K220.43
44a

改訂

中等教育
立體幾何學教科書

陸軍大學校教授
宮本藤吉 編纂

東京
興文社

緒　　言

本書ハ予ガ編纂セル中等教育平面幾何學教科書ノ續編ニシテ其編纂ノ主旨ハ該書ト全ク同一ナリ.

而シテ本版モ亦予ガ先年陸軍中央幼年學校ノ爲メニ編纂セシ同校用教科書ヲ基トシ同校ノ教官諸君ノ實驗ヨリ來レル忠告ヲ參酌シテ成リタル第一版ヲ更ニ六年間幾多ノ中等學校ニ於テ實驗シタル結果ナリ.

中等教育ニ於ケル立體幾何學ノ教授時數ハ極メテ僅小ナルガ故ニ其教科書タル勢ヒ此學ノ大綱ヲ說述スルニ止マルハ已ムヲ得ザルコトナリ. 然レドモ簡ヲ主トスルノ餘リ明ヲ失スルニ陷レルハ現行教科書ノ通弊ナリ. 予ハ此通弊ニ陷ラザランガ爲メ少カラザル苦心ヲ爲セリ.

本書ニ關シテモ亦批評,忠告等ニ吝ナラザランコトヲ希望ス.

明治四十三年十一月,東京ニ於テ

宮木藤吉　謹識.

目次

終

中等教育

立體幾何學教科書.

第一章　緒說.

1.　定義.　面上ノ任意ノ二點ヲ過グル直線ガ全ク其上ニ在ルトキハ其面ヲ平面ト云フ.

2.　定義.　立體幾何學トハ幾何學ノ一科ニシテ同一ノ平面上ニ在ラザル圖形ヲ論ズル學ナリ.

注意.　立體幾何學ハ又之ヲ空間幾何學トモ云フ.

第二章 平面.

第一節 一ツノ平面.

3. 平面ヲ示スニハ通常其上ニ在ル平行四角形ヲ以テシ之ニ一ツ或ハ二ツノ字母ヲ記シ之ヲ平面P或ハ平面PQ等ト呼ブ.

4. 公理. 一直線上ニ在ラザル三點ヲ含ム平面ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル.

注意. 此公理ハ之ヲ次ノ如ク略述スルコトアリ

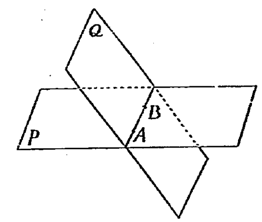
平面ハ一直線上ニ在ラザル三點ニテ決定セラル.

5. 公法. 一直線上ニ在ラザル與ヘラレタル三點ヲ含ム平面ヲ作ルコト.

6. 定理一. 平面ハ一直線及ビ其上ニ在ラザル一點,相交ル二直線,或ハ二平行線ニテ決定セラル.

定理二. 二平行線ノ一ト他ノ線上ノ一點トヲ含ム平面ハ全ク第二ノ線ヲ含ム.

7. 定理. 二平面ノ交線ハ一直線ナリ.



二平面P, Qノ交線ハ一直線ナリ.

(證) 交線上ニ任意ノ二點A, Bヲ取リA, Bヲ過グル直線ヲ引クトキハ此直線ハ全クP, Qノ上ニ在リ(1).

又P, Qハ直線ABノ上ニ在ラザル點ヲ含ムコトナシ. ∵若シコレアラバP, Qハ一平面トナルベケレバナリ(6ノ定理1).

∴P, Qノ交線ハ一直線ABナリ.

問題.

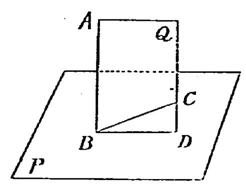
(1) 二ツ宛三點ニテ相交ル三直線ハ同一ノ平面上ニ在ルコトヲ證セヨ.

(2) 同一ノ平面上ニ在ラズシテ二ツ宛相交ル三直線ハ同一ノ點ヲ過グルコトヲ證セヨ.

第二節 相交ル直線ト平面.

8. 定義. 平面ニ交ル直線ガ其交點ヲ過グル面上ノ任意ノ直線ニ垂線ナルトキハ其直線ハ平面ニ垂線ナリト云ヒ, 交點ヲ垂線ノ足ト云フ. 又此場合ニ於テ平面ハ直線ニ垂直ナリト云フ.

