, 而シテ $\sin A$ ハ 180° ノ各倍數ニ於テ符號ヲ變ズルユエ, $\tan \frac{A}{2}$ ハ 90° ノ各倍數ニ於テ符號ヲ變ズ可シ.

注意 $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\text{ナルユエ} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}.$$

(2) $\sin A$ ノ項ニテ $\frac{A}{2}$ ノ正弦餘弦ヲ求ムルコト.

$$\text{サテ} \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = 1,$$

$$\text{及ビ} \quad 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin A$$

$$\text{ナルユエ} \quad \left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A,$$

$$\text{及ビ} \quad \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)^2 = 1 - \sin A.$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A} \\ \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 - \sin A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

或ハ加法減法ヲ行ヒテ

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \\ 2 \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)^*$$

是等ノ公式ヲ用フルニ當リテ, (C) ニ於テハ二ヶ所

* $\frac{A}{2}$ ノ正弦及ビ餘弦ニ四ツノ値アル理由ハ幾何學的ニ次ノ如

ノ兩意アレドモ、(B)ニ於テハ唯一ヶ所ノ兩意ニ止ルユエ、概シテ(B)ノ方ガ便利ナリ。

例 105° 及 165° ノ正弦餘弦ヲ求ムルニ、前ノ二法ヲ以テスベシ。

(I) 是等ノ角ハ何レモ 90° ヨリ大キク、 180° ヨリ小ナルユエ

$$\sin 105^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}}.$$

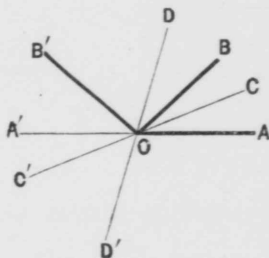
$$[\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ヲ注意セヨ}.]$$

ク説明スルコトヲ得可シ。今或角ノ

正弦ヲ知レリトシ、且コレヲ正ナリトス。銳角 AOB ナシテ與ヘラレタル正弦ヲ有タシメ、AO ナ A' ニ引キ延バシ $\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$ ナラシメヨ。

然ルトキハ $\widehat{A'OB'}$ ハ $\widehat{AOB}$ ト同シ正弦ヲモチ、而シテ是等ノ角ヨリ 360° ノ任意ノ倍數ニテ差フ所ノ各角モ亦前ト同ジ正弦ヲモツ可シ。

故ニ A ハ $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ 、或ハ是等ヨリ 360° ノ倍數ニテ差フ所ノ任意ノ角ナリ。 $\widehat{AOB}$ ナ OC ニテ二等分シ CO ナ C' ニ引キ延バシ、 $\widehat{A'OB'}$ ナ OD ニテ二等分シ、 DO ナ D' ニ引キ延バセ 然ルトキハ $\frac{A}{2}$ ハ $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{A'OC'}$, $\widehat{A'OD'}$ 、或ハ是等ヨリ 360° ノ倍數ニテ差フ所ノ任意ノ角ナリ。 $\widehat{AOC}$, $\widehat{A'OC'}$ ハ符號ニ於テノミ異ナル三角函數ナモチ、 $\widehat{AOD}$, $\widehat{A'OD'}$ モ亦然リ、然ルニ $\widehat{AOC}$, $\widehat{A'OD'}$ ノ三角函數ハ大イサチ異ニス可シ。依リテ $\sin A$ ガ與ヘラレタルトキ、 $\frac{A}{2}$ ハ其ノ三角函數ガ大イサ並ニ符號ヲ異ニスル四ツノ角ノ一組ノ中ノ一ナルベシ、



$$\text{同様ニ } \cos 105^\circ = -\sqrt{\frac{1 + \cos 210^\circ}{2}} = -\frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \sin 165^\circ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 330^\circ}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1 + \cos 330^\circ}{2}} = -\frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}}.$$

(II) $135^\circ > 105^\circ > 45^\circ$ ナルユエ、絶對値ニテ其ノ正弦ハ餘弦ヨリ大ナリ。故ニ $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ$ 、及 $\sin 105^\circ - \cos 105^\circ$ ハ共ニ正ナリ。

$$\therefore \sin 105^\circ + \cos 105^\circ = +\sqrt{1 + \sin 210^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 105^\circ - \cos 105^\circ = +\sqrt{1 - \sin 210^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \text{前ノ如ク } \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{及ビ } \cos 105^\circ = -\frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}}.$$

又 $225^\circ > 165^\circ > 135^\circ$ ナルユエ、其ノ餘弦ハ絶對値ニテ其ノ正弦ヨリ大ニシテ且負ナリ。

$$\therefore \cos 165^\circ + \sin 165^\circ = -\sqrt{1 + \sin 330^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{及ビ } \cos 165^\circ - \sin 165^\circ = -\sqrt{1 - \sin 330^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \sin 165^\circ = \frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}}, \text{ 及ビ } \cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}}$$

1. A が (1) 80° , (2) 100° , (3) 390° , (4) 1000° = 等シキトキ, 公式(A)ノ符號ヲ決定セヨ.

2. A が (1) 100° , (2) 260° , (3) 450° , (4) 1890° = 等シキトキ, 公式(C)ニ於ケル符號ヲ決定セヨ.

$$3. \tan^2 \frac{A}{2} \tan A + 2 \tan \frac{A}{2} - \tan A = 0 \text{ ヲ證セヨ.}$$

$$\text{是ニ依リテ } \tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A} = (-1 \pm \sec A) \cot A$$

ナルコトヲ證セヨ.

又本式ヨリ (1) $A=60^\circ$, (2) $A=300^\circ$ ナルトキ $\tan \frac{A}{2}$ ヲ求メヨ.

$$4. 2\cos 11^\circ 15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \text{ ナルコトヲ證セヨ.}$$

5. $\sin A + \cos A = +\sqrt{1 + \sin 2A}$ ナルトキハ, $A < 135^\circ$ 又ハ $A > 315^\circ$ ナルコトヲ證セヨ.

6. $\sin A + \cos A = -\sqrt{1 + \sin 2A}$ ナルトキハ, A ハ 135° ト 315° トノ間ニアルコトヲ證セヨ.

$$7. \cos A - \sin A = +\sqrt{1 - \sin 2A} \text{ ナル場合ヲ吟味セヨ.}$$

三角形の性質

$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ [1乃至 10].

$$1. \cos(A+B-C) = -\cos 2C.$$

$$2. \cot \frac{1}{2}(B+C) = \tan \frac{1}{2}A.$$

$$3. \frac{\sin 3B - \sin 3C}{\cos 3C - \cos 3B} = \tan \frac{3}{2}A.$$

$$4. \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A-B}{2}.$$

$$5. \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C.$$

$$6. \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$7. \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$8. \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A \cos B \sin C.$$

$$9. \cos(B+C-A) + \cos(C+A-B) - \cos(A+B-C) + 1 = 4\sin A \sin B \cos C.$$

$$10. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C.$$

Cヲ直角トセル三角形 ABCニ於テ, 次式ヲ證セヨ [11乃至 18].

$$11. \tan B = \cot A + \cos C.$$

$$12. \cos 2A + \cos 2B = 0.$$

$$13. \sin 2A = \frac{2ab}{c^2}.$$

$$14. \operatorname{cosec} 2B = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}.$$

$$15. \cos 2B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}.$$

$$16. \left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{a+c}{c}.$$

$$17. \sin(A-B) + \sin(2A+C) = 0.$$

$$18. \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{2\sin A}{\cos 2B}.$$

三角形 ABC = 於テ次ノ各式ヲ證セヨ.

[19 乃至 33]

$$19. \frac{b+c}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A}.$$

$$20. \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

$$21. \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

$$22. \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = c \left(\frac{\cos B}{b} - \frac{\cos A}{a} \right).$$

$$23. 2\cos B \sin C = \sin A \quad \text{ナルトキハ} \quad B=C.$$

$$24. c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}.$$

$$25. \sqrt{bc \sin B \sin C} = \frac{b^2 \sin C + c^2 \sin B}{b+c}.$$

$$26. a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$$

$$27. b+c-a = (b+c)\cos A - (c-a)\cos B + (a-b)\cos C.$$

$$28. \sqrt{bc \sin B \sin C} = \frac{b^2 \sin B + c^2 \sin C}{b+c} \quad \text{ナルトキハ} \quad B=C$$

$$29. a=2b \text{ 及 } \angle A=3B \text{ ナルトキハ } C=60^\circ.$$

$$30. abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C) = 8\Delta^2.$$

$$31. a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} + b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2} + c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2} = 0.$$

$$32. (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0.$$

$$33. \Delta = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{2s^2 \sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}.$$

三角形の性質

[本文ノ續]

(1) 三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求ムルコト.

三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ S,
半徑ヲ R トス. $\widehat{BSC}$ ヲ二等分ス
ル SD ハ又 BC ヲ直角ニ二等分ス
ベシ. サテ $\widehat{BSC} = 2\widehat{BAC} = 2A$.

而シテ $\frac{a}{2} = BD = BS \sin BSD$

$$= R \sin A.$$

$$\therefore R = \frac{a}{2 \sin A}.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

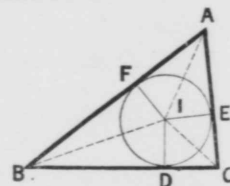
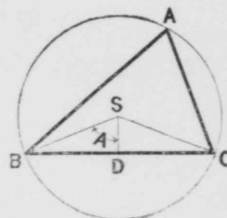
注意 $a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$

(2) 三角形ノ内切圓ノ半徑ヲ求ムルコト.

三角形 ABC ノ内切圓ノ中心ヲ
I, 半徑ヲ r トシ; D, E, F ヲ切點

トスレバ; ID, IE, IF ハソレゾレ

邊 BC, CA, AB へ垂線ナリ.



而シテ $\Delta = (\text{三角形 BIC, CIA, AIB ノ面積ノ和})$

$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s}.$$

(3) 三角形ノ傍切圓ノ半徑ヲ求ムルコト.

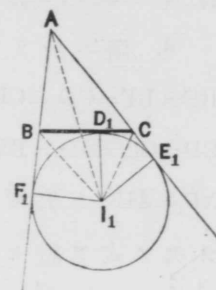
三角形 ABC ノ邊 BC 及ビ邊 AB, AC

ノ延線ニ切スル傍切圓ノ中心ヲ I_1 ,

半徑ヲ r_1 トシ; D_1, E_1, F_1 ヲ切點ト

スレバ; I_1D_1, I_1E_1, I_1F_1 ハソレゾレ邊

BC, AC, AB へ垂線ナリ.



然ルトキハ

$$\Delta = (\text{面積 } ABI_1C) - (\text{面積 } BI_1C)$$

$$= (\text{面積 } BI_1A) + (\text{面積 } CI_1A) - (\text{面積 } BI_1C)$$

$$= \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br_1 - \frac{1}{2}ar_1 = \frac{1}{2}(b+c-a)r_1$$

$$= (s-a)r_1,$$

$$\therefore r_1 = \frac{\Delta}{s-a}.$$

角 B 及ビ C へ對スル傍切圓ノ半徑ヲソレゾレ r_2, r_3

トスレバ, 同様ニ $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}, \quad r_3 = \frac{\Delta}{s-c}.$

三角形 ABC へ於テ次ノ各式ヲ證セヨ [1 乃至 6].

$$1. \quad R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

$$2. \quad r = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} / \cos \frac{A}{2}.$$

$$3. r_1 = a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{A}{2}. \quad 4. r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$5. r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad 6. \frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_2 - r}{b} = \frac{c}{r_3}.$$

7. 若シ $r_1 = r_2 + r_3 + r$ ナルトキハ、三角形ハ直角ヲ有スルコトヲ證セヨ。

8. 圖ニ於テ $AF = AE = s - a$,

$BD = BF = CD_1 = CE_1 = s - b$,

$CD = CE = BD_1 = BF_1 = s - c$,

$AF_1 = AE_1 = s$ ナルコトヲ注意シ

テ次ノ式ヲ證セヨ。

$$r = (s - a) \tan \frac{A}{2}$$

$$= (s - b) \tan \frac{B}{2}$$

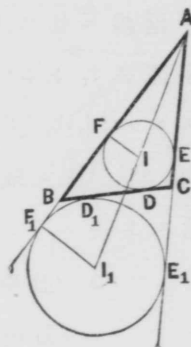
$$= (s - c) \tan \frac{C}{2}.$$

$$r_1 = s \tan \frac{A}{2}, \quad r_2 = s \tan \frac{B}{2}, \quad r_3 = s \tan \frac{C}{2}.$$

9. 三角形ノ二邊ガ 300 尺、及ビ 120 尺ニシテ、其ノ夾角ガ 150° ナルトキ面積如何。

10. 三角形ノ三邊ガ 171, 204, 195 ナルトキハ面積如何。

11. 三角形ノ三邊ガ 70, 147, 及ビ 119 ナルトキ、最大角ノ正弦ハ如何



12. 三角形ノ三邊ガ 39, 40, 25 ナルトキ、各角頂ヨリ對邊ヘ引ケル三ツノ垂線ノ長サ如何。

13. 三角形ノ一邊ガ 30 尺ニシテ、兩隣角ガ $22^\circ \frac{1}{2}$ 及ビ $112^\circ \frac{1}{2}$ ナルトキ面積如何。

14. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ ナルトキ、 r 及ビ R ヲ求メヨ。

15. 三角形ノ三邊ガ 17, 10, 21 ナルトキ r_1 , r_2 , r_3 ヲ求メヨ。

16. 三角形ノ面積ガ 96 ニシテ、傍切圓ノ半徑ガ 8, 12, 24 ナルトキ三邊ヲ求メヨ。

三角形 ABC ニ於テ次ノ各式ヲ證セヨ。

$$17. \sqrt{rr_1r_2r_3} = \Delta. \quad 18. s(s-a) \tan \frac{A}{2} = \Delta.$$

$$19. rr_1 \cot \frac{A}{2} = \Delta. \quad 20. 4Rrs = abc.$$

$$21. r_1r_2 + rr_3 = ab. \quad 22. r_1r_2r_3 = rs^2.$$

$$23. Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta.$$

$$24. r_1 + r_2 = c \cot \frac{C}{2}.$$

$$25. \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$$

$$26. r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2 = s^2. \quad 27. r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R.$$

$$28. a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

$$29. a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r).$$

$$30. r(\sin A + \sin B + \sin C) = 2R \sin A \sin B \sin C.$$

三角形の解法

次ノ各ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ[1乃至7].

$$1. B=60^\circ 15', \quad C=54^\circ 30', \quad a=100.$$

$$2. a=5, \quad b=5\sqrt{3}, \quad c=5.$$

$$3. a=25, \quad b=31, \quad c=7\sqrt{2}.$$

$$4. a=327, \quad c=256, \quad B=56^\circ 28'.$$

$$5. a=681.56, \quad c=243.15, \quad B=50^\circ 42'.$$

$$6. b=63, \quad c=36, \quad C=29^\circ 23' 15''.$$

$$7. a=145.6, \quad b=178.3, \quad B=42^\circ 15'.$$

8. 三角形ノ三邊ガ 35, 49, 63 ナルトキ, 其ノ最大角ヲ求メヨ.

$$9. b=4c, A=65^\circ \text{ ナルトキ, } B \text{ ト } C \text{ トヲ求メヨ.}$$

10. 三角形ノ二邊ガ 9 及ビ 3 ニシテ, 其ノ對角ノ差ガ 90° ナルトキ, 各角ヲ求メヨ.

11. $b:c=11:10$, 及ビ $A=35^\circ 25'$ ナルトキ, B 及ビ C ヲ求メヨ.

12. $c^2=a^2+b^2$ ナル式ヲ, $\frac{b}{a}=\tan \theta$ トシテ, 對數計算ニ適スル式ニ變形セヨ.

13. $\tan \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \sin \frac{C}{2}$ ナルトキ, $c = (a-b) \sec \theta$ ナルコトヲ證セヨ.

14. $\tan \phi = \frac{a+b}{a-b} \tan \frac{C}{2}$ ナルトキ, $c = (a-b) \cos \frac{C}{2} \sec \phi$ ナルコトヲ證セヨ.

$a=27.3$, $b=16.8$, $C=45^\circ 12'$ ナルトキ ϕ ヲ求メ, 而シテ是ニ依リテ c ヲ求メヨ.

15. 兩底角ノ差ガ $17^\circ 48'$ ニシテ, 之ニ對スル邊ガ 105.25 及ビ 76.75 ナルトキ, 此ノ二邊ノ夾角ヲ問フ.

16. 兩意ノ場合ニ於テ $c' = 2c''$ ナルトキハ

$$3b = a\sqrt{1+8\sin^2 B}$$

ナルコトヲ證セヨ.

17. 兩意ノ場合ニ於テ $\sin \frac{C'-C''}{2} = \frac{c'-c''}{2b}$ ナルコトヲ證セヨ.

18. a, b, A ガ與ヘラレタルトキ次式ヲ證セヨ.

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin C'}{c'}, \quad \frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin C'}{\sin B'} = 2 \cos A.$$

三角形解法の應用

視水平ノ俯角 圓 BCD ハ地球ノ中心ヲ過ル平面ニテノ截面ヲ表ハスモノトシ, A ハ地球ノ上方ノ一點, AC ハ A ヨリ引ケル切線トス. 然ルトキハ圓 BCD ガ BD ヲ軸トシテ廻轉スレバ, 地球面上ノ點 C ハ圓 CFG ヲ畫クベシ, 而シテ此ノ圓ヲ點 A ノ視水平ト稱ス, 而シテ AD ニ垂直ニ AE ヲ引ケバ, AE ガ AC トナス角ヲ視水平ノ俯角ト云フ.

今コレニ關スル次ノ三問題ハ極メテ面白キモノナリ.

(1) AB ノ呷ノ數ヲ與ヘテ

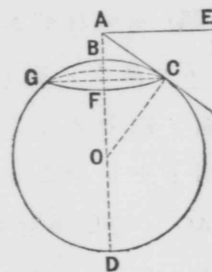
AC ノ哩ノ數ヲ求ムル法.

AB ヲ h 呷トシ, r ヲ地球ノ半徑

ノ哩ノ數トスレバ [$2r=7926$],

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot AD \div AB \cdot BD^*$$

$$= \frac{h}{5280} \times 2r = \frac{7926h}{5280} \div \frac{3}{2}h.$$



* 圓形ニ於テノ AB ハ, 説明ノ便宜上故意ニ大キク表ハシアレドモ, BO ニ比較スレバ極メテ小ナリ. 故ニ AD ト BD トハ殆ンド相等シ.

依リテ水平距離ノ哩ノ數ノ平方ハ地球上ノ測士ノ高サノ呎ノ數ノ約ソ二分ノ三ニ等シ。

(2) h ノ項ニテ視水平ノ俯角ヲ求ムル法。

$\widehat{EAC} = \widehat{AOC} = \theta$, h ハ r ニ比較スレバ極メテ小ナルユエ, 角 θ ハ極メテ小ナリ, 而シテ切線 AC ハ殆ンド BC ニ等シ, 然ルニ $\theta = BC/r$, 依リテ殆ンド $\theta = AC/r = \sqrt{(2h/r)}$, 而シテ r ヲ呎ニテ, θ ヲ秒ニテ表ハセバ

$$\theta = \frac{206265 \times \sqrt{h}}{\sqrt{(3963 \times 2640)}},$$

即チ $(63.65\sqrt{h})$ 秒, 即チ $(1.06\sqrt{h})$ 分。

但 206265 ハ一れてあんノ中ノ秒數ナリ。

(3) h ハ高サノ呎ノ數ナルトキハ, A ヨリ見得ベキ地球面ノ部分ノ平方哩ノ數ハ殆ンド $3\pi h/2$ ナリ。

如何トナレバ A ヨリ見得ベキ地球面ノ部分ハ, 殆ンド AC ニ等シキ半徑ヲモツ圓ノ面積ニ等シ, 即チ $\pi \overline{AC}^2$ ナリ, 然ルニ $\overline{OA}^2$ ハ $3h/2$ ニ等シ。是ニ依リテ A ヨリ見得ベキ地球面ノ部分ノ面積ハ $3\pi h/2$ ナリ。

次ノ二問題ハ容易ニ證明シ得可シ。

(4) 地球面ノ A ヨリ見得ベキ部分ト, 地球ノ全面積トノ比ハ, A ノ高サト地球ノ徑トノ比ニ等シ。

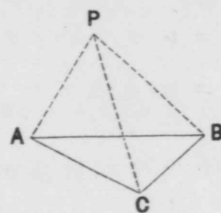
(5) 二點ノ高サ同ジカラザルトキハ, 其ノ二點ヨリ見得ベキ地球面ノ部分ノ面積ハ, 殆ンド其ノ二點

ノ高サニ比例スベシ。

三點ノ問題 三點 A, B, C ヲニツヅツ結ビ付クル直線ノ長ヲ知リテ; A, B, C ト同一ノ平面上ノ任意ノ點 P ニ於テ角 APC, BPC ヲ觀測シ, 三點 A, B, C ノ各ヨリ P ニ至ル距離ヲ求メントス。

$$\widehat{APC} = \alpha, \widehat{BPC} = \beta, \widehat{PAC} = x, \widehat{PBC} = y$$

トス。 α, β ハ既知ナリ, 而シテ x 及ビ y ヲ求メ得レバ, 正弦比例ニ依リテ PA, PB, PC ヲ求メ得可シ。



三角形 APC, BPC ノ各角ノ和ハ4直角ニ等シ。

$$\text{故ニ} \quad x + y = 360^\circ - \alpha - \beta - C.$$

故ニ x 及ビ y ノ和ハ既知ナリ。

三角形 ACP ヨリ

$$PC = \frac{AC \sin PAC}{\sin APC} = \frac{b \sin x}{\sin \alpha}.$$

三角形 BCP ヨリ

$$PC = \frac{BC \sin PBC}{\sin BPC} = \frac{a \sin y}{\sin \beta}.$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{b \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta}.$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta},$$

$$\text{サテ} \quad \tan \phi = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$$

トスレバ、 ϕ ノ値ハ三角函數表ヨリ求メ得可シ。

然ルトキハ $\frac{\sin x}{\sin y} = \tan \phi$,

依リテ $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\tan \phi - 1}{\tan \phi + 1} = \tan\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$,

故ニ $\frac{\tan \frac{1}{2}(x-y)}{\tan \frac{1}{2}(x+y)} = \tan\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$.

コレヨリ $x-y$ ヲ求メ得ベク、而シテ $x+y$ ハ既知ナル
ユエ、 x 及ビ y ヲ求メ得可シ.*

1. 一直線BCハAニ於テ直角ヲ含ム、而シテA及
ビBニ於テ、Cニアル塔ヲ觀測セシニ、仰角ハソレゾ
レ 30° 及ビ 18° ナリト云フ、然ルトキハ塔ノ高サハ

$$\frac{AB}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. 三角形ノ三ツノ角ノ比ハ $1:2:3$ ニシテ、最大
角ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ30間ナルトキ、各邊ノ長
サ如何

3. 正南ニ面スル或傾斜地ヲ正北ニ向ヒテ登レ
バ、其ノ勾配 $\frac{1}{2}$ ナルトキ、之ヲ北東ニ向ヒテ登レバ、其
ノ勾配 $\frac{1}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

4. 相距ルコト1哩ナル兩地、及ビ其ノ中央ノ地

* 三點ノ問題ハ、港灣ニ碇泊セル船舶ノ位置ヲ測定スルナドニ
用ヒラル。

ヨリ、一ノ輕氣球ノ仰角ハ 60° , 30° , 及ビ 45° ナルトキ、
輕氣球ノ高サハ $440\sqrt{6}$ 碼ナルコトヲ證セヨ。

5. 長サ $2a$ ナル基線ノ兩端ニ於テ、或山ノ仰角ガ
 θ ニシテ、其ノ基線ノ中點ニ於ケル仰角ガ ϕ ナルトキ、
山ノ高サハ $a \sin \theta \sin \phi \sqrt{\operatorname{cosec}(\phi + \theta) \operatorname{cosec}(\phi - \theta)}$ ナルコトヲ
證セヨ。

6. 或湖水面上高サ h 尺ナル一點ヨリ、雲ノ仰角
ヲ測リシニ α ナリ、而シテ其ノ湖水ノ面ニ投ズル影
ノ俯角ハ β ナルトキ、雲ノ高サハ

$$\frac{h \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

ナルコトヲ證セヨ。

7. 高サ b 尺ノ塔ノ上ニ立ツ高サ a 尺ノ旗竿ア
リ、塔ノ基底ト同水平面上ニテ、ソレヨリ d 尺ノ距離
ニアル高サ h ナル一點ヨリ塔、及ビ旗竿ハ等角ヲ含
ムトキハ

$$(a-b)d^2 = (a+b)b^2 - 2b^2h - (a-b)h^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

8. 停車場Aハ汽車Bノ正西ニ當レリ、今汽車ハ
北西ノ方向ニ6哩ヲ走リシニ、Aハ汽車ヨリ南南西
ニ當レリト云フ、然ラバ距離ABハ如何。

9. 城壁ノ上ニ旗竿アリ、城壁ノ基底ト同水平面

上ノ一點ニ於テ、城壁ハ α 、旗竿ハ β ナル角ヲ含ムト云フ、今城壁ニ向ヒテ c 尺進ミシニ、旗竿ハ亦 β ナル角ヲ含ムト云フ、城壁及ビ旗竿ノ高サ如何。

10. 山ノ高サガ $2\frac{1}{2}$ 哩ナルトキ、其ノ頂上ヨリ視水平ノ俯角ハ幾度ナルカ、但地球ノ半徑ハ3963哩トス。

11. 二直線 ABC , DEC ガ C ニ於テ相交リ、且 $\widehat{DAE} = \widehat{DBE} = \alpha$, $\widehat{EAB} = \beta$, $\widehat{EBC} = \gamma$ ナルトキハ

$$BC = \frac{AB \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma - \beta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

ナルコトヲ證セヨ。

12. 直角三角形ノ斜邊、及ビ直角ノ二等分線ヲ與ヘテ之ヲ解ケ。

13. 直角三角形ノ内切圓ノ半徑、及ビ直角ノ二等分線ヲ與ヘテ之ヲ解ケ。

14. 三角形ノ角 A 、此ノ角ヨリ引ケル高サ h 、同ジク中線 m ヲ與ヘテ之ヲ解ケ。

15. 丘陵ノ頂上ヨリ、水平直線上ノ道路ニアル三ツノ連續シタル一里塚ノ俯角ガ α , β , γ ナルトキ、此ノ丘陵ノ高サハ

$$12960\sqrt{2}/\sqrt{\cot^2\alpha - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma} \text{ 尺}$$

ナルコトヲ證セヨ。

16. 太陽ノ高度ガ 47° ナルトキ、棒ヲ水平ト如何ナル角ヲナシテ立ツレバ、其ノ影ノ長サガ極大ナルベキカ。

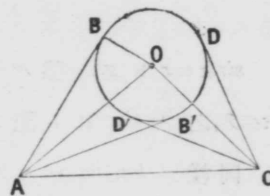
17. 近ヅクベカラザル圓塔

ノ半徑 OB ヲ測定セントシ、基線 $AC = d$ 、及ビ切線 AB , AB' , CD , CD' ヲ引キ、角 BAC , $B'AC$, ACD , ACD' ヲツレゾレ α , α' , γ , γ' トスレバ

所要ノ半徑ハ

$$\frac{d \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin \frac{1}{2}(\gamma + \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma')}$$

ナルコトヲ證セヨ。



逆三角函數

$\sin \alpha = x$ トス。然ルトキハ α ハ x ヲ正弦トセル角ニシテ、之ヲ $\sin^{-1}x$ ト記ス。

同様ニ $\tan^{-1}x$ ハ x ヲ正切トセル角ナリ。斯ノ如キ式ヲ逆三角函數ト稱ス。

(1) $\sin \alpha = x$ ヲ與ヘテ $\tan \alpha$ ヲ求ムルコト。

直角三角形 ABC = 於テ AB=1,

BC=x トス, $\therefore \sin BAC = x$, 然ルト

キハ $\widehat{BAC} = \alpha$, $AC = \sqrt{1-x^2}$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

或ハ $\alpha = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) x, y ヲ與ヘテ $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$ ヲ求ムルコト

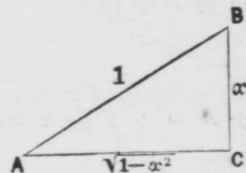
$\tan^{-1}x = \alpha$, $\tan^{-1}y = \beta$ トスレバ $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \alpha + \beta$.

サテ公式 (22) ヨリ

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + y}{1 - xy},$$

$$\therefore \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$\text{同様ニ} \quad \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x - y}{1 + xy}.$$



注意 $\tan^{-1}1 = 45^\circ$ ナリ。

1. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\tan^{-1}(-1)$ ノ値ヲ求メヨ。

次ノ各式ヲ證セヨ [2 乃至 12].

2. $2\tan^{-1}x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$. 3. $\sin^{-1} \frac{12}{13} = \cot^{-1} \frac{5}{12}$.

4. $\operatorname{cosec}^{-1} \frac{17}{8} = \tan^{-1} \frac{8}{15}$. 5. $2\tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} \frac{3}{4}$.

6. $\sec(\tan^{-1}x) = \sqrt{1+x^2}$. 7. $\tan^{-1} \frac{4}{3} - \tan^{-1}1 = \tan^{-1} \frac{1}{7}$.

8. $2\cot^{-1} \frac{5}{4} = \tan^{-1} \frac{40}{9}$. 9. $2\tan^{-1} \frac{8}{15} = \sin^{-1} \frac{240}{289}$.

10. $\tan^{-1}5 - \tan^{-1}3 + \tan^{-1} \frac{7}{9} = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

11. $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$.

12. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = 180^\circ$ ナルトキハ

$$x + y + z = xyz.$$

三角方程式

(1) 與ヘラレタル正弦ヲモツ最小正角ヲ α 度トスレバ、此ノ正弦ヲモツ總テノ角ヲ含ム公式ハ

$$n \cdot 180^\circ + (-1)^n \alpha^\circ$$

ナリ、但 n ハ零、若シクハ正負任意ノ整數ナリ。

(2) 與ヘラレタル餘弦ヲモツ最小正角ヲ α 度トスレバ、此ノ餘弦ヲモツ總テノ角ヲ含ム公式ハ

$$n \cdot 360^\circ \pm \alpha^\circ$$

ナリ、但 n ハ零、若シクハ正負任意ノ整數ナリ。

(3) 與ヘラレタル正切ヲモツ最小正角ヲ α 度トスレバ、此ノ正切ヲモツ總テノ角ヲ含ム公式ハ

$$n \cdot 180^\circ + \alpha^\circ$$

ナリ、但 n ハ零、若シクハ正負任意ノ整數ナリ。

次ノ各方程式ノ一般ノ解答ヲ求メヨ。

$$1. \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \sin^2 \theta = \sin^2 \alpha.$$

$$3. \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

$$4. \cot 4\theta = \cot \theta.$$

$$5. \cos^2 \theta = \frac{1}{2}.$$

$$6. \tan^2 \theta = \frac{1}{3}.$$

$$7. \cos 3\theta = \cos 2\theta.$$

$$8. \sin 5\theta + \sin \theta = \sin 3\theta.$$

$$9. \cos \theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta.$$

$$10. \cot \theta - \tan \theta = 2.$$

希臘文字

數ヲ代表スル文字ニ就キテハ、通常羅馬字ノ外、希臘字ヲ用フルコトアルヲ以テ、下ニ之ガ發音ヲ記ス。

A α Alpha.	I ι Iota.	P ρ Rho.
B β Beta.	K κ Kappa.	Σ σ Sigma.
Γ γ Gamma.	Λ λ Lambda.	T τ Tau.
Δ δ Delta.	M μ Mu.	Υ υ Upsilon.
E ϵ Epsilon.	N ν Nu.	Φ ϕ Phi.
Z ζ Zeta.	Ξ ξ Xi.	X χ Chi.
H η Eta.	O $\omicron$ Omicron.	Ψ ψ Psi.
Θ θ Theta.	Π π Pi.	Ω ω Omega.

試験問題

試 驗 問 題

略 語

各 高 等	[各高等學校]	盛 高 農	[盛岡高等農林學校]
一 高	[第一高等學校]	鹿 高 農	[鹿兒島高等農林學校]
二 高	[第二高等學校]	各 醫 專	[各醫學專門學校]
三 高	[第三高等學校]	仙 醫 專	[仙臺醫學專門學校]
五 高	[第五高等學校]	千 醫 專	[千葉醫學專門學校]
七 高	[第七高等學校造士館]	金 醫 專	[金澤醫學專門學校]
八 高	[第八高等學校]	京 醫 專	[京都醫學專門學校]
東 高 師	[東京高等師範學校]	岡 醫 專	[岡山醫學專門學校]
農 大 實	[東京農科大學實科]	新 醫 專	[新潟醫學專門學校]
東北農 大	[東北農科大學]	美 術	[東京美術學校]
東 高 商	[東京高等商業學校]	水 講	[水産講習所]
長 高 商	[長崎高等商業學校]	上 露 專	[上田露絲專門學校]
山 高 商	[山口高等商業學校]	商 船	[商船學校]
小 高 商	[小樽高等商業學校]	專 入 檢	[專門學校入學檢定]
東 高 工	[東京高等工業學校]	陸 士	[陸軍士官候補生]
大 高 工	[大阪高等工業學校]	陸 主 候	[陸軍主計候補生]
名 高 工	[名古屋高等工業學校]	陸 經	[陸軍經理學校]
仙 高 工	[仙臺高等工業學校]	海 兵	[海軍兵學校]
熊 高 工	[熊本高等工業學校]	海 機	[海軍機關學校]
米 高 工	[米澤高等工業學校]	海 經	[海軍經理學校]
秋 鐵 專	[秋田鐵山專門學校]	外 語	[東京外國語學校]

測 角 法

1. 弧度法トハ如何ナルモノナルカ. 又 n° ノ角
ヲ弧度ニテ表ハセ. [38年. 大. 高. 工.]

2. 三角形ノ一ツノ角ハ 45° ニシテ, 他ノ一ツノ
角ハ $\frac{1}{2}$ れてあんナラバ第三角ハ何度ナルカ. 又幾
れてあんナルカ. [31年. 海. 兵.]

對數表

1. $L\sin A = 9.84382$ ヲリ角 A ヲ求メヨ. [32年.海.機]
2. 表ヲ用ヒテ $\log 1484.9$, $\log 7421.9$, $L\sin 74^\circ 21' 24''$, $L\cot 37^\circ 10' 42''$ ヲ見出セ. [35年.海.兵]
3. 表ヲ用ヒテ $\log \tan 51^\circ 24'$ 及 $\sin 38^\circ$ ヲ計算セヨ. [32年.一高]
4. $\log \sin 60^\circ 30'$, $\log \sin 25^\circ 15'$, $\sin 13^\circ$, $\tan 75^\circ$ ノ値ヲ計算セヨ. [33年.一高]
5. $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$ ヲ知リテ $\log \sin 60^\circ$, $\log(5 \sec 45^\circ)$ ヲ求メヨ. [36年.東.高.商]
6. $\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$ ヲ知リテ $\log_{10} \operatorname{cosec} 45^\circ$, $\log_{10} \cos 30^\circ$, $\log_{10}(5 \tan 6^\circ)$ ヲ求メヨ. [32年.一高]

鋭角の三角函数

1. 三角形 ABC ニ於テ, C ハ直角ニシテ, 且 $AC=3$, $BC=4$ ナレバ, 角 A ノ三角函数如何. [32年.商船]
 2. $\tan \theta = 0.75$ ナルトキ, $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$ ノ値ヲ求メヨ. [32年.海.機]
 3. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$ ナルトキ, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ ノ値ヲ求メヨ. [42年.山.高.商]
 4. $\tan \theta = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$ ナレバ, $2mn \cos^2 \theta - (m^2 - n^2) \cos \theta \sin \theta$ ノ値如何. [36年.商船]
 5. $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$ ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ. [38年.海.機]
 6. $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$ ヲ證セヨ. [32年.商船]
 7. A ハ正ノ鋭角ニシテ, $\sec A > \operatorname{cosec} A$ ナラバ, $A > 45^\circ$ ナルコトヲ證セヨ. [44年.海.兵]
 8. $\sin A = a$, $\tan A = b$ ナルトキハ, $b^2 = a^2(1 + b^2)$ ナルコトヲ證セヨ. [36年.商船]
- 次ノ各式ヲ證明セヨ [9乃至18].
9. $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$. [34年.美術]

$$10. \sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta. \quad [30\text{年. 美術.}]$$

$$11. (1 + \sin\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2 = 3 + 2(\sin\theta + \cos\theta). \quad [36\text{年. 商船.}]$$

$$12. \sin A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A. \quad [42\text{年. 盛. 高. 農.}, 43\text{年. 新. 醫. 專.}]$$

$$13. \cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A. \quad [33\text{年. 商船.}]$$

$$14. (1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A). \quad [32\text{年. 商船.}]$$

$$15. 2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0. \quad [31\text{年. 海. 兵.}]$$

$$16. \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = (\operatorname{cosec} A + \cot A)^2. \quad [43\text{年. 鹿. 高. 農.}]$$

$$17. \frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} + \frac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta - \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta. \quad [42\text{年. 七高.}, 44\text{年. 新. 醫. 專.}]$$

$$18. \sin\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \text{ナレバ} \quad \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1. \quad [32\text{年. 海. 機.}]$$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ[19乃至22].