9. 定理. 平面ヘノ垂線ノ足ヲ過ギテ此線ニ引ケル垂線ハ其面上ニ在リ.



平面Pヘノ垂線ABノ足ヲBトシ BC⊥AB トスレバ BC ハ P ノ上ニ在リ.

(證) 若シ BC ガ P ノ上ニ在ラズト假定セバ AB, BC ヲ含ム平面 Q ヲ作リ P トノ交線ヲ BD トスベシ.

然ルトキハ AB⊥P 且ツ BD ハ P ノ上ニアルヲ以テ

BD⊥AB (8).

然ルニ BC⊥AB (假設).

∴ Q ノ上ニ於テ AB ニ垂線ナル二直線 BC, BD ヲ

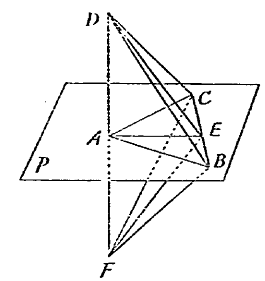
得.

是レ背理ナリ.

∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴ BC ハ P ノ上ニ在リ.

10. 定理. 二直線ノ交點ヲ過ギテ其二線ニ垂線ナル直線ハ其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ.



AD ガ AB, AC ニ垂線ナルトキハ AD ハ AB, AC ヲ含ム平面 P ニ垂線ナリ.

(證) A ヲ過ギテ P ノ上ニ任意ノ直線 AE ヲ引ケ.

AB, AC, AE ニ交ル任意ノ直線ヲ引キ其交點ヲ夫々 B, C, E トス.

AD ノ上ニ任意ノ點 D ヲ取リ DA ノ引長部上ニ DA ト等シク AF ヲ取リ D, F ヲ B, C, E ニ連ネヨ.

AB, AC ハ DF ノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$BD=BF,\quad CD=CF.$

$\therefore\quad \triangle BCD \equiv \triangle BCF,\quad C\hat{B}D = C\hat{B}F.$

$\therefore\ \triangle BED \equiv \triangle BEF,\quad ED=EF.$

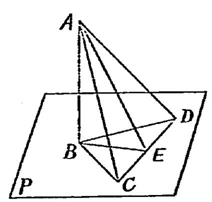
然ルニ $AD=AF.$

$\therefore\ AD\perp AE.$

$\therefore\ AD\perp P$ (8).

系. 與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル點ヲ過ギテ其線ニ垂直ナル平面ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル(9ヲ用ヒヨ).

11. 定理. 直線ガ平面ニ垂線ナルトキハ其線上ノ任意ノ點ト其足ヨリ面上ニ在ル任意ノ直線ニ引ケル垂線ノ足トヲ連ネタル直線ハ此任意ノ直線ニ垂線ナリ.



$AB\perp P,\ BE\perp CD$ (P ノ上ノ)ナルトキハ $AE\perp CD$ ナリ.

(證) EC, ED ヲ任意ノ等シキ長サニ取リ A, B ヲ C, D ニ連ヌルトキハ BE ハ CD ノ垂直二等分線ナルヲ以テ $BC=BD.$

$\therefore\ \triangle ABC,\ \triangle ABD$ ハ二邊及ビ其夾角夫々相等シキヲ以テ全等ナリ.

$\therefore\ AC=AD.$

然ルニ $EC=ED$ (作圖).

$\therefore\ AE\perp CD.$

注意. 此定理ヲ三垂線ノ定理ト云フ.

系一. 上圖ニ於テ $AB\perp P,\ AE\perp CD$ ナルトキハ $BE\perp CD$ ナリ.

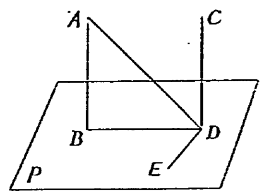
系二. 上圖ニ於テ $AE\perp CD\perp EB\perp AB$ ナルトキハ $AB\perp P$ ナリ.

系三. 與ヘラレタル平面外ノ與ヘラレタル點ヲ過ギテ其面ニ垂線ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル(二ツアリトスレバ背理ナルコトヲ論ゼヨ).

系四. 與ヘラレタル平面上ノ與ヘラレタル點ヲ過ギテ其面ニ垂線ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル.

12. 定理. 一平面ニ垂線ナル二直線ハ相平行ス.