$$19. (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A). \quad [44\text{年. 商船.}]$$

$$20. (\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 - (\tan A - \cot A)^2 + (\cos A - \sec A)^2. \quad [41\text{年. 商船.}]$$

$$21. (\sec x \sec y + \tan x \tan y)^2 - (\tan x \sec y + \sec x \tan y)^2. \quad [41\text{年. 海. 機.}]$$

$$22. \frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x}. \quad [43\text{年. 海. 兵.}]$$

直角三角形の解法 及び應用

1. 直角三角形ノ一邊ノ長サヲ $1^R.25$ トシ、其ノ對角ノ大イサヲ 30° トシテ、他ノ二邊ノ長サヲ計算セヨ。
[34年・海・機]

2. 直角三角形ノ一銳角ノ正切ガ 0.75 ニシテ、其ノ周圍ガ 1 尺 2 寸ナルトキ、斜邊ノ長サヲ求メヨ。
[35年・海・機]

3. 二等邊直角三角形 ABC アリ、Bヲ直角トス。今 BCヲ E、Fニ於テ三等分シ、角 EAF 及ビ FACノ正切ヲ求メヨ。
[34年・東・高・工]

4. 三角形ニ於テ $A=75^\circ$ 、 $C=45^\circ$ 及ビ Aヨリ BCニ下セル垂線ノ長サ $[=12^R]$ ヲ與ヘテ、三邊ノ長サヲ見出セ。
[37年・東・高・商]

5. 三角形 ABCノ一角 Cヲ直角トス。今一邊 BCヲ 1000 尺トシ、角 ABCヲ $24^\circ 35' 23''$ トスルトキ、邊 ACハ幾何ナルカ。但 $\tan 24^\circ 35' = 0.41602$ 、 $\tan 24^\circ 36' = 0.41628$ 。
[38年・海・兵]

6. 三角形 ABCニ於テ $A=45^\circ$ 、 $B=60^\circ$ 、 $AB=1000^R$ ナレバ、ACノ長サ及ビ Cヨリ ABニ至ル垂線ノ長サ

各如何。

[33年・商・船]

7. 半徑 α 尺ナル圓アリ、其ノ中心角 Aニ對スル弦ノ長サハ幾尺ナルカ。
[37年・海・兵]

8. 圓形ノ一池アリ、地上ノ一點ヨリ此ノ池ヲ夾ム角 60° ニシテ其ノ點ヨリ池邊ニ至ル最短距離 15 間ナリ、此ノ池ノ徑幾間ナルカ。
[40年・東・高・工]

9. 一直線上ニ之ト Aナル角ヲナセル長サ α 尺ノ直線ノ正射影ヲ作ルトキ、其ノ長サ幾尺ナルカ。
[36年・海・兵]

10. 旗竿ノ影平地ニ於テ 30 尺ニシテ、太陽ノ高度 30° ナリ、竿ノ長サ如何。但尺ノ小數第二位マデ計算セヨ。
[31年・海・兵]

11. 海面上 100 尺ノ高サアル一艦ノ橋頭ヨリ、他ノ艦體ヲ觀測セシニ、俯角 30° ヲ得タリト云フ、二艦ノ距離如何。
[43年・海・經]

12. 水平面ニ 45° 傾斜セル長サ 100 尺ノ阪路アリ、傾斜ヲ減ジテ 30° トナサバ、阪路ノ長サ幾尺トナルベキカ。
[36年・東・高・工]

13. 一時間 10 哩ノ速サヲ以テ北東ニ帆走セル汽船アリ、然ルトキハ一時間ニ幾哩ヅツ北ニ移動スルカ。
[33年・農・大・實]

14. 南北ニ走ル堤防アリ、正東ニ向ヒテ登ルトキハ7歩ニ付キ高マリ2歩ノ割合ナリ、然ラバ東ヨリ 30° 南ニ向ヒテ登ルトキハ8歩ニ付キ高マリ2歩ナルコトヲ證セヨ。 [43年・海・兵]

15. 平速ヲ以テ垂直ニ昇ル所ノ輕氣球アリ、1哩昇リシトキ高度 α ヲ得、其ノ後15分間ヲ經テ高度 β ヲ得タリ、輕氣球毎時ノ速サ如何。 [42年・陸・主・候]

16. 塔ノ正東ニ於テ互ニ200間ヲ離ルル兩地ヨリ、其ノ塔ノ頂上ヲ望ムニ仰角 45° 及ビ 30° ナルトキ、塔ノ高サヲ問フ。 [43年・陸・經]

17. 直立セル一塔アリ、其ノ底ヲ過ル水平面上ノ一點ニ於テ、其ノ頂ヲ見レバ仰角 $32^\circ 27'$ ナリ、此ノ點ヨリ塔ニ向ヒテ同ジ平面上尙100尺ヲ進ミタル點ニテ、其ノ頂ヲ見レバ仰角 45° ナリ、此ノ平面上塔ノ高サ幾尺ナルカ。但 $\tan 32^\circ 20' = 0.6330$, $\tan 32^\circ 30' = 0.6371$ 。

[39年・一高]

18. 平地ニ築キタル臺上ニ直立セル柱アリ、地上ノ一點ニ於テ、柱ノ底及ビ頂ヲ望ミテ仰角 30° 及ビ 60° ヲ得、次ニ臺ヨリ遠ザカルコト更ニ25尺ナル地點ニ於テ柱頂ノ仰角 45° ヲ得タリト云フ、柱ノ長サヲ求メヨ。 [40年・陸・士]

19. 平地ニ直立セル樹木アリ、或距離ヨリ其ノ梢端ノ仰角ヲ測リA度ヲ得、次ニ n 尺樹木ニ接近シテ仰角ヲ測リシニB度ヲ得タリ、樹木ノ高サ幾何。

[33年・農・大・實]

20. 某所ニ於テ山ノ高度ヲ測リシニ 60° ヲ得、更ニ其ノ山上ニ聳エタル100尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ 75° ヲ得ルトキハ、山ノ高サハ幾何ナルカ。

但 $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ 。

[34年・商船]

21. 投錨セル一汽船アリ、海岸ニ沿ヒタル直線上ノ一ツノ點ヨリ、之ヲ測レバ其ノ直線ト 30° ノ角ヲナシ、其ノ線ニ沿ヒテ進ムコト300間ニシテ、又之ヲ測レバ 60° ノ角ヲナスト云フ、其ノ直線ヨリ汽船マデノ最近距離ヲ問フ。但ソノ距離200間未滿ナルコトハ、既ニ測知セラレタルモノトス。 [39年・長・高・商]

22. A, Bハ海面上ノ二ツノ點ニシテ、相距ルコト2500米ナリ。今A, B兩所ニ於テ直線ABノ直上ニアル輕氣球Cヲ望ミタルニ、視線ガ水平面トナス角ガソレゾレ 45° 及ビ 60° ナリ、輕氣球ノ水平面上ノ高サ如何。 [37年・東・高・工]

23. 橋上ニ於テ浮標ノ俯角ヲ測リテ 35° ヲ得、更ニ3尺降リテ又俯角ヲ測リ 34° ヲ得ルトキ、浮標マ

デノ距離如何. 但 $\tan 35^\circ = 0.7$, $\tan 34^\circ = 0.675$.

[32年. 商船.]

24. 山ノ麓ニ高サ h 尺ノ塔アリ, 山頂ニ於テ塔ノ頂及ビ基礎ノ俯角ヲ測リ α 及ビ β 度ヲ得タリ, 山ノ高サヲ求メヨ.

[32年. 海. 機.]

25. 塔アリ, 某所ヨリ其ノ頂點ヲ望ミシニ, 方位ハ正北ニシテ仰角ハ α° ナリ, 其處ヨリ正西ノ方向ニ l 尺進ミ, 更ニ塔頂ヲ望ミシニ仰角 β° ナリキト云フ, 塔ノ高サヲ求メヨ. 但塔ノ基礎及ビ二個ノ測點ハ同ジ水平面上ニアリ.

[33年. 商船., 38年. 水. 講.]

26. 塔アリ, 日光ノ爲ニ地上ニ寫ス影 120 尺ナリト云フ, 塔ノ高サ及ビ太陽ノ仰角如何. 但太陽ノ位置ハ 9 尺ノ直立竿ガ地上ニ映ズル影 $3\sqrt{3}$ 尺ナリト云フ.

[44年. 海. 經.]

27. 某所ニ於テ其ノ正東ニ在ル山頂ノ仰角ヲ測リテ 60° ヲ得, 更ニ其ノ測點ヨリ正南 2 哩ノ所ニ於テ, 同ジ山頂ノ仰角ヲ測リテ 45° ヲ得タリ, 此ノ山ノ高サヲ求メヨ.

[43年. 鹿. 高. 農.]

28. 東西 1 哩ヲ隔ツル二ツノ地 A, B ニ於テ二人ノ觀測者空中飛行機ヲ望ミタルニ, 其ノ方位ハ北西及ビ北東ニ當リ, 仰角ハ各 45° ナルコトヲ知レリ, 飛

行機ノ高サ如何.

[43年. 海. 經.]

29. 平野ヲ東西ニ貫ケル直線狀ノ通路 ABC アリ, A ノ正北ニ立テル塔ノ頂ノ仰角ヲ A, B 及ビ C ノ三所ニ於テ測リシニ, ソレゾレ 60° , 45° , 30° ヲ得タリ, 是ニ依リテ B ハ AC ノ中央ニアルコトヲ證セヨ.

[44年. 陸. 士.]

30. 高ク揚レル風船ヲ, 一水平直線上ナル三ツノ點 A, B 及ビ C ヨリ望ミタル仰角ハ, ソレゾレ 60° , 45° , 30° ナリト云フ, 風船ノ高サ何程ナルカ.

但 $AB = BC = 10$ 町 ト ス.

[30年. 一. 高.]

31. 或人東西及ビ南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交點ヨリ $N30^\circ E$ [正北ヨリ 30° 東方ニ傾ケル] ノ方向ニ 600 尺ヲ進ミ, 更ニ方向ヲ北東ニ轉ジ 400 尺ヲ進ミテ某地點ニ達セリ, 此ノ地點ガ兩道路ヲ距ルコト各幾尺ナルカ.

[43年. 海. 機.]

32. 東西 $2\sqrt{3}$ 哩ヲ隔ツル A, B ノ二小島アリ, 燈臺 C ヨリ A 島ハ南西ニ, B 島ハ南東ニ見ユ, 然ラバ A ヨリ $(\sqrt{3}-1)$ 哩ニシテ AB ノ中間ニ在ル暗礁 D ハ, 燈臺ヨリ何レノ方角ニ當ルカ.

[44年. 海. 兵.]

一般角の三角函數

1. 一ツノ角ノ總テノ圓函數ヲ、其ノ角ノ正弦ニ
テ表ハセ。 [33年・美術.]
2. θ ノ總テノ圓函數ヲ、 $\tan\theta$ ノ項ニテ表ハセ。
[31年・三高.]
3. 第二分面ニアル角ノ三角函數ヲ、其ノ角ノ正
切ニテ表ハセ。 [35年・海・兵.]
4. 330° 及 $\pi - 225^\circ$ ノ正弦、餘弦及正切ヲ求メ
ヨ。 [36年・海・兵.]
5. $\frac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}$ ノ値ヲ求メヨ。 [42年・海・兵.]
6. $\tan A = \frac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ ノ値如何。
[34年・海・兵., 35年・海・機.]
7. $\tan A = 2 - \sqrt{3}$ ナルトキ $\cos A$ ノ値如何。
[38年・商船.]
8. $\tan x = \sqrt{3}$ ナルトキ $\sec x$ ノ値如何。 [36年・商船.]
9. $\sec A = \sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\sin A}}$ ノ一ツノ値ハ
 $\sqrt{2}+1$ ナルコトヲ證セヨ。 [43年・陸・士.]
10. $\sec A = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ナルトキ、 A ノ總テノ三角函數

ヲ小數第二位マデ求メヨ。

[44年・熊・高・工.]

11. $\tan\phi = \frac{n\sin\theta}{m+n\cos\theta}$ ナルトキハ $\sin\phi$ ノ値如何。

[42年・海・兵.]

12. $\sin(180^\circ + A) - \cos(90^\circ + A)$ ヲ簡單ニセヨ。

[39年・海・機.]

13. $\tan(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A) + \cos(180^\circ - A)\cot(180^\circ - A)$

ヲ簡單ニセヨ。

[32年・海・機.]

14. $\frac{\sin(90^\circ + A)\cos(90^\circ - A)}{\cos(180^\circ + A)} + \frac{\sin(180^\circ - A)\cos(90^\circ + A)}{\sin(180^\circ + A)}$

ヲ簡單ニセヨ。

[37年・海・機.]

15. A ナル角ガ0度ヨリ360度マデ變化スルト
キ; $\sin A$, $\cos A$, $\sin A + \cos A$ ノ變化ヲ表ニテ示セ。

[37年・海・兵.]

16. $\cos A$ ノ絶對値ガ最大ナルトキハ、 $\sin A$ ノ絶對
値ハ最小ナルコトヲ證シ、且 $\sin^4 A - \cos^4 A$ ノ値ガ最大
ナル場合ヲ記セ。

[34年・陸・士.]

複角の三角函数

1. $\cos A = \frac{40}{41}$, $\cos B = \frac{60}{61}$ トシテ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ計算セヨ. [34年・海・機]

2. $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値如何. 但 α, β ハ何レモ直角ヨリ小ナル正角ナリトス. [33年・海・機]

3. $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ知リテ $\operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ナルコトヲ證セヨ. [35年・陸・士]

4. A, B ハ鋭角ニシテ $\tan A = \frac{2}{3}$, $\tan B = \frac{3}{2}$ ナルトキ $A+B$ ヲ求メヨ. [36年・千・醫・專]

5. $\cot x = 2$, $\operatorname{cosec} y = \sqrt{10}$ ナルトキハ $x+y=45^\circ$ ナルコトヲ證セヨ. 但 x モ y モ共ニ鋭角ナリトス. [31年・一高]

6. 正切ガソレゾレ $\sqrt{7} + \sqrt{6}$, $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ ナル二ツノ鋭角ノ和ヲ求メヨ. [34年・各高等]

7. $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ ノ値ヲ求メヨ. [37年・海・機]

8. 次ノ二式ノ値ヲ求メヨ. [44年・陸・士]
(1) $\cos 138^\circ + \cos 102^\circ + \cos 18^\circ$.

(2) $\sin 20^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ + \cos 25^\circ \cos 45^\circ \cos 80^\circ$.

9. $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ) + \cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ. [37年・一高]

10. 若シ $\sin \theta + \sin \phi = a$, $\cos \theta + \cos \phi = b$ ナラバ $\sin \frac{1}{2}(\theta + \phi)$ ノ値如何. [43年・海・兵]

11. $\sin 3\theta + \sin 2\theta + 2\sin \frac{3}{2}\theta \cos \frac{\theta}{2}$ ヲ積ノ形ニ直セ. [40年・長・高・商]

12. $\cos(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$ ヲ變形シテ $k \sin(45^\circ - \alpha)$ トナシ, k ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ. [42年・大・高・工]

13. 次ノ乗積ヲ和[或ハ差]ニ變形シ, 然ル後, 此ノ乗積ヲ最大ナラシムル α ノ値ヲ求メヨ.

$2\sin(\alpha - 30^\circ)\cos \alpha$. [42年・海・兵]

14. $ax^2 + bx + c = 0$ ナル方程式ノ x ノ値ヲ $\tan \alpha$, $\tan \beta$ トシテ $\tan(\alpha + \beta)$ ノ値ヲ計算セヨ. [34年・海・機]

15. $x^2 + 6x + 7 = 0$ ノ二根ヲ $\tan \alpha$ 及ビ $\tan \beta$ トセバ $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ ナルコトヲ證セヨ. [40年・海・兵]

16. $\tan \theta = \frac{b}{c}$ ナレバ $\tan(\theta - 45^\circ) = \frac{b-c}{b+c}$ ナルコトヲ證セヨ. [38年・商船]

17. $\tan \theta = \frac{A}{B}$ ナルトキハ

$A \cos \omega + B \sin \omega = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \omega)$ ナルコトヲ證セヨ.

[43年. 東. 高. 工.]

18. A, B ハ 共 $= 90^\circ$ ヨリ 小ナル角ヲ表ハストキハ
 $\sin(A+B) < \sin A + \sin B$ ナルコトヲ證セヨ.

[33年. 東. 高. 師.]

19. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ヲ證シ、之ヨリ

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \text{ ヲ作レ.}$$

[31年. 海. 兵.]

次ノ各式ヲ證明セヨ [20 乃至 51].

20. $\sin^2(A+45^\circ) + \sin^2(A-45^\circ) = 1.$ [37年. 商船.]

21. $\frac{1}{2} \cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ = \sin 70^\circ.$ [42年. 海. 兵.]

22. $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta).$
[35年. 海. 兵.]

23. $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}.$ [42年. 農. 大. 實.]

24. $\tan(45^\circ + \alpha) \tan(45^\circ - \alpha) = 1.$ [42年. 各高等.]

25. $1 + \tan(A+B) \tan(A-B) = \frac{1 - 2 \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}.$
[37年. 農. 大. 實.]

26. $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2(A+B)} = \frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B}.$ [40年. 陸. 士.]

27. $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0.$ [44年. 農. 大. 實.]

28. $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0.$
[37年. 千. 醫. 專.]

29. $\cos A + \cos(120^\circ - A) + \cos(120^\circ + A) = 0.$ [35年. 商船.]

30. (1) $\sin 95^\circ - \sin 25^\circ - \sin 35^\circ = 0.$

(2) $4 \sin \theta \sin(60^\circ + \theta) \sin(60^\circ - \theta) = \sin 3\theta.$

[44年. 海. 兵.]

31. $1 + \cos 6\theta - \cos 10\theta - \cos 4\theta = 4 \sin 2\theta \cos 3\theta \sin 5\theta.$

[39年. 岡. 醫. 專.]

32. $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha.$

[30年, 31年. 二高, 35年. 各高等.]

33. $\sin \theta \sin 2\theta + \sin 3\theta \sin 6\theta = \sin 4\theta \sin 5\theta.$ [36年. 商船.]

34. $\sin 2A \cos A + \cos 4A \sin A = \sin 3A \cos 2A.$ [40年. 陸. 士.]

35. $\sin A \sin B \sin(A-B) + \sin B \sin C \sin(B-C)$
 $+ \sin C \sin A \sin(C-A) + \sin(A-B) \sin(B-C) \sin(C-A) = 0.$

[44年. 東. 高. 商.]

36. $2 \{ \sin(30^\circ + x) + \cos(60^\circ + x) \}^2$
 $- \{ \cos(45^\circ - x) - \sin(45^\circ - x) \}^2 = 2 \cos 2x.$ [40年. 東. 高. 工.]

37. $\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A)$
 $= 4 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A-C}{2} \sin \frac{B-C}{2}.$ [36年. 海. 兵.]

38. $\cos(A+B+C) + \cos(B+C-A) + \cos(C+A-B)$
 $+ \cos(A+B-C) = 4 \cos A \cos B \cos C.$ [44年. 各. 醫. 專.]

39. $\sin(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ) = -\frac{\cos 2\alpha}{2}.$ [43年. 海. 機.]

40. $\frac{\sin B + \sin 5B}{\cos B - \cos 5B} = \cot 2B.$ [38年. 東. 高. 商.]

$$41. \frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \tan \alpha. \quad [31 \text{ 年. 海. 兵.}]$$

$$42. \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos 7\alpha}{2 \sin \alpha}. \quad [43 \text{ 年. 陸. 經.}]$$

$$43. \tan(\alpha + 60^\circ) \tan(\alpha - 60^\circ) = \frac{1 + 2 \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha}. \quad [33 \text{ 年. 二高.}]$$

$$44. \frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A - \cos 3A} = \cot A. \quad [39 \text{ 年. 陸. 士.}]$$

$$45. \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A + B). \quad [43 \text{ 年. 七高.}]$$

$$46. \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \cos^2 B} = \tan \frac{3\pi}{4}. \quad [37 \text{ 年. 大. 高. 工.}]$$

$$47. \sin^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{A-B}{2} \\ = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 A - \frac{1}{2} \cos^2 B. \quad [37 \text{ 年. 東. 高. 商.}]$$

$$48. \cos \theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) + \cos \theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \\ + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) = -\frac{3}{4}. \quad [34 \text{ 年. 商船.}]$$

$$49. a \cos A + b \sin A = a \cos B + b \sin B = c \\ \text{ナ ル ト キ ハ } \frac{a}{\cos \frac{A+B}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{A-B}{2}}. \quad [43 \text{ 年. 各高等.}]$$

$$50. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{ナ ル ト キ ハ}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \tan \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2}. \quad [35 \text{ 年. 東. 高. 師.}]$$

$$51. 17A = 180^\circ \quad \text{ナ ル ト キ ハ } \frac{\cos A \cos 13A}{\cos 3A + \cos 5A} = -\frac{1}{2}.$$

[37 年. 仙. 醫. 專., 39 年. 京. 醫. 專.]

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ [52 乃至 58].

$$52. \sin(150^\circ + A) + \sin(150^\circ - A). \quad [33 \text{ 年. 一高.}]$$

$$53. \sin(x + 60^\circ) + 2 \sin(x - 60^\circ) - \sqrt{3} \cos(120^\circ - x). \\ [42 \text{ 年. 海. 機.}]$$

$$54. (1) \sin 2A \cos A - \cos 2A \sin A.$$

$$(2) \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta). \\ [44 \text{ 年. 商船.}]$$

$$55. \sin^2 B + \sin^2(A - B) + 2 \sin B \sin(A - B) \cos A. \\ [43 \text{ 年. 水講.}]$$

$$56. (1) (\tan A + \tan B)(\cot A - \cot B) \\ + (\tan A - \tan B)(\cot A + \cot B).$$

$$(2) \frac{\cos(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha} - \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin \alpha}. \quad [44 \text{ 年. 海. 機.}]$$

$$57. \frac{\sin \theta - \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta - \cos 3\theta + \cos 5\theta}. \quad [35 \text{ 年. 大. 高. 工.}]$$

$$58. \frac{\sin A \sin(B - C) - \sin B \sin(A - C)}{\sin C}. \quad [41 \text{ 年. 海. 機.}]$$

倍角分角の三角函数

1. $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ.

[39年.商船.]

2. $\cot \alpha$ ノ値ヲ知リテ $\sin 2\alpha$ ノ値ヲ計算スル公式ヲ作レ.

[33年.海.機.]

3. $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ヲ知リテ $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sin 2\theta$ 及ビ $\cos \frac{\theta}{2}$ ヲ求メヨ.

[42年.海.兵.]

4. $\sin A = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\tan \frac{A}{2}$ ノ値ヲ求メヨ. 但 $A < 90^\circ$.

[42年.七高.]

5. $\cos 315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ $157^\circ.5$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ.

[37年.海.兵.]

6. $\alpha = 24^\circ$ ナルトキ $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha$ ノ値ヲ求メヨ.

[44年.新.醫.專.]

7. $\tan \theta = \frac{2ab}{a-b}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

[43年.熊.高.工.]

8. $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ ノ値ヲ求メヨ.

[38年.海.機.]

9. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta$, 及ビ $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ ノ

値ヲ求メヨ.

[37年.43年.海.機.]

10. $\sin \theta$ 及 $\sin \frac{\theta}{2}$ トノ比ガ $8:5$ ナレバ $\cos \theta$ ノ値如何.

[39年.商船.]

11. 次ノ二式ノ値ヲ求メヨ.

[44年.陸.士.]

(1) $\tan \{2(x+y)\}$. 但 $\tan x = 2$, $\tan y = 3$.

(2) $\sin 3A - \cos 3B$. 但 $\sin A = \frac{1}{3}$, $\cos B = \frac{2}{3}$.

12. $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$ ヲ一項式ニ直セ.

[41年.商船.]

13. 次ノ無限級數ノ和ヲ最モ簡單ナル形ニテ表ハセ.

$a \sin \theta, a \sin \theta \cos \theta, a \sin \theta \cos^2 \theta, a \sin \theta \cos^3 \theta, \dots$

[43年.仙.高.工.]

14. $\cos \theta = a$ トシテ $\cos 5\theta$ ノ値ヲ a ノ降冪ノ順ニ記セヨ.

[34年.東.高.商., 42年.商船.]

15. $\sin 5x$ ヲ $\sin x$ ニテ表ハセ.

[30年.一高.]

16. 角 A ノ正弦, 餘弦ヲ以テ角 $3A$ ノ正切ヲ表ハス式ヲ作レ.

[33年.外.語.]

17. $33^\circ \frac{3}{4}$ ナル角ノ正弦ノ真數ハ 0.55557 ニシテ, 其ノ角ノ餘弦ノ真數ハ 0.83147 ナリ, 然ラバ

(1) $67^\circ \frac{1}{2}$ ($= 33^\circ \frac{3}{4}$ ノ2倍) ナル角ノ正弦ノ真數.

(2) $101^{\circ}\frac{3}{4} (=33^{\circ}\frac{3}{4} \times 3 \text{ 倍})$ ナル角ノ餘弦ノ真數ノ各ヲ小數第五位マデ求メヨ. [42年.商船.]

18. $\tan A + \cot A = 2\sqrt{2}$ ナレバ $2A = 45^{\circ}$ ナルコトヲ證セヨ. [30年.陸.士.]

19. $\frac{1-\cos 2A}{\sin 2A}$ ヲ最簡ニセヨ. 又コノ結果ヨリ $22^{\circ}30'$ ノ正切ヲ求メヨ. [42年.海.機.]

20. $\tan 7^{\circ}.5$ ノ値ヲ求メヨ. 而シテ或角ノ正切ガ之ト同ジ値ヲ有スル如キ角ノ一般ナル式ヲ記セ. [38年.大.高.工.]

21. $x^2 - 2px + q^2 = 0$ ニ於テ $p = \frac{1}{2}\sec\theta$, $q = \frac{1}{2}\tan\theta$ ナルトキハ二ツノ根ハ $\frac{1}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ 及 $\frac{1}{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}$ ナルコトヲ

證セヨ. [39年.名.高.工.]

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ [22 乃至 24].

22. $\cos 2A + \frac{2}{\cot^2 A + 1}$. [39年.海.機.]

23. $\cos^2 A + \cos^2(A+120^{\circ}) + \cos^2(A+240^{\circ})$.

[38年.專.入.檢.]

24. $\cos(15^{\circ}-A)\sec 15^{\circ} - \sin(15^{\circ}-A)\csc 15^{\circ}$. [35年.海.機.]

次ノ各式ヲ證明セヨ [25 乃至 63].

25. $\tan A + \cot A = 2\csc 2A$.

[32年.陸.士., 34年.大.高.工., 42年.農.大.實.]

26. $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$. [33年.東.高.師., 38年.陸.士.]

27. $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha = \tan \frac{1}{2}\alpha$. [43年.長.高.商.]

28. $\cot \theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta$. [44年.長.高.商.]

29. $\cot \frac{\pi}{8} - \tan \frac{\pi}{8} = 2$. [37年.大.高.工.]

30. $\cot^2 A - \tan^2 A = 4\cot 2A \operatorname{cosec} 2A$. [43年.盛.高.農.]

31. $3\sin A - \sin 3A = 2\sin A(1 - \cos 2A)$. [44年.水.講.]

32. $1 + \tan A \tan 2A = \sec 2A$. [44年.小.高.商.]

33. $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta$. [35年.海.兵.]

34. $\sec A + \tan A = \tan\left(45^{\circ} + \frac{A}{2}\right)$. [37年.商.船.]

35. $\tan 50^{\circ} + \cot 50^{\circ} = 2\sec 10^{\circ}$. [42年.專.入.檢.]

36. $2\sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2\cos^2 \theta \cos^2 \phi - \cos 2\theta \cos 2\phi = 1$. [44年.盛.高.農.]

37. $2 + \tan^2(A+90^{\circ}) + \cot^2(A-90^{\circ}) = 4\operatorname{cosec}^2 2A$. [36年.海.兵.]

38. $4\sin \alpha \sin(60^{\circ}-\alpha) \sin(60^{\circ}+\alpha) = \sin 3\alpha$. [33年.海.機., 35年.農.大.實.]

39. $\sec(45^{\circ}+\alpha)\sec(45^{\circ}-\alpha) = 2\sec 2\alpha$. [31年.一.高.]

40. $\tan(45^{\circ}+A) - \tan(45^{\circ}-A) = 2\tan 2A$. [34年.海.兵., 38年.東.高.商., 42年.仙.高.工.]

41. $\sin A \cos^3 A - \sin^3 A \cos A = \frac{1}{4}\sin 4A$. [36年.海.兵.]

$$42. (\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = 4\cos^2 \frac{A+B}{2}.$$

[38年. 商船.]

$$43. \tan \alpha = \tan \frac{\alpha}{2} (1 + \sec \alpha).$$

[41年. 商船.]

$$44. \sin 36^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 33^\circ - \sin^2 3^\circ.$$

[37年. 大. 高. 工.]

$$45. \cos^2 27^\circ.5 + \cos^2 32^\circ.5 + \cos^2 87^\circ.5 = \frac{3}{2}.$$

[42年. 陸. 士.]

$$46. \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

[32年. 海. 兵, 35年. 商船.]

[37年. 五高, 38年. 千. 醫. 專., 43年. 長. 高. 商.]

$$47. \sin 2A \tan 2A = \frac{4 \tan^2 A}{1 - \tan^4 A}.$$

[41年. 商船.]

$$48. \frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \tan^2(A + 45^\circ).$$

[36年. 商船.]

$$49. \sec 2A - \cos 2A = \frac{4 \tan^2 A}{1 - \tan^4 A}.$$

[38年. 商船.]

$$50. \cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4 \cot 2A}{\sin 2A}.$$

[37年. 大. 高. 工.]

$$51. \tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}.$$

[41年. 商船.]

$$52. \frac{\sin^2 A + \cos 2A + \cos^2 A}{\sin 2A} = \cot A.$$

[39年. 千. 醫. 專.]

$$53. \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A.$$

[43年. 農. 大. 實.]

$$54. \tan(A + 60^\circ) \tan(A - 60^\circ) = \frac{1 + 2 \cos 2A}{1 - 2 \cos 2A}.$$

[44年. 專. 入. 檢.]

$$55. \frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\sin 3B}{\sin B} = 4 \sin(A+B) \sin(B-A).$$

[41年. 商船.]

$$56. \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} \div \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cot \alpha - 1} = \operatorname{cosec} \alpha. \quad [42年. 各醫. 專.]$$

$$57. (1) \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \sec 2\alpha - \tan 2\alpha.$$

$$(2) \cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\right). \quad [42年. 陸. 主. 候.]$$

$$58. \tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin B}{\cos A + \cos B}. \quad [36年. 各高. 等.]$$

$$59. \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}. \quad [44年. 盛. 高. 農.]$$

$$60. \tan^2 A = 1 + 2 \tan^2 B \quad \text{ナ ル ト キ ハ}$$

$$\cos^2 B = 1 + \cos 2A.$$

[43年. 各醫. 專.]

$$61. \cos \theta = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta} \quad \text{ナ ル ト キ ハ}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \tan^2 \frac{\beta}{2}.$$

[44年. 名. 高. 工.]

$$62. \cos A = \frac{\cos B - k}{1 - k \cos B} \quad \text{ナ ル ト キ ハ}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \tan \frac{B}{2}.$$

[39年. 一高.]

$$63. \tan \theta = \frac{b}{a} \quad \text{ナ ル ト キ ハ}$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

[38年. 一高.]

$$A+B+C=180^\circ \quad \text{ナ ル ト キ 次ノ各式ヲ證明セヨ.}$$

[64乃至66].

$$64. \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C. \quad [39年. 陸. 士.]$$

$$65. \sin 8A + \sin 8B + \sin 8C = -4 \sin 4A \sin 4B \sin 4C.$$

[42年. 陸. 士.]

$$66. \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

[44年. 鹿. 高. 農.]

 $\Delta + B + C = 2\pi$ ナルトキ次ノ各式ヲ證明セヨ.

[67 及 ビ 68].

$$67. \sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}.$$

[32年. 二高.]

$$68. \cos A + \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}.$$

[41年. 八高.]

$$69. A + B + C = 180^\circ, \cos A = \cos B \cos C \text{ ナルトキハ}$$

$$\cot B \cot C = \frac{1}{2} \text{ ナルコトヲ示セ.}$$

[44年. 仙. 高. 工.]

三 角 形 の 性 質

三角形 ABC ニ於テ次ノ各式ヲ證セヨ.

[1 乃至 26].

$$1. \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

[40年. 仙. 高. 工., 44年. 米. 高. 工.]

$$2. \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

[44年. 京. 醫. 專.]

$$3. \tan A + \tan B = \sec A \sec B \sin C.$$

[43年, 44年. 商船.]

$$4. \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$$

$$= 1 + \sec A \sec B \sec C.$$

[41年. 盛. 高. 農.]

$$5. \tan \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2}$$

$$= \tan \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2}.$$

[41年. 商船.]

$$6. \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

[40年. 商船.]

$$7. \sin A + \sin B > \sin C.$$

[34年. 陸. 士.]

$$8. b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C).$$

[37年. 商船.]

$$9. b \cos A - a \cos B = \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

[38年, 42年. 商船.]

$$10. (a^2 - b^2) \cot C + (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B = 0.$$

[38年. 商船.]

$$11. \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{a+b+c}{2a}.$$

[40年. 商船.]

$$12. a = \frac{(b-c) \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}.$$

[43年. 陸士.]

$$13. \tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}.$$

[40年. 商船., 44年. 上. 醫. 專.]

$$14. a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C.$$

[40年. 農. 大. 實., 41年. 山. 高. 商.]

$$15. a \sec A - b \sec B = \sec C (b \sec A - a \sec B).$$

[44年. 商船.]

$$16. \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

[39年. 陸士.]

$$17. \frac{a}{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} = \frac{b}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}} = \frac{c}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}}.$$

[38年. 商船.]

18. C が直角ナルトキハ

$$(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 = 2.$$

[42年. 山. 高. 商.]

$$19. C \text{ が直角ナルトキハ } \tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}.$$

[42年. 商船.]

$$20. B = 60^\circ \text{ ナルトキハ } \frac{a+c}{2b} = \sin(30^\circ + C).$$

[38年. 一高.]

$$21. C = 60^\circ \text{ ナルトキハ } a+b = 2c \cos \frac{A-B}{2}.$$

[42年. 陸士.]

$$22. A = 2B \text{ ナルトキハ } a = 2b \cos B. \quad [36年. 専. 入. 検.]$$

$$23. A = 2C \text{ ナルトキハ } a^2 = bc + c^2. \quad [43年. 新. 醫. 專.]$$

$$24. b \cos A = a \cos B \text{ ナルトキハ } a = b. \quad [44年. 小. 高. 商.]$$

$$25. a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2} \text{ ナルトキハ}$$

$$a + b + c = 3b.$$

[42年. 海. 兵.]

$$26. \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2} \text{ ガ等差級数ヲナストキハ}$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3.$$

[37年. 一高.]

$$27. \text{ 三角形ニ於テ } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ ヨリシテ}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ ヲ作レ.}$$

[43年. 大. 高. 工.]

$$28. \text{ 三角形ノ三邊ヲ } m^2 + m + 1, 2m + 1, m^2 - 1 \text{ トスレ}$$

バ, 其ノ最大角ハ 120° ナルコトヲ證セヨ.

[43年. 各高等.]

$$29. \text{ 三角形ノ二邊ヲソレゾレ } x + y \cos A \text{ 及ビ}$$

 $y + x \cos A$ トシ, 其ノ間ノ角ヲ A, 第三邊ヲ a トスレバ

$$a = \sin A (x^2 + y^2 + 2xy \cos A)^{\frac{1}{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

[39年. 大. 高. 工.]

三角形の解法

1. $A=120^\circ$, $b=12^R$, $c=9^R$ ナルトキ a を求む。

[39年.海.機., 44年.鹿.高.農.]

2. 二邊ノ長サソレゾレ 30 尺, 35 尺ニシテ, 其ノ夾角 60° ナルトキハ, 第三邊ノ長サ如何, 又面積ヲ求む。

[33年.東.高.師., 34年, 35年.東.高.工.]

3. $a=24^R$, $b=50^R$ ニシテ $\cos C=0.9246$ ナルトキ c を求む。

[31年.一高., 32年.東.高.商.]

4. 次ノ事項ヲ知リ角 A, B を求む。

$$a=532, \quad b=320, \quad C=34^\circ 22'.$$

$$\log \tan 72^\circ 49' = 0.50971, \quad \log \tan 52^\circ 11' 44'' = 1.88975,$$

$$\log 1.01 = 0.00432, \quad \log 4.21 = 0.62428.$$

[43年.七高.]

5. 一角ガ 22° ニシテ, 之ヲ夾ム二邊ノ長サガソレゾレ 20 尺, 30 尺ナルトキ, 他ノ二角ヲ求む。

$$\text{但 } L \cot 11^\circ = 10.7113477, \quad L \tan 45^\circ 48' = 10.0121294,$$

$$L \tan 45^\circ 49' = 10.0123821, \quad \log 2 = 0.3010300.$$

[43年.仙.高.工.]

6. $b=750$, $c=250$, $\log 5=0.69897$,

$$L \cot \frac{A}{2} = 9.93503 \text{ ヲ與ヘテ, } \log \tan \frac{B-C}{2} \text{ ヲ求ム。}$$

[30年.東.高.商.]

7. 二邊ノ比ハ $5:3$ ニシテ, 其ノ夾角ハ 40° ナルトキ, 他ノ角ヲ求む。

$$\text{但 } \tan 70^\circ = 2.748, \quad \tan 34^\circ 30' = 0.687.$$

[39年.水.講.]

8. 三邊ノ長サ 20, 21, 29 ナルトキ, 最大ナル角ノ大イサ如何。

[35年.大.高.工.]

9. $a=6$, $c=5$, $\cos C=0.75$ ナルトキ, b ヲ小數第二位マデ求む。

[33年.東.高.商.]

10. a, b ヲ A, B ニ對スル邊トシ, $a=2$, $b=3$, $L \sin A = 9.5228813$ ヲ知リテ $L \sin B$ を求む。

$$\text{但 } \log 2 = 0.3010300, \quad \log 3 = 0.4771213.$$

[32年.陸.士.]

11. $B=30^\circ$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$ ナル要件ニ適スル二ツノ三角形ノ中, 一ツハ二等邊三角形, 一ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ。且大ナル三角形ノ第三邊ヲ求む。

[37年.農.大.實.]

12. $B=60^\circ 40'$, $C=59^\circ 10'$, $a=10.62$ ナルトキ b を求む。

$$\text{但 } \log 106 = 2.0253, \quad \log 107 = 2.0294,$$

$$\log \sin 60^\circ = 9.9375 - 10, \quad \log \sin 61^\circ = 9.9418 - 10.$$

[38年.東.高.商.]

13. 邊 AB ト 邊 AC ト ノ 比 ハ $\sqrt{3}:2$ ニ シテ、角 B ハ 角 C ヨリモ 30° 大ナルトキ、三ツノ角ヲ求メヨ。

[43年.海.機.]

14. 底 12 寸、頂角 60° ナル三角形ノ外接圓ノ半徑如何。

[37年.千.醫.專.]

15. $C=90^\circ$, $a=942.45$, $b=1256.6$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ。但對數表ヲ用フルモノトス。

[30年.一高., 33年.海.兵.]

16. 直角三角形 ABC ノ斜邊 c ト、二邊ノ和 $a+b$ トヲ知リテ、此ノ三角形ヲ解ク公式ヲ作レ。

[31年.一高.]

17. $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$, $\cos(A-C)=\frac{1}{2}$ ナルトキ A, B, C ノ大イサ各如何。

[38年.海.機.]

18. $\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}\cos(B-90^\circ)$, $\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$ ナルトキ A, B, C ノ値ヲ求メヨ。

[44年.海.兵.]

19. $a^2=b^2+bc+c^2$ ナルトキ角 A ノ大イサ如何。

[37年.商船.]

20. $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$ ナルトキ $a=60\sqrt{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

[44年.水.講.]

21. $\tan \frac{A}{2}=\frac{5}{6}$, $\tan \frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ ナルトキ $\tan C$ ノ値ヲ求

メヨ。

[35年.大.高.工., 38年.專.入.檢.]

22. $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキハ、此ノ三角形ハ直角三角形或ハ二等邊三角形ナルコトヲ證セヨ。

[44年.京.高.商.]

三角形解法の應用

1. 正三角形ノ一角ヲ 2:1 ノ比ニ分ツ直線ハ對邊ヲ如何ナル比ニ分ツカ. [38年.水.講.]

2. 三角形ノ角頂ヨリ對邊ヘ下シタル垂線ノ長サハ、次ノ如クナルコトヲ證セヨ. 但 s ハ周ノ二分ノ一トス. [42年.陸.主.候.]

$$\frac{2s}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}, \frac{2s}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}}, \frac{2s}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}}.$$

3. 矩形ノ相隣レル二邊ガ m 寸及ビ n 寸ナルトキハ、此ノ矩形ノ二ツノ對角線ガ交リテナス角ノ正切如何. [39年.海.機.]

4. 平行四邊形ノ二ツノ邊ノ長サ 8 尺及ビ 12 尺ニシテ、其ノ夾角 60° ナルトキハ、對角線ノ長サ各如何. [38年.商船., 43年.海.兵.]

5. 平行四邊形ノ相隣レル二邊 a, b , 及ビ其ノ夾角 θ ヲ知リテ、二ツノ對角線ノ長サヲ求メヨ. [44年.海.機.]

6. 凸四邊形ノ二ツノ對角線ヲ d, d' トシ、其ノ夾角ヲ α トスレバ、其ノ面積ハ $\frac{1}{2}dd' \sin \alpha$ ナルコトヲ證

セヨ.

[31年.二高.]

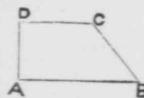
7. 四邊形 ABCD ノ三ツノ邊 $AB=a, BC=b, CD=c$ ト二ツノ對角線 $AC=p, BD=q$ トヲ知リテ、他ノ一邊 $AD=x$ ヲ計算セヨ. [34年.各高等.]

8. 正方形ノ内ニ一ツノ角頂ヲ共有スル正三角形ヲ内接シ、正方形ノ一邊ヲ 2 尺トスレバ、正三角形ノ一邊ハ何寸ナルカ.

但 $\log \cos 15^\circ = 1.98494, \log 2 = 0.30103, \log 2023 = 3.30600,$
 $\log 2024 = 3.30621.$ [42年.專.入.檢.]

9. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ $\widehat{CAD} = \alpha, \widehat{BAC} = \beta, \widehat{ABD} = \gamma$ トセバ、 $CD = \frac{AB \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$ ナルコトヲ證セヨ. [41年.山.高.商.]

10. 次ノ圖ニ示セル如キ平地アリ、AB ト CD トハ相平行シ、其ノ長サ AB ハ 850 米、CD ハ 650 米ナリ、而シテ A 及ビ B ニ於テ $\widehat{DAB}$ ハ $102^\circ 40'$, $\widehat{CBA}$ ハ $47^\circ 20'$ ナルコトヲ測リ得タリ、此ノ平地ノ面積ヲ求メヨ.



但 $\cos 12^\circ 40' = 0.9757, \cos 42^\circ 40' = 0.7353.$ [42年.陸.士.]

11. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ中心 O ヲリ、其ノ三角形ノ平面ニ垂線 OD ヲ引キ、 $OD=AB$ ナラシムルト

キ、面 ABC ト 面 ABD ト ノ ナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。

[38 年・大・高・工]

12. P, Q, R, S ハ 順次ニ一直線上ニ取レル四ツノ
點ナルトキ、其ノ直線外ニ任意ノ一點 O ヲ取り、之ヲ
P, Q, R, S ニ結ビ付クレバ $\frac{PQ \cdot RS}{QR \cdot PS} = \frac{\sin POQ \sin ROS}{\sin QOR \sin POS}$ ナ
ルコトヲ證セヨ。

[42 年・大・高・工]

13. 半徑 r ナル圓ノ弦ガ、其ノ一端ヲ過ル徑ト角

角	正弦ノ對數	
31° 0'	1.7118	59° 0'
10'	1.7139	50'
20'	1.7160	40'
30'	1.7181	30'
40'	1.7201	20'
50'	1.7222	10'
32° 0'	1.7242	58° 0'
	餘弦ノ對數	角

α ヲナストキ、此ノ弦ノ長サ如何。
何. $r=5^R$, $\alpha=58^\circ 34'$ ナルトキ、表
ニ依リテ弦ノ長サヲ計算セヨ。

[44 年・海・機]

數ノ對數										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

14. 圓ノ面積ト、之ニ内接スル正十六角形ノ面積
トノ比ヲ、小數第二位マデ算出セヨ。 [42 年・大・高・工]

15. 一邊ノ長サ 1 尺ナル正八邊形ヲ底面トシ、側

稜ト高サトガ互ニ 30° ノ角ヲナス正角錐ノ體積ヲ計
算セヨ。 [38 年・東・高・工]

16. 各稜ノ長サヲ 1 尺トスル正四面體ヲ作り、且
ソノ二面角ノ大イサヲ求メヨ。
但 $\sin 70^\circ = 0.9397$, $\sin 71^\circ 0' = 0.9455$. [36 年・專・入・檢]

17. 錐體アリ、底面ハ一邊ノ長サ 2 尺ナル正方形
ヲナシ、且斜稜ハ何レモ 3 尺ナル
トキ、各斜面ガ底面トナス角ノ正
弦、餘弦、及ビ正切ヲ求メヨ。 又次
ノ表ヨリ其ノ角ヲ分ノ位マデ算
出セヨ。 但 $\log 2 = 0.3010$.

角	$\log \sin$	
20° 0'	1.5341	70° 0'
10'	1.5375	50'
20'	1.5409	40'
30'	1.5443	30'
40'	1.5477	20'
50'	1.5510	10'
21° 0'	1.5543	69° 0'
	$\log \cos$	角

[42 年・海・機]

18. 烟突ニ向ヒテ歩行スル人アリ、300 尺進行ス
ル間ニ、其ノ頂點ノ仰角 15° ヲリ 45° ニ變化セリ、烟突
ノ高サヲ求メヨ。 [44 年・各醫・專]

19. 山ノ麓ニ高サ h 尺ノ塔アリ、山頂ニ於テ塔頂
及ビ塔脚ノ俯角ヲ測リテ α 及ビ β ヲ得タリ、山ノ高
サヲ求メヨ。 [44 年・海・機]

20. 旗竿アリ、其ノ基點ヨリ 360 尺ノ距離ニ於ケル
仰角ハ 135 尺ノ距離ニ於ケル仰角ノ半分ニ等シ、
竿ノ高サヲ求メヨ。 [23 年・東・高・工]

21. 高サ h ナル塔ノ基底ヨリ、地平面上 a ナル距離ノ一ツノ點ニ於テ、塔ノ張ル角ト塔上ニ直立セル竿ノ張ル角トハ相等シト云フ、竿ノ長サ如何。

[40年.名.高.工.]

22. 一船進行中、北東及ビ北北東ニ方リテ二個ノ燈臺ヲ見タリ、ソレヨリ正北ニ向ヒテ進行スルコト20哩ニシテ、再ビ以前ノ燈臺ヲ見ルニ、其ノ方位何レモ正東ナリキト云フ、二ツノ燈臺ノ距離如何。

[37年.水.講., 44年.陸.經.]

23. 直立セル旗竿ガ地上ニ投ズル影ノ長サハ $23^R.27$ ニシテ、此ノトキ太陽ノ仰角 $44^\circ 48'$ ナリ、旗竿ノ長サ幾何ナルカ。

但 $\log 2.31 = 0.3636$, $\log 2.32 = 0.3655$, $\log 2.33 = 0.3674$,

$L \tan 44^\circ 40' = 9.9949$, $L \tan 44^\circ 50' = 9.9975$. [39年.海.機.]

24. 平地ニ直立セル長サ6尺ノ旗竿アリ、日中地上ニ5尺ノ影ヲ投ゼリト云フ、太陽ノ此ノ時ニ於ケル仰角ハ何程ナルカ。但 $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, $\log \tan 50^\circ 11' = 0.07901$, $\log \tan 50^\circ 12' = 0.07927$. [40年.金.醫.專.]

25. 山頂ニ於テ同ジ方向ニアル二ツノ家屋ノ俯角ヲ測リシニ $23^\circ 20'$ 及ビ $18^\circ 10'$ ヲ得タリ、又二ツノ家屋ノ距離ハ440間ナリ、山ノ高サヲ求メヨ。

但 $\log \sin 23^\circ 20' = \bar{1}.59778$, $\log 44 = 1.64345$,

$\log \sin 18^\circ 10' = \bar{1}.49385$, $\log 6033 = 3.78053$,

$\log \sin 5^\circ 10' = \bar{2}.95450$, $\log 6034 = 3.78061$. [34年.陸.士.]

26. 人アリ、一點 B ヨリ或山ノ頂上 C ヲ測リシニ $27^\circ 18'$ ヲ得タリ、又同ジ水平面上500間後方ナル點 A ヨリ、之ヲ測リシニ $16^\circ 10'$ ヲ得タリト云フ、依リテ山ノ高サヲ求メヨ。

但 $L \sin 27^\circ 18' = 9.66148$, $\log 5 = 0.69897$,

$L \sin 16^\circ 10' = 9.44472$, $\log 3307 = 3.51940$,

$L \sin 11^\circ 8' = 9.28577$.

[38年.長.高.商.]

27. 或軍艦ノ甲板ト同ジ水平面ニアル海岸ノ一點ヨリ、其ノ橋頭ノ仰角ヲ測リ $2^\circ 4' 34''$ ヲ得タリ、今橋ノ高サ150尺ナルトキ、其ノ點ヨリ橋ニ至ル水平距離ヲ、次ニ與ヘタル對數ヲ用ヒテ計算セヨ。

$\log 2 = 0.301030$, $L \cot 2^\circ 4' 30'' = 11.440915$,

$\log 3 = 0.477121$, $L \cot 2^\circ 4' 40'' = 11.440333$,

$\log 4.137 = 0.616685$, $\log 4.138 = 0.616790$. [36年.海.兵.]

28. 傾斜 30° 、長サ250米ナル斜面 BC アリ、其ノ麓ノ點 B ニ於テ、山頂 A ヲ望ミ仰角 60° ヲ得タリ、今 $\angle BCA$ ヲ 135° ナリトスレバ、 A ハ B ヨリ高キコト幾何。

[38年.陸.士.]

29. 塔アリ、其ノ頂上ニ長サ a 尺ノ旗竿ヲ立ツ。
 今塔ノ基礎ト同水平面上ノ一點ニ於テ、塔ノ仰角及
 ビ旗竿ノ距角[測點ト旗竿ノ上下兩端トヲ結ビ付ク
 ル直線ガ測點ニ於テナス角]ヲ測リシニ、何レモ θ 度
 アリタリ、然ルトキハ塔ノ高サハ $a \cos 2\theta$ ナルコトヲ
 證セヨ。 [43年・水・講]

30. 谷川ニ直線ノ橋ヲ架セリ、其ノ長サ a 尺ニシ
 テ、橋ノ兩端ヨリ橋下ノ谷底ノ一點マデノ傾斜ハ、橋
 ト A 度及ビ B 度ナ、 $\angle$ 角ヲナスト云フ、谷ノ深サ如
 何。 [44年・陸・經]

31. 高サ h ノ山上ニ在ル人、其ノ正西ニ方リ、一ノ
 船ヲ望見セシニ俯角 θ ナリシガ、或時間ヲ經テ再ビ
 望ミシニ、船ハ西ヨリ 60° 南ニ方リ俯角 θ' トナレリ、
 此ノ船ノ前後兩位置ノ距離ヲ問フ。 [44年・海・兵]

32. 傾斜セル鐵道線路ガ水平面ト $0^\circ 47' .3$ ノ角ヲ
 ナセルアリ、今1尺ダケ鉛直ニ昇ルニハ、此ノ線路ニ
 沿ヒテ幾尺ヲ行クベキカ。尺ノ小數第一位マデ求
 メ以下四捨五入セヨ。

但 $\log \sin 0^\circ 47' = 2.1358$, $\log \sin 0^\circ 48' = 2.1450$.

	數ノ對數									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745

[43年・海・機]

33. 甲乙二ツノ塔アリ、同一ノ水平面上ニ直立ス、
 其ノ高サ、甲ハ18米、乙ハ8米ナリ、而シテ其ノ各塔ノ
 基底ニ於テ、互ニ他ノ塔ノ仰角ヲ測リシニ、甲塔ノ仰
 角ハ乙塔ノ仰角ノ2倍ナリキト云フ、二ツノ塔ノ距
 離如何。 [30年・陸・士]

34. 河ノ對岸ニ一樹アリ、其ノ高度ヲ測リシニ
 $19^\circ 25'$ ヲ得タリ、河岸ニ沿ヒテ正北ニ進ムコト120尺
 ニシテ、又之ヲ測リシニ前ト等シキ角度ヲ得タリ、河
 幅ハ樹ノアル所ニ於テ80尺ナリトセバ、其ノ樹ノ高
 サ幾尺ナルカ。 [40年・長・高・商]

但 $\log \tan 19^\circ 25' = 1.54714$, $\log 3.5248 = 0.54714$.

35. 煙突ノ頂點ヲ D 、其ノ基底ヲ C トシ、 A 及ビ
 B ヲ C ト同ジ水平面上ノ二ツノ點トス、而シテ觀測
 ニ依リテ $\hat{CAB} = 105^\circ$, $\hat{CBA} = 30^\circ$, $\hat{DAC} = 60^\circ$, $AB = 30$ 〃ナル
 値ヲ得タリ、煙突ノ高サハ何程ナルカ。問ノ小數第

二位マデ計算セヨ.

[43年.各高等.]

36. 南北ノ道路上ニ北ヨリ A, B, C, D 及ビ E ノ順序ニ 5 個ノ目標アリ, E ノ東ノ一地 O ニ於テ, 是等ノ目標ヲ望ミ $\hat{AOB}=\alpha$, $\hat{BOC}=\beta$, $\hat{COD}=\gamma$, $\hat{DOE}=\delta$ ナルコトヲ知レリ, 尙 $DE=d$ ナルトキハ AB, BC, 及ビ CD 各如何. 但對數計算ニ便ナル算式ニテ表ハセ,
又 $d=10^*$, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=15^\circ$ ナル場合ニ於ケル結果ヲ, 米ノ小數第一位マデ計算セヨ.

[43年.陸.士.]

37. 或人湖水面ヲ抜クコト 120 尺ノ高所ニ居リテ, 風船ノ仰角 15° ヲ測リ, 又湖水面ヨリ反射スル其ノ映像ノ俯角 30° ヲ測レリ, 湖水面上風船ノ高サ如何.

[37年.大.高.工.]

方 程 式

次ノ方程式ニ適合スル最小正角ヲ求メヨ [1 及ビ 2].

1. $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$. [42年.東北農.大.]
2. $5\sin x = \cos 2x + 2$. [35年.大.高.工.]
3. $\sin(A-40^\circ) = \sin(A+80^\circ)$ ニ適合スル A ノ正ノ銳角ヲ求メヨ. [42年.海.機.]

次ノ方程式ニ適合スル 0° ト 180° トノ間ニアル角ヲ求メヨ [4 乃至 10].

4. $\sin 2\theta = 0$. [38年.陸.士.]
5. $2\cos^3\theta = \cos\theta$. [44年.海.機.]
6. $\sin 2x - \cos x = 0$. [33年.陸.士.]
7. $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$. [39年.海.機.]
8. $2\sin\theta \sin 3\theta = 1$. [38年.陸.士.]
9. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$. [34年.海.機.]
10. $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$. [39年.專.入.檢.]
11. 790° ト 880° トノ間ニ於テ $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ ニ適合スル θ ノ値如何. [33年.海.機.]

12. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ヲリ $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ

[32年. 商船.]

13. $\tan\theta + \sec\theta = 2$ ヲリ $\sin\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

[33年. 商船.]

14. $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$ ナルトキ $\tan\theta$ ノ値如何.

[38年. 千. 醫. 專.]

次ノ各方程式ヲ解ケ[15乃至35].

15. $\sin 3\theta = \cos 2\theta$. [43年. 海. 經.]

16. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$. [44年. 秋. 鐵. 專.]

17. $\cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos\theta = 0$. [30年. 東. 高. 工.]

18. $2\sin(A + 30^\circ) = \csc A$. [38年. 商船.]

19. $\cos^2\theta = 1$. [34年. 東. 高. 工.]

20. $\cos 3\theta + 8\cos^3\theta = 0$. [33年. 東. 高. 工.]

21. $\cos 2\theta - \cos 4\theta = \sin\theta$. [37年. 海. 兵.]

22. $\sin 7\theta - \sin\theta = \sin 3\theta$. [33年. 海. 兵.]

23. $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$. [43年. 七高.]

24. $\cot\theta - \tan\theta = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$. [38年. 商船.]

25. $\cos 1' - \cos 59^\circ 59' = \cos x$. [44年. 海. 經.]

26. $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$. [34年. 商船.]

27. $6\sin A + \operatorname{cosec} A = 5$. [33年. 東. 高. 商.]

28. $2\cos A - 2\sec A = 3$. [30年. 東. 高. 商.]

29. $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$. [44年. 上. 醫. 專.]

30. $\sin 5\theta - \sin 3\theta = \sqrt{2}\cos 4\theta$. [43年. 商船.]

31. $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$. [33年. 海. 兵.]

32. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [30年. 一高.]

33. $3\tan\theta + \cot\theta = 5\operatorname{cosec}\theta$. [36年. 盛. 高. 農.]

34. $3\tan^2x - \sec^2x = 1$. [33年. 農. 大. 實.]

35. $\cos 2A = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos A + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1$. [36年. 各高等.]

36. 次式ニ適スベキ 90° 以内ノ A ヲ求メヨ.

$$\frac{\cot 9.1^\circ - A \operatorname{cosec}^2(180^\circ - A) \cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A \sin^2(270^\circ + A)} = 2$$
. [43年. 海. 兵.]

37. $3\operatorname{cosec}^2\theta - 8\cot\theta + 2 = 0$ ヲ解ケ.

但 $\log \tan 30^\circ 57' = \bar{1}.77791$, $\log \tan 30^\circ 58' = \bar{1}.77820$,
 $\log 6 = 0.77815$. [36年. 專. 入. 檢.]

38. 次ノ等式ヲ證シ, 且ツノ各邊ノ最大値最小値
 及ビ各ノ場合ニ應ズル θ ノ一般ノ値ヲ求メヨ.

$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta$. [44年. 陸. 士.]

39. 次ノ二ツノ方程式ニ適合スル $\sin x$ 及ビ $\sin y$
 ノ値ヲ求メヨ.

$a\cos^2x + b\sin^2x = p\cos^2y \dots \dots \dots (1)$

$a\sin^2x + b\cos^2x = q\sin^2y \dots \dots \dots (2)$

[37年. 東. 高. 師.]

40. 方程式 $x+y=90^\circ$, $\sin(3x-y)=\frac{1}{2}$ に適合スル 180° ヨリ小ナル總テノ角 α 及ビ y ヲ求メヨ.

[44年・大・高・工.]

41. 次ノ二ツノ式ヨリ θ ト ϕ トノ値ヲ求メヨ.
 $2\sin(\theta+\phi)=\sqrt{3}$... (1) $2\cos(\theta-\phi)=\sqrt{3}$... (2)

[37年・農・大・實.]

42. $\sin(2x-y)=\cos(x+2y)=\frac{1}{2}$ ヨリ x, y ヲ求メヨ.

[36年・商船.]

43. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$x+y=150^\circ$... (1) $\tan x + \tan y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$... (2)

[42年・東・高・工.]

逆三角函數

1. $\tan^{-1}m + \tan^{-1}n = \tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$ ヲ證セヨ.

[31年・海・兵.]

2. $2\tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$ ヲ證セヨ.

[34年・陸・士.]

消 去 法

$$1. \quad a \sin \theta + b \cos \theta = c \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$b \sin \theta + a \cos \theta = d \quad \dots \dots \dots (2)$$

ヨリ θ を消去セヨ。 [32年・海・農]

$$2. \quad a \sin \theta + b \cos \theta - m = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$b \tan \theta - a - n \sec \theta = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

ヨリ θ を消去セヨ。 [33年・東・高・工]

$$3. \quad a \sin \theta + b \cos \theta = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$b \sin \theta + a \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \dots \dots \dots (2)$$

ヨリ θ を消去セヨ。 [33年・海・兵]

4. 次ノ二式ニ於テ ϕ を消去シ、 $\cos A$ ノ値ヲ a, b, c ニテ表ハスコトヲ求メヨ。

$$a = (b+c) \cos \phi, \quad 4bc \cos^2 \frac{A}{2} = (b+c)^2 \sin^2 \phi. \quad [44年・商船]$$

$$5. \quad \sin \alpha = m \sin \beta \quad \dots \dots (1) \quad \tan \alpha = n \tan \beta \quad \dots \dots (2)$$

ヨリ β を消去セヨ。 [39年・商船]

$$6. \quad \tan \theta + \cos \theta = a, \quad \tan \theta - \cos \theta = b \quad \text{ヨリ } \theta \text{ を消去セヨ。}$$

[42年・商船]

$$7. \quad (1) \quad m \sec \theta = 1 + \tan \theta, \quad n \sec \theta = 1 - \tan \theta.$$

$$(2) \quad \sin \theta - \cos \theta = m, \quad \sin 2\theta = n.$$

ヨリ θ を消去セヨ。

[42年・陸・主・候]

補

簡易測量術

第一節 緒論

1. 測量術 測量術トハ地球表面上ノ距離、面積及ビ諸點ノ比對位置ヲ決定スルノ術ナリ。

2. 簡易測量術 測量ノ術タルヤ、極メテ廣濶ニシテ十分ニ之ヲ説カント欲セバ、固ヨリ小冊子ノ能ク悉クス處ニアラズ、又實測ヲ爲スニハ種種ノ器械ヲ要スレドモ、茲ニ説ク處ハ極メテ簡易ナル測量術ニシテ、何人モ屋外ニ在リテ實施スルヲ得可ク、其ノ目的タル宅地、町村、田畑、等ノ地圖ヲ製シ、又ハ用惡水路等ノ測量ニ止マル、故ニ次ニ記スルー二ノ器械ノ如キモ、多クハ自製スルヲ得可キモノタリ。●

3. 縮尺 地圖ヲ編成セント欲セバ、其ノ土地ノ廣袤ヲ一定ノ比例ニ準ジテ縮寫セザル可カラズ、

之ヲ縮尺ト云フ、而シテ縮尺ノ大小ハ測圖ノ種類、及ビ目的ニ從ヒテ異ナリ。本邦ニ於テ慣用スル處ノ一寸一間、又ハ一分一間ノ縮尺トハ六十分ノ一、又ハ六百分ノ一ニ當ル、是等ハ家屋庭園等ノ圖ヲ編成スルニ適ス。尙大區域ノ測圖ノ縮尺ニハ、コレヨリ小ナルモノヲ用フ、例ヘバ陸地測量部發刊ノ東京圖ハ五千分一ニシテ、軍管圖ハ二萬分一、輯製圖ハ十萬分一、二十萬分一ナルガ如シ。地圖ニ於テ何百分一、若シクハ何千分一ノ縮圖ト云ヘルハ、其ノ地圖ノ面積ガ實地ノ面積ノ何百分ノ一、若シクハ何千分ノ一ト云フ意味ニアラズシテ、其ノ縮尺ノ長サガ實地ノ長サノ何百分ノ一、若シクハ何千分ノ一ナルノ義ナリ。

第二節 器械

4. 距離尺 普通ノ測量ニハ測鎖ヲ用フト雖モ、簡易測量ニハ卷尺、又ハ麻繩ヲ用フルカ、或ハ步測ヲ以テ距離ヲ測定スルヲ便ナリトス。

5. 測竿 長サ約ソ1間半位ノ竹竿ニ小旗ヲ付シタルモノ數本ヲ用フ可シ。

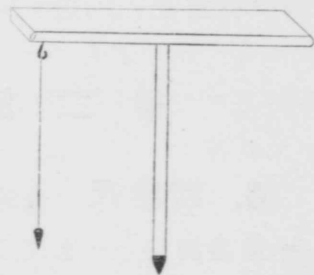
6. 測針 長サー尺計リノ火箸ノ如キモノ數

本ヲ要ス。

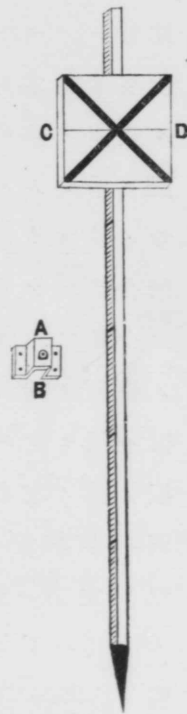
7. 測板 測板トハ一邊約ソ2尺計リノ正方形ノ平板ニ三脚架ヲ付シタルモノナリ、但板ノ各隅ニハ小孔ヲ穿チ、磁針ノ匣ヲ螺着スルノ裝置ヲナシ又板ノ中央、若シクハ適宜ノ處ニハ針ヲ立テ、照準儀ノ下底ニ挿シ込ムノ用ニ供シ、其ノ直下ニハ鉤ヲ付ケ、垂球ヲ懸クルノ裝置ヲ爲ス可シ。

8. 磁針 便宜ノ形ノモノヲ用フ可シ、但豫メ測板ノ下ヨリ螺着スル穴ヲ穿チ置ク可シ。

9. 高低儀 高低儀ハ水準測量ニ用フルモノニシテ、長サ約ソ1尺、幅約ソ1寸、厚サ約ソ5分、又ハ6分ノ平板ニ一脚ヲ附シ、其ノ平板ノ右側ニ長サニ沿ヒターノ管ヲ具ヘ、視望ノ用ニ供ス、但其ノ管ノ一端ニハ十字ノ毛線ヲ引キ、其ノ交點ト目標ト一致スル様ニ視望ス可シ、而シテ管ノ他ノ一端ニハ垂球ヲ懸垂シ、管ガ正シク水平ナルヤ否ヤヲ試驗スルノ用ニ供ス。



10. 標尺 標尺ハ長サ1間、幅約ソ1寸3分又ハ1寸4分、厚サ約ソ1寸ノ角棒ニシテ、其ノ側面ニハ度ヲ刻シ、又一邊約ソ1尺計リノ正方形ノ板ヲ金具ニテ棒ヲ上下ニ滑動スル様ニ挿シ込ミ、板ノ面ハ遠見ニ便ナル爲ニ白ク塗り、黒ク幅1寸計リノ對角線ヲ引、クコト圖ノ如クシ、其ノ交點ヲ視望スルモノトス、但金具ABノ下縁ハ正シク板ノCDノ位置ニアルモノトシ、此ノ板ヲ便宜ノ位置ニ固定セシメンガ爲ニ、金具ニ螺子ヲ附ス可シ。



11. 照準儀 照準儀ハ方向ヲ視視シ、又ハ高低ヲ視視スル器械ニシテ、次頁ノ圖ノ如クCDノ長サ約ソ1尺2寸、幅1寸4分、又ハ1寸5分ニシテ、A板ニハ四ツノ小孔ヲ有シ、B板ノ中央ニハ縦ニ小溝ヲ有シ、其ノ中央ニ垂直ニ一條ノ毛線ヲ張り、A板ノ小孔ヨリ此ノ毛線ヲ通ジテ目標ヲ視望スルモノトス。CDノ斜面ノ下端ニ附シタルハ尺度ノ5厘毎ニ目盛シタル縮尺ニシテ、

度ヲ刻シタル部分ノ

全長ハ1尺1寸5分ト

ス。又斜面ノ上端ニ

貼付シタルハ、測者ノ

歩度ヲ檢定シテ得タル

複歩ノ縮尺トス。

圖ニ示シタルハ、一複

歩ノ長サ4尺6寸ノ

割合ヲ以テ300複歩ノ縮尺ナリ、但歩長ハ人ニ依リ

テ少異アルガ故ニ、測者ハ各自ノ歩度ヲ檢シテ各自

ノ複歩ノ縮尺ヲ作リテ貼付スルヲ可トス。斜面ノ

刃ハ視ヒタル方向ヲ鉛筆ニテ引クノ用ニ供ス、又B

板ノ溝ノ左右ニハA、B二板ノ間ノ距離ノ百分數ヲ

刻ム、但右側ノ目盛ハ下ヨリ上ニ向ヒ、0ヨリ60ニ

至リ、左側ハ上ヨリ下ニ向ヒ、0ヨリ60ニ至ル。A板

ノ小孔ハ下ヨリ順ニ取レバツレゾレB板右側ノ目

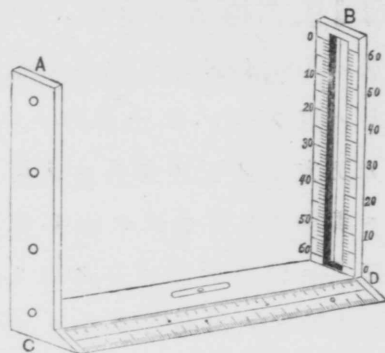
盛ノ0、20、40、60ニ對應ス。CDノ上ニハ氣泡水準器

ヲ裝置セリ。若シA板ノ最下端ノ小孔ヨリ視キ、或

目標ガB板ノ右側ノ目盛25ニ對應スルトキハ、其ノ

目標ノ昇傾斜ハ $\frac{25}{100}$ ナリ、而シテ降傾斜ヲ決定スル

ニハA板ノ上孔ヨリ視ク可シ。



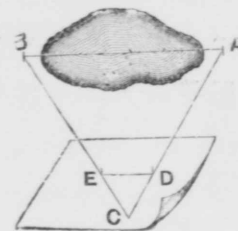
12. 以上ノ外ニ要スルハ製圖用ノ器械、即チこ
むばす、分度器、ぢやうぎ、等ナリ。

第三節 線測量

13. 步測 地上一線ノ長サヲ測ラントスルニハ、
之ニ沿ヒテ平等ニ歩行シ、其ノ歩數ヲ計算ス可シ、依
リテ測者ハ豫メ各自ノ歩度ヲ檢定シ置クコトヲ要ス。
本邦ニテハ軍人一步ノ長サハ操練上ニテ70釐ト定
ム、即チ2尺3寸1分ナリ。歩數ヲ計算スルニハ通例
複歩ヲ以テス、即チ二歩毎ニ一ツトシテ計算スルヲ
云フ。今假ニ或測者ノ複歩ヲ4尺6寸ト定ムレバ
300複歩ノ長サハ(46×300)寸ニシテ、今之ヲ五厘一間
ノ縮尺ニテ表ハストキハ、46×300ノ千二百分一ヲ
取ル可シ、即チ1尺1寸5分ナリ、コレ300複歩ノ縮
尺ニシテ前ニ照準儀ノ斜面上端ニ貼付シタルハ是
ナリ。

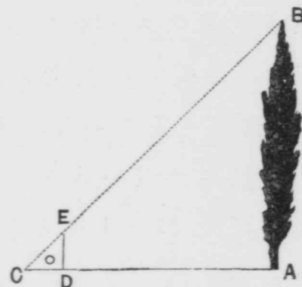
14. 直接に步測する 能はざる場合

例ヘバABノ長サヲ測ラント
スルニ、其ノ中間ニ池アリテ、Aヨ



リBニ直向スル能ハザルトキハ、適宜ニ點Cニ測板ヲ置キ、CヨリAヲ覘視シ、其ノ方向線CAヲ引キ、CA上ニ適宜ニ點Dヲ取り、其ノ長サヲCAノ若干分ノ一[例ヘバ百分ノ一]ニ等シカラシメ、又CB上ニEヲCBノ同ジ若干分ノ一[百分ノ一]ニ等シク取り、DEヲ結ビ付ケ、DEノ長サヲ測ルトキハABガDEニ倍スル數[茲ニハ百倍]ハ、ACガCDニ倍スル數ニ等シキヲ以テ、ABノ長サヲ知リ得可シ。

15. 樹木の高さ 樹木ノ高サABヲ測ルニハ、二邊相等シキ三角びやうぎCDEヲ取り、其ノ一邊CDヲ樹ノ下端Aト同水平ニアラシメ、CEBヲ一直線ナラシムルトキハ、 $AB=AC$ ナルガ故ニ、ACノ長サヲ測レバ、從ヒテABノ長サハ決定セラレタルナリ。或ハ又樹ノ高サヲ測ルニ照準儀ヲ以テスルモ可ナリ。

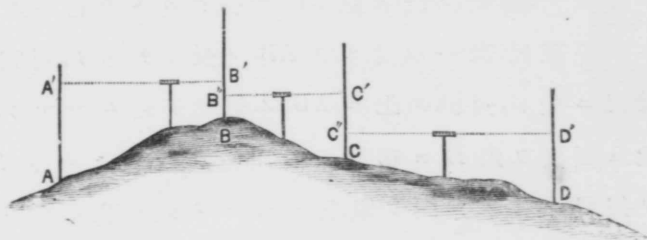


第四節 平面及び水準測量

16. 照準儀ニテ平面測量ヲ爲サンニハ、先ヅ地面ノ境界ノカドカドニ測竿ヲ建テ、最初ニ圖紙ヲ貼リ付ケタル測板ヲ點Aニ安頓シ、磁針ヲ以テ圖面ノ上位ヲ正シク北ニ向ハシメ、板面ヲ水平ナラシム可シ。而シテ板面ノ針[照準儀ニ挿シ込ミタル]ノ位置ガ點Aノ直上ニアルヤ否ヤハ垂球ニテ試験ス可シ。是ニ於テ照準儀ヲ板面ヘ据エ、下ノ孔ヨリ覘視シ、點Bニ建テタル測竿ヲ毛線ト一致スル様ニ見ル可シ、而シテ照準儀ノ斜刃ニ沿ヒテ鉛筆ニテ線ヲ引クトキハ、圖紙ノ上ニ線ABヲ引クコトヲ得タルナリ、但距離尺、又ハ歩度ニテABノ長サヲ測リ、適宜ノ縮尺ニ變ジ、圖紙ノ上ニABノ長サヲ定ムルナリ。次ニ測板ヲ點Bニ移置シ、前同様ノ法ニテAトCトヲ覘視シ、其ノ方向ヲ圖上ニ引ク可シ、但點Aヲ覘フヲ後視ト云ヒ、點Cヲ覘フヲ前視ト云フ[後視ノ方向線ハ、前ニAヨリ引キタル線ト一致スルコト勿論ナリ]、而シテ角ABCノ度數ハ分度器ニテ測レバ知レルナリ。逐テ此ノ方法ヲ施ス可シ。サテ地面ハ多少ノ凸凹アルコト少ナカラズ、然ルニ地圖ハ一ノ

地面ヲ水平面ニ投シタル射影ナルガ故ニ、各測點ニ於テ水準差ヲ測ルコトヲ要ス、但此ノ水準差ハ照準儀ニテ水平方向ヲ測定スルト同時ニ決定スルヲ得ルナリ、其ノ法、測竿ニ覘孔ト同高ノ處ニ符號ヲ付シ置キ、之ヲ覘キテ照準儀ノ板Bノ目盛ヲ讀ムトキハ、其ノ傾斜ノ昇降ノ百分數〔例ヘバ $\frac{n}{100}$ 〕ヲ知ル、依リテ此ノ分數ニ二點間ノ距離ヲ乗ズルトキハ、二點間ノ水準差ノ幾何ナルカヲ知り得ルナリ。

又高低儀ニテ水準差ヲ測定セント欲セバ、先ヅ點Aニ標尺ヲ建テ、二點A、Bノ殆ンド中央ニ高低儀ヲ安頓シ、點Aノ標尺ノ方板ノ對角線ノ交點ヲ覘キ、其



ノ管ノ十字ノ毛線ノ交點ト一致セシメ、其ノ高サヲ讀ミ、次ニ標尺ヲ點Bニ移置シ、又同様ニ覘視シテ對角線ノ交點ノ高サヲ讀ム可シ、而シテ讀數ノ大ナル方ヨリ小ナル方ヲ引キ去レバ、讀數ノ大ナル方ガ其

ノ差ダケ低キナリ。次ニ高低儀ヲ二點B、Cノ殆ンド中央ニ移置シ、同様ノ方法ヲ繰リ返シテ行フ可シ。但高低儀ヲ安頓スルニハ、板面ヲ水平ナラシムルコトニ注意スベシ。

第五節 求積及び製圖

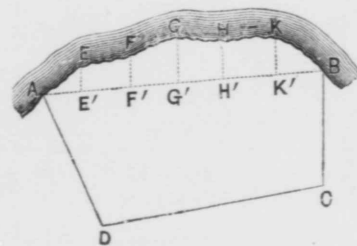
17. 求積 土地ノ面積ヲ求メントスルニ、其ノ土地ガ若干ノ直線ニテ圍マレタルトキハ次ノ如シ

(a) 對角線ヲ引キ、土地ヲ三角形ニ分チ、其ノ各三角形ノ和ヲ取ル可シ。

(b) 一ノ對角線ヲ引キ、之ニ各角隅ヨリ垂線ヲ引キテ、土地ヲ直角三角形、矩形、梯形ニ分チ、此ノ各面積ヲ求メテ其ノ和ヲ取ル可シ。而シテ土地ノ境界ガ直線ノミナラズ、曲線ニテ圍マレタル場合モ亦同様ナリ。

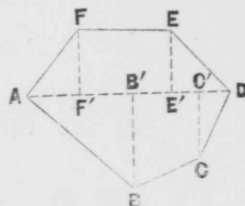
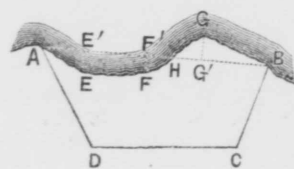
(c) 圖AGBCDハ小河

AEFGHKBニ沿ヒタル百面トス。線ABヲ引キ、河岸ノ點E、F、G、H、KヨリABニ垂線ヲ引キ、AE、EF、等ヲ直線ト見



做シテ面積 AGB ヲ求メ、之ニ面積 ABCD ヲ加フ可シ

(d) 左方ノ圖ハ AB ガ地面ノ境界ヲ截ル場合ナリ。



此ノ場合ニハ所要ノ面積ハ $ABCD + HGB - AEFH$.
一例トシテ地面 ABCDEF [右方ノ圖] ノ面積ヲ求メ
ントスルニ、

$$AF' = 4^{\text{間}}, FF' = 6^{\text{間}}, EE' = 6^{\text{間}}.5, AE' = 9^{\text{間}}, AD = 14^{\text{間}},$$

$$AC' = 10^{\text{間}}, AB' = 6^{\text{間}}.5, BB' = 7^{\text{間}}, CC' = 6^{\text{間}}.75$$

ヲ測定シタリトス。然ルトキハ

$$F'E' = 9^{\text{間}} - 4^{\text{間}} = 5^{\text{間}}, E'D = 14^{\text{間}} - 9^{\text{間}} = 5^{\text{間}},$$

$$B'C' = 10^{\text{間}} - 6^{\text{間}}.5 = 3^{\text{間}}.5, C'D = 14^{\text{間}} - 10^{\text{間}} = 4^{\text{間}},$$

$$\text{依リテ 三角形 } AFF' = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12^{\text{坪}}.00$$

$$\text{梯形 } FF'E'E = \frac{1}{2} \times (6 + 6.5) \times 5 = 31^{\text{坪}}.25$$

$$\text{三角形 } EE'D = \frac{1}{2} \times 5 \times 6.5 = 16^{\text{坪}}.25$$

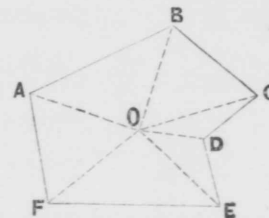
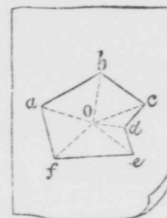
$$\text{三角形 } CC'D = \frac{1}{2} \times 4 \times 6.75 = 13^{\text{坪}}.50$$

$$\text{梯形 } CC'B'B = \frac{1}{2} (7 + 6.75) \times 3.5 = 24^{\text{坪}}.0625$$

$$\text{三角形 } AB'B = \frac{1}{2} \times 6.5 \times 7 = 22^{\text{坪}}.75$$

依リテ全面積ハ $119^{\text{坪}}.8125$, 即チ 119 坪 8 合 餘 ナリ。

18. 製圖 土地ノ小部分 ABCDEF ノ實測圖ヲ
作ラント欲セバ、其ノ土地ノ殆ンド中央[或ハ一角



ニテモ可ナリ]ニ測板ヲ安頓シ、照準儀ニテ OA, OB, OC, 等ノ諸線ノ方向ヲ測リ、之ヲ圖紙上ニ寫シテ Oa, Ob, Oc, 等ノ諸線ヲ引キ、其ノ長サハ OA, OB, OC, 等ヲ測定シ、之ヲ適宜ノ縮尺ニテ表示シタルモノタル可シ。但測量セント欲スル土地ガ廣大ナルトキハ、便宜ニ之ヲ幾筆ニモ區分シテ、一區ヅツ實測圖ヲ作りテ之ヲ接續ス可シ、然ルニ二ツ以上ノ實測圖ヲ接續スルニハ、多少ノ喰ヒ違ヒヲ免カレザルユエ、双方ヨリ譲リ合ハシテ接續スベシ。若シ此ノ喰ヒ違ヒガ甚ダシケレバ宜シク再測ス可シ。

答

緒論

2. 242620''. 3. 15°56'38".
4. 1.07875. 5. 0.54. 6. 25°52'30".
7. 153°24'29".34. 8. 分針 540°, 時針 45°.
10. 6.

第一編

1. $\sin A = \cos C = \frac{8}{17}$,
 $\cos A = \sin C = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$, $\tan C = \frac{15}{8}$.
2. $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{5}{12}$, 等.
3. $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$, $\tan A = \frac{7}{24}$, 等.
4. $\tan A = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}$.
5. $\sin B = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cot B = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
6. $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
7. $\sin A = \frac{m^2-1}{m^2+1}$, $m > 1$; $\frac{1-m^2}{m^2+1}$, $m < 1$; $\cos A = \frac{2m}{m^2+1}$; 等.
8. 3. 9. $\sqrt{2}$. 11. (1) $2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.
(2) $(1 - 2\cos^2\theta)^2 = (2\sin^2\theta - 1)^2$.
(3) $\frac{2\cos^2\theta - 1}{\cos^4\theta} = \frac{1 - 2\sin^2\theta}{(1 - \sin^2\theta)^2}$.
(4) $1 - 3\cos^2\theta + 3\cos^4\theta = 1 - 3\sin^2\theta + 3\sin^4\theta$.

一見シテ明瞭ナル如キ簡單ナル答ハ省略シタリ。

31. 45°. 32. 30°. 33. 15°. 34. 45°.
35. 15°. 36. 45°. 37. 5. 38. $\frac{7}{3}$.
39. $\frac{1}{2}$. 40. $\frac{3}{4}$.

第二編 1. B=60°, a=9, b=9√3=15.588.

2. A=60°, B=30°, b=4.
3. A=45°, b=25, c=25√2=35.355.
4. c=2√6=4.899, B=30°, A=60°.
5. B=47°50', a=10.87, c=16.19.
6. A=53°30', B=36°30', c=62.20.
7. A=51°40', a=12.55, b=9.92.
8. a=1979.3, A=81°45', B=8°15'.
9. 25√3=43.301. 10. 25²√3=1082.5.
11. 6√3¹⁰⁰=10¹⁰⁰.392. 12. 60°.
13. 200(1+√3)^R=546^R.41. 14. 4√3¹⁰⁰=6¹⁰⁰.928.
15. 732^R.2. 16. 高サ=距離=15(3-√3)^R=70^R.93.
17. 8786 尺. 18. 8√3^R=138^R.56.
19. 60°, 100√3^R=173^R.21. 20. 100√3¹⁰⁰=173¹⁰⁰.21.
21. 3270 尺. 22. 16¹⁰⁰.015. 23. 約 42 秒.
24. $\frac{1}{2}\sqrt{6^100}=1^100.22474$. 25. 50√3^R=86^R.60.
26. 30°. 27. 10 哩, 24¹⁰⁰.142. 28. $\frac{a}{\sqrt{3}h}$.

第三編 2. 第四分面, 第二分面, 第三分面,

第三分面, 第二分面, 第四分面, 第一分面, 第四分面,

第三分面, 第一分面. 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1$, 等.

$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$, 等. $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$, 等.

$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}$, 等. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$

6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{3}, 1, -1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}$

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$. 8. $\cos 31^\circ, -\sin 44^\circ, \tan 9^\circ,$

$\cot 15^\circ, \sec 45^\circ, -\sec 22^\circ$.

9. $-\cos A, \sin A, -\cot A$, 等. $-\cos A, -\sin A, \cot A$, 等.

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$. 17. 正, 負, 負, 等. 負, 正, 負, 等.

正, 正, 正, 等.

18. $\frac{3}{5}, -\frac{3}{4}$.

19. $\frac{2\sqrt{10}}{7}, -\frac{2\sqrt{10}}{3}$. 20. $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$.

21. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 22. $(a+b)^2$. 23. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

第四編

5. $\frac{7}{25}, \frac{24}{28}$, 平方根 = ハ正負ノ二値

ナルユエ, 本題ハ四組ノ答アレドモ他ハ之ヲ略ス. 以下

之ニ倣フ. 6. $\frac{16}{65}, \frac{33}{65}$. 18. $45^\circ, 225^\circ$.

19. 1. 20. 0, $\frac{12}{35}$. 21. $-\frac{278}{29}, \frac{1}{2}$.

29. $-\frac{23}{25}$. 30. $\frac{7}{8}$. 31. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

32. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$. 33. $\frac{3}{4}$. 34. $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}$.

35. -1. 36. $\frac{117}{125}$. 37. $\frac{9}{13}$.

56. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$. 57. $\cos(\gamma+\delta)+\cos(\gamma-\delta)$.

58. $\sin(2\alpha+3\beta)+\sin(2\alpha-3\beta)$. 59. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$.

60. $\frac{1}{2}(\cos 3\theta - \cos 5\theta)$. 61. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

62. $2\sin 7\theta \cos 3\theta$. 63. $2\sin 40^\circ \cos 20^\circ$.

64. $2\sin 15^\circ \cos 25^\circ$. 65. $2\cos 5\theta \cos 3\theta$.

66. $-2\sin 5\theta \sin \theta$. 67. $-2\sin \frac{9}{2}A \sin \frac{1}{2}A$.

第六編

1. $B=72^\circ 14'$, $a=75.13$, $c=92.79$.

2. $A=26^\circ 46'$, $b=133.38$, $c=226.4$.

3. $A=106^\circ 15'$, $b=767.8$, $c=1263.5$.

4. $A=92^\circ 12' 14''$, $B=27^\circ 47' 44''$, $C=60^\circ$.

5. $A=80^\circ 16' 48''$, $B=35^\circ 5' 50''$, $C=64^\circ 37' 22''$.

6. $A=41^\circ 23' 16''$, $B=47^\circ 46' 50''$, $C=90^\circ 49' 56''$.

7. 190830.

8. $A=79^\circ 6' 24''$, $B=40^\circ 53' 36''$, $c=7.937$.

9. $B=78^\circ 48' 53''$, $C=56^\circ 41' 7''$, $a=19.291$.

10. $A=27^\circ 38' 34''$, $C=117^\circ 39' 26''$, $b=134.97$.

11. $A=100^\circ 4' 2''$, $C=45^\circ 44' 58''$, $a=664.9$.

$A'=11^\circ 33' 58''$, $C'=134^\circ 15' 2''$, $a'=135.39$.

2. $A=119^\circ 40' 8''$, $C=26^\circ 8' 52''$, $a=748.1$.

13. $A=51^{\circ}18'20''$, $C=88^{\circ}41'40''$, $c=218.52$.

$A'=128^{\circ}41'40''$, $C'=11^{\circ}18'20''$, $c'=42.85$.

14. (α) 一ツノ解. (β) 兩意ノ場合. (γ) 一ツノ解.

15. 382100.

第七編

1. $20^{\circ}355$. 2. $74^{\circ}97$.

3. $389^{\circ}92$. 4. $252^{\circ}49$. 5. $575^{\circ}4$.

7. $3741^{\circ}3$. 8. $\frac{1}{3}$, 1. 9. $56^{\circ}2$.

11. 8262 米, $9253^{\circ}8$. 12. $\frac{\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin (\gamma - \beta)}$.

14. 1034 尺. 15. 4 里. 16. 78 尺.

17. $c^2 = a^2 + b^2 + 2h^2 - 2\sqrt{(a^2 + h^2)(b^2 + h^2)} \cos \delta$ ヲ h ヲ得ベシ.

附 録

1. 2, 6, $\frac{3}{2}$. 2. 2, 0, 3.

3. 0.25938, 1.77815, 3.17609, 0.60745, 0.53530.

4. 六ツ. 5. $x=1$, $y=\frac{3}{2}$.

復習雜題 緒論

1. $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}$.

3. $C=135^{\circ}25'$, $D=107^{\circ}11'48''$. 4. $22^{\circ}30'$, $157^{\circ}30'$.

5. $\frac{ac}{b} \times 90^{\circ}$. 6. 3.75. 7. $450'$. 8. 80° , 960° .

9. 36. 10. 9.

弧度法

3. 0.2375π . 6. 0.2π , 0.3π , 0.46π .

7. $23^{\circ}873$ 8. 12. 9. $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{6}{7}\pi$, 邊數 14.

10. $1^{\circ}1635$. 11. $46^{\circ}30'$, $37^{\circ}30'$; $\frac{31}{60}$ 直角, $\frac{5}{12}$ 直角.

12. $1^{\circ}275$. 13. 約 3 直角. 14. $5^{\circ}585$.

15. $5^{\circ}236$.

銳角ノ三角函數

1. (1) $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 等.

(2) $\sin A = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{15}{8}$, 等.

(3) $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 等.

(4) $\sin \theta = \frac{p}{q}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$, $\tan \theta = \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}$, 等.

(5) $\cos \theta = \frac{24}{25}$, $\tan \theta = \frac{7}{24}$, 等.

(6) $\cos \phi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, $\tan \phi = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$, 等.

2. $\sin A = \frac{40}{41}$, $\cot A = \frac{9}{40}$.

4. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$.

5. $h^2(1 + k^2) = 1$. 6. $\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$. 8. $1 - \cos^4 \theta$.

9. $\tan^4 \theta + \tan^2 \theta$. 10. $\frac{2 \sin^4 A - 2 \sin^2 A + 1}{\sin^2 A (1 - \sin^2 A)}$.

28. (1) 30° . (2) 60° . (3) 10° . (4) 30° . (5) 18° .

(6) 45° , 或ハ 3 ヲ正切トセル角. (7) 90° , 45° .

(8) 30° . 29. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1. 35. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

36. 相等シ. 37. $\tan A$.

直角三角形

5. (1) $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $b=20\sqrt{3}=34.641$.
 (2) $a=\frac{5}{\sqrt{3}}=2.887$, $c=\frac{10}{\sqrt{3}}=5.774$.
 (3) $A=64^\circ 17'$, $a=90.1$, $b=43.4$.
 (4) $b=4$, $c=5$, $\sin B=\frac{4}{5}$. (5) 30.9.
 (6) 98.91. (7) $b=93$, $A=21^\circ 43'$, $B=68^\circ 17'$.
 (8) $c=353$, $A=39^\circ 36'$, $B=50^\circ 24'$.
6. $136^R.6$. 7. $A=75^\circ$, $B=60^\circ$, $C=45^\circ$, $AB=5.7735$,
 $BC=7.88675$, $AC=7.07106$, 或 $A=15^\circ$, $B=120^\circ$,
 $C=45^\circ$, $AB=5.7735$, $BC=2.11324$, $AC=7.07106$.
8. 4, 12. 9. 14.64. 10. $BD=CD=107.33$.
11. $277^R.13$. 12. $49^R.999$. 13. 200 尺.
 14. $273^R.21$. 15. $277^R.14$. 16. $3^R.464$, 6 哩.
 17. $5^R.196$, 18 哩. 20. $(a+b)\tan\alpha$. 21. $38^R.97$.

任意ノ角ノ三角函数

1. (1) 第四分面. (2) 第二分面. (3) 第三分面.
 (4) 第三分面. (5) 第三分面. (6) 第四分面.
 (7) 第一分面. (8) 第一分面.
2. (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1 . (2) -2 , $-\sqrt{3}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
 (3) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -1 . (4) $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 2 .

- (5) $-\frac{1}{2}$, -2 , $-\sqrt{3}$. 3. $\sin 60^\circ$, $\tan 85^\circ$, $\cos 80^\circ$.
4. $\sin(A-270^\circ)=\cos A$, $\cos(A-270^\circ)=-\sin A$,
 $\tan(A-270^\circ)=-\cot A$, 等.
5. (1) 1. (2) 1. (3) 3. 7. (1) 45° , 315° .
 (2) 120° , 300° . (3) 60° , 120° . (4) 135° , 315° .
8. 正切ト餘切. 9. ナシ. 12. 135° .
- 複角ノ三角函数 1. $\frac{2499}{2501}$. $\cos A$, $\cos B$ ノ負
 値ヲ取リテ $\cos(A-B)$ ニ尙他ノ三ツノ値ヲ得レドモ之
 ヲ略セリ. 以下之ニ倣ヘ. 2. $\frac{645}{1037}$. 3. $\sqrt{2}$.
39. $\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$
 $+\sin(-\alpha-\beta-\gamma)$. 40. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
 $+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

分角ノ三角函数

1. (1) $\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$.
 (2) $\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$.
 (3) $\sin \frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$.
 (4) $\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$.
2. (1) $2\cos \frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$,
 $2\sin \frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$.

$$(2) \quad 2\cos\frac{A}{2} = +\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A},$$

$$2\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}.$$

$$(3) \quad 2\cos\frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A}, \quad 2\sin\frac{A}{2} = -\sqrt{1-\sin A}.$$

$$(4) \quad \text{前ノ(3)ト同様ナリ.} \quad 3. \quad \tan\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tan\frac{A}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 7. \quad A < 45^\circ \text{ 或ハ } A > 225^\circ.$$

三角形ノ性質 9. 9000 平方尺. 10. 15350.

$$11. \quad \frac{84}{85}. \quad 12. \quad 24, \quad \frac{117}{5}, \quad \frac{936}{25}. \quad 13. \quad 225 \text{ 平方尺.}$$

$$14. \quad 4, \quad \frac{65}{8}. \quad 15. \quad 12, 6, 28. \quad 16. \quad 12, 16, 20.$$

三角形ノ解法 1. $A=65^\circ 15'$, $b=95.60$, $c=89.65$.

$$2. \quad A=C=30^\circ, \quad B=120^\circ.$$

$$3. \quad A=45^\circ, \quad B=118^\circ 44' 30'', \quad C=16^\circ 15' 38''.$$

$$4. \quad A=74^\circ 32' 45'', \quad C=48^\circ 59' 15'', \quad b=282.8.$$

$$5. \quad A=109^\circ 40' 13'', \quad C=19^\circ 37' 47'', \quad b=560.1.$$

$$6. \quad A=91^\circ 26' 5'', \quad B=59^\circ 10' 40'', \quad a=73.338.$$

$$A'=29^\circ 47' 25'', \quad B'=120^\circ 49' 20'', \quad a'=36.447.$$

$$7. \quad A=33^\circ 18' 11'', \quad C=104^\circ 26' 49'', \quad c=256.80.$$

$$8. \quad 95^\circ 44' 22''. \quad 9. \quad B=100^\circ 47', \quad C=14^\circ 13'.$$

$$10. \quad 108^\circ 26' 5'', \quad 53^\circ 7' 50'', \quad 18^\circ 26' 5''.$$

$$11. \quad B=80^\circ 46' 27'', \quad C=63^\circ 48' 33''. \quad 12. \quad c^2=a^2 \sec^2 \theta.$$

$$14. \quad 19.524. \quad 15. \quad 90^\circ 0' 4''.$$

三角形解法ノ應用

$$2. \quad 20\sqrt{3}^{\text{間}}=34^{\text{間}}.64, \quad 60^{\text{間}}, \quad 40\sqrt{3}^{\text{間}}=69^{\text{間}}.28.$$

$$8. \quad 6 \text{ 哩.} \quad 9. \quad \frac{c \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}, \quad \frac{c \sin \beta}{\cos(2\alpha + \beta)}.$$

$$10. \quad 2^\circ 2'. \quad 16. \quad \text{棒ガ水平ト } 45^\circ \text{ ノ角ヲナストキ.}$$

$$\text{逆三角函数} \quad 1. \quad 60^\circ, -30^\circ, 135^\circ, -45^\circ.$$

$$\text{三角方程式} \quad 1. \quad n.180^\circ + (-1)^n.60^\circ.$$

$$2. \quad n.180^\circ \pm \alpha^\circ. \quad 3. \quad n.360^\circ \pm 120^\circ. \quad 4. \quad n.60^\circ.$$

$$5. \quad n.180^\circ \pm 45^\circ. \quad 6. \quad n.180^\circ \pm 30^\circ.$$

$$7. \quad 2n.180^\circ, \text{ 或ハ } \frac{2}{5}n.180^\circ. \quad 8. \quad n.60^\circ, \text{ 或ハ } n.180^\circ \pm 50^\circ$$

$$9. \quad n.45^\circ, \text{ 或ハ } n.60^\circ + (-1)^n.10^\circ. \quad 10. \quad n.90^\circ + 22^\circ 30'.$$

試験問題 測角法

$$1. \quad \frac{n\pi}{180}. \quad 2. \quad 106^\circ.35'210, \quad 1^\circ 27' 27.85619.$$

對數表

$$1. \quad 44^\circ 15' 44'', \text{ 一般ノ値 } n.180^\circ + (-1)^n.44^\circ 15' 44''.$$

$$2. \quad \log 1484.9 = 3.17170, \quad \log 7421.9 = 3.87051,$$

$$L \sin 74^\circ 21' 24'' = 9.98361, \quad L \cot 37^\circ 10' 42'' = 10.12007.$$

$$3. \quad \log \tan 51^\circ 24' = 0.09784, \quad \sin 38^\circ = 0.6157.$$

$$4. \quad \log \sin 60^\circ 30' = \bar{1}.93970, \quad \log \sin 25^\circ 15' = \bar{1}.62999,$$

$$\sin 13^\circ = 0.2250, \quad \tan 73^\circ = 3.2709.$$

$$5. \quad \log \sin 60^\circ = \bar{1}.93753, \quad \log(5 \sec 45^\circ) = 0.84949.$$

$$6. \quad \log_{10} \operatorname{cosec} 45^\circ = 0.15052, \quad \log_{10} \cos 30^\circ = \bar{1}.93753,$$

$$\log(5 \tan 60^\circ) = 0.93753.$$

鋭角ノ三角函数

$$1. \sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5},$$

$$\tan A = \frac{4}{3}, \cot A = \frac{3}{4}, \sec A = \frac{5}{3}, \operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}.$$

$$2. 0.3088. \quad 3. \frac{115}{128}. \quad 4. 0. \quad 5. 7.26.$$

$$19. 1. \quad 20. 1. \quad 21. 1. \quad 22. 2.$$

直角三角形ノ解法及ビ應用

1. 約 $2^R.165$, $2^R.5$. 2. 5 寸.
3. $\tan EAF = \frac{3}{11}$, $\tan FAC = \frac{1}{5}$.
4. $a = 18^R.928$, $b = 16^R.971$, $c = 13^R.856$.
5. $416^R.12$. 6. 約 $633^R.97$, $896^R.57$.
7. $2a \sin \frac{A}{2}$ 尺. 8. 30 間. 9. $a \cos A$ 尺.
10. $17^R.32$. 11. 約 $173^R.2$. 12. 約 $81^R.65$,
- 或ハ $141^R.42$. 13. 約 $7^R.0711$. 15. $4(\cot \alpha \tan \beta - 1)$ 哩.
16. $1639^R.23$ [強]. 17. 約 $174^R.6$. 18. 約 $39^R.4$.
19. $\frac{n \tan A \tan B}{\tan B - \tan A}$ 尺. 20. 約 $86^R.6$. 21. 約 $129^R.9$.
22. 約 1585 米. 23. 120 尺. 24. $\frac{h \cot \alpha}{\cot \alpha - \cot \beta}$ 尺.
25. $\frac{l}{\sqrt{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha}}$ 尺. 26. 塔ノ高サハ $120\sqrt{3}$ 尺,
- 太陽ノ仰角ハ 60° . 27. 13011 尺. 28. $3733^R.5$.
30. 約 $734^R.8$. 31. 東西ノ道路ヨリ $802^R.5$ [約].
- 南北ノ道路ヨリ $552^R.8$ [約]. 32. 南 30° 西.

一般角ノ三角函数

1. $\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$, $\tan A = \pm \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$, 等.
2. $\sin \theta = \pm \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$, $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$, 等.
3. $\sin A = -\frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$, $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$, 等.
4. $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- $\sin(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-225^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan(-225^\circ) = -1$.
5. -1 . 6. $\sin A = \pm \frac{8}{17}$, $\cos A = \pm \frac{15}{17}$.
7. $\pm \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 8. ± 2 . 10. $\sec A \div 2.41$,
- $\cos A \div 0.41$, $\sin A \div \pm 0.91$, $\tan A \div \pm 2.19$, $\cot A \div \pm 0.45$,
- $\operatorname{cosec} A \div \pm 1.09$. 11. $\pm \frac{n \sin \theta}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \cos^2 \theta)}}$.
12. 0. 13. $\operatorname{cosec} A$. 14. 0.
16. $\cos A = 0$ ナルトキ, 最大値ハ 1, $A = (2n + 1) \cdot 90^\circ$.
- 複角ノ三角函数 1. $\pm \frac{980}{2501}$, 或ハ $\pm \frac{100}{2501}$.
2. $-\frac{56}{33}$. 4. 90° . 6. 90° . 7. 0.
8. (1) 0. (2) $\frac{1}{4}$. 9. $-\frac{1}{2}$. 10. $\pm \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.
11. $4 \sin 2\theta \cos^2 \frac{\theta}{2}$. 12. 1.93 13. $(3m + 1)60^\circ$.
14. $\frac{b}{c - a}$. 52. $\cos A$. 53. 0.
54. (1) $\sin A$. (2) 0. 55. $\sin^2 A$.

56. (1) 0. (2) $\operatorname{cosec} 2\alpha$. 57. $\tan 3\theta$. 58. $-\sin(A-B)$.

倍角分角ノ三角函数 1. $\frac{4}{5}$. 2. $\frac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}$.

3. $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$, $\tan\theta = \pm\frac{3}{4}$, $\sin 2\theta = \pm\frac{24}{25}$,

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 及 $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. 4. $\cos A = \pm\frac{4}{5}$,

$\sin\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{A}{2} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\tan\frac{A}{2} = \pm\frac{1}{3}$.

5. $\sin 157^\circ.5 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos 157^\circ.5 = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

6. $\frac{1}{2}$. 7. $\frac{4ab(a-b)}{(a-b)^2+4a^2b^2}$. 8. $\frac{17}{25}$.

9. $\sin 2\theta = \frac{9}{16}$, $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{115}{128}$. 10. $\frac{7}{25}$.

11. (1) $-\infty$. (2) $1\frac{2}{3}$. 12. $4\cos^2\frac{A-B}{2}$.

13. $a\cot\frac{\theta}{2}$. 14. $16a^5-20a^3+5a$.

15. $5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$. 16. $\frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{4\cos^3 A - 3\cos A}$.

17. (1) 約 0.92388. (2) 約 -0.19509. 19. $\tan A, \sqrt{2}-1$.

20. $\tan 7^\circ.5 = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$, $n.180^\circ+A$.

22. 1. 23. $\frac{3}{2}$. 24. $4\sin A$.

三角形ノ解法

1. 約 $18^\circ.25$.

2. $32^\circ.79$, $454^\circ.7$. 3. 約 $29^\circ.27$.

4. $125^\circ 0' 44''$, $20^\circ 37' 16''$. 5. $124^\circ 48' 59''$, $33^\circ 11' 1''$.

6. 1.63400 . 7. $104^\circ 30'$, $35^\circ 30'$. 8. 90° .

9. 7.54, 或ハ 1.46. 10. 9.6980726. 11. 約 173.21.

12. 10.67. 13. $B=90^\circ$, $C=60^\circ$, $A=30^\circ$.

14. 約 $6^\circ.928$. 15. $A=36^\circ 52' 12''$, $B=53^\circ 7' 48''$, $c=1570.8$.

16. $A+B=90^\circ$, $\cos\frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{c\sqrt{2}}$, $a=c\sin A$, $b=c\sin B$.

17. $A=C=30^\circ$, $B=120^\circ$. 18. $A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$.

19. 120° . 21. $\frac{20}{21}$.

三角形解法ノ應用

1. $2\cos 20^\circ:1$. 3. $\frac{2mn}{m^2-n^2}$.

4. 約 $10^\circ.58$, 約 $17^\circ.44$. 5. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$,

$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$. 7. $\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos ACD}$,

但 $\hat{ACD} = \cos^{-1}\frac{b^2+c^2-q^2}{2bc} - \cos^{-1}\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp}$.

8. $2^\circ.0706$. 10. 約 215230 平方米. 11. $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

13. $2r\cos\alpha$, $5^\circ.214$. 14. 1.02. 15. 約 $3^\circ.642$.

16. $70^\circ 32'$. 17. 正弦 $= \frac{1}{4}\sqrt{14}$, 餘弦 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$,

正切 $= \sqrt{7}$, $69^\circ 17'$. 18. $109^\circ.81$.

19. $\frac{h\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺. 20. 108 尺. 21. $\frac{h(a^2+b^2)}{a^2-h^2}$.

22. 約 $11^\circ.7$. 23. $23^\circ.11$. 24. $50^\circ 11' 39''.2$.

25. $603^\circ.36$. 26. $330^\circ.7$. 27. $4137^\circ.84$.

28. 約 $591^\circ.5$. 30. $\frac{a\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$ 尺.

31. $h\sqrt{\cot^2\theta + \cot^2\theta' - \cot\theta\cot\theta'}$. 32. $72^\circ.7$.

33. 24 米. 34. $35^\circ.248$. 35. $36^\circ.74$.

36. $AB = \frac{d\cot\delta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(\beta+\gamma+\delta)}$,

$$BC = \frac{d \cot \delta \sin \beta}{\cos(\beta + \gamma + \delta) \cos(\gamma + \delta)}, \quad CD = \frac{d \sin \gamma}{\sin \delta \cos(\gamma + \delta)},$$

$$AB = 27*3, \quad BC = 15*7, \quad CD = 11*5. \quad 37. \quad \text{約 } 328 \text{ 尺.}$$

方程式 1. 75° . 2. 30° . 3. 70° .

4. 90° . 5. $90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$. 6. $30^\circ, 90^\circ, 15^\circ$.

7. $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$. 8. $30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

9. $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$. 10. $45^\circ, 120^\circ, 135^\circ$. 11. 840° .

12. $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan \theta = 1$. 13. $\frac{3}{5}$.

14. $\frac{1}{2}, 1$. 15. $\frac{1}{5} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right), 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

16. $\frac{1}{2}n\pi$, 或 $\wedge 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$. 17. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$.

18. $n\pi$. 19. $n\pi$. 20. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

21. $n\pi$, 或 $\wedge \frac{\pi}{18} \{ 6n + (-1)^n \}$. 22. $\frac{1}{3}n\pi, \frac{1}{2}n\pi \pm \frac{1}{12}\pi$.

23. $n\frac{\pi}{3}, n\pi, n\frac{\pi}{2}$. 24. $n\pi - \frac{\pi}{4}$. 25. $n \times 360^\circ \pm 60^\circ 1'$.

26. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 27. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, 或 $\wedge \sin^{-1} \frac{1}{3}$.

28. $2\pi \left(n \pm \frac{1}{3} \right)$. 29. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 或 $\wedge 2n\pi - \frac{\pi}{6}$.

30. $\frac{2n+1}{8}\pi$, 或 $\wedge n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

31. $n\pi + \frac{5}{12}\pi$, 或 $\wedge n\pi + \frac{\pi}{12}$.

32. $n \cdot 180^\circ - 45^\circ + (-1)^n \cdot 30^\circ$. 33. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

34. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$. 35. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, 或 $\wedge 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$. 36. 45° .

251頁～254頁
欠

文 部 省 檢 定 濟

大正三年十二月十一日中學校數學科用

東京市日本橋區新右衛門町

株會
式社

國定教科書共同販賣所

東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

株式會社 秀英舍第一工場

東京市牛込區市々谷加賀町一丁目十二番地

中田福三郎

大橋新太郎

代表者	
-----	--

東京市日本橋區新右衛門町十六番地

株式會社 國定教科書共同販賣所

東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三番地

長澤龜之助

定價金五拾八錢

新三角法教科書

所有權著作

著者

發行者

印刷者

印刷所

大正三年十月六日再訂正版發行	大正四年二月十六日再訂正版發行	明治四十四年十二月十三日訂正再版印刷	明治四十五年二月十三日訂正再版印刷	明治四十四年十二月十三日訂正再版印刷	明治四十四年十二月八日印刷
----------------	-----------------	--------------------	-------------------	--------------------	---------------

著者

發行者

印刷者

印刷所

長澤龜之助

國立教科書共同販賣所

者

大橋新太郎

中田福三郎

市牛込區市々谷加賀町一丁目十二番地

株式會社 秀英舍第一工場

市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

定教科書共同販賣所

株會
式社

東京市日本橋區新右衛門町

發行所

長崎栄三氏寄贈編入乙

書 科 教 新 學 數

纂 編 助 之 龜 澤 長

新 算 術 教 科 書		新 代 數 學 教 科 書	新 幾 何 學 教 科 書	新 三 角 法 教 科 書	新 對 數 表	算 術、代 數、幾 何、三 角 學 補 習 新 教 科 書	問 題 組 織 補 習
全 一 冊	二 上 冊 下	平 立 各 一 冊	全 一 冊	全 一 冊	全 一 冊	全 一 冊	各 一 冊

所 行 發

社 會 式 株

所 賣 販 同 共 書 科 教 定 國

1991.9.7
E.N