$AB\perp P\perp CD$ ナルトキハ $AB\parallel CD$ ナリ.



(證) 二垂線ノ足 B, D ヲ連ヌルトキハ $AB \perp P$ ナルヲ以テ $AB \perp BD$ (8).

P ノ上ニ BD ニ垂線 DE ヲ引キ AB 上ノ任意ノ點 A ト D トヲ連ヌルトキハ三垂線ノ定理ニ由リ

$AD \perp DE$.

然ルニ $CD \perp P$ ナルヲ以テ $CD \perp DE$ (8).

∴ DB, DA, DC ハ皆 D ヲ過ギテ DE ニ垂直ナル一平面上ニ在リ (9).

隨ツテ AB モ亦此面上ニ在リ (1).

∴ AB, CD ハ一平面上ニ在リ.

且ツ $CD \perp P$ ナルヲ以テ亦 $CD \perp BD$ (8).

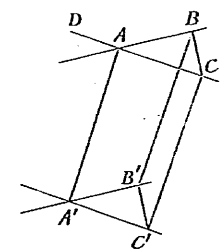
∴ $AB \parallel CD$.

系一. 平面ヘノ垂線ニ平行セル直線ハ亦其面ニ垂線ナリ (後ノ線上ノ一點ヨリ面ニ引ケル垂線ガ後ノ線ト一致スルコトヲ證セヨ).

系二. 同一ノ直線ニ平行セル二直線ハ相平行ス (一線ニ垂直ナル平面ヲ作リテ考ヘヨ).

系三. 與ヘラレタル直線外ノ與ヘラレタル點ヲ過ギテ其線ニ垂直ナル平面ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル. (系一及ビ 10 ノ系ヲ參考セヨ).

13. 定理. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ平行ナルトキハ此等ノ二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲ成ス.



$AB \parallel A'B'$, $DC \parallel A'C'$ ナルトキハ $B\hat{A}C = B'\hat{A'}C'$, $B\hat{A}D + B'\hat{A'}C' = 2\hat{R}$ ナリ.

(證) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ト取リ AA', BB', CC' ヲ引クトキハ AB', AC' ハ共ニ平行四角形ナルヲ以テ

$AA' \# BB'$, $AA' \# CC'$ ($\#$ ハ平行ニシテ等長ナルコトヲ示ス).

∴ $BB' \# CC'$ (公理及ビ 12 ノ系 2).

∴ BC, B'C' ヲ引クトキハ BC' モ亦平行四角形トナリ $BC = B'C'$.

∴ △ABC, △A'B'C' ハ三邊夫々相等シキヲ以テ全等ナリ.

∴ $B\widehat{A}C=B'\widehat{A'}C'$, 隨ツテ $B\widehat{A}D+B'\widehat{A'}C'=2\widehat{R}$.

注意. 空間ニ在ル二直線ノ相互ノ位置ハ之ヲ次ノ二ツニ大別スルコトヲ得

第一. 二ツガ一平面上ニ在ルトキ(即チ相交ルカ或ハ平行スルトキ).

第二. 二ツガ一平面上ニ在ラザルトキ).

定義. 一平面上ニ在ラザル二直線ノ成ス角トハ空間內ノ一點ヲ過ギテ其二線ニ平行スルカ或ハ一線ニ一致シ他線ニ平行スル二直線ノ成ス角ノコトナリ.

而シテ此角若シ直角ナルトキハ始メノ二線ハ互ニ垂線或ハ垂直ナリト云フ.

是迄用ヒ來リタル垂線ハ畢竟コレノ特別ナル場合ナリ.

注意. 第12條ノ系二及ビ本條ノ定理ニ由リ上ノ定義中ニ云ヘル空間內ノ一點ハ之ヲ如何ナル位置ニ取ルモ二線ノ成ス角ニ變動ナキコトヲ知ル.

系一. 平面ヘノ垂線ト其面上ノ任意ノ直線トノ成ス角ハ直角ナリ.

系二. 相交ル二直線ニ垂線ナル任意ノ直線ハ其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ.

(是レ第10條ノ定理ヲ擴張シタルモノニシテ其用甚ダ廣シ).

14. 定義. 直線ガ平面ニ交リ且ツ之ニ垂線ナラザルトキハ其線ト面トハ互ニ斜ナリト云ヒ,交點ヲ斜線ノ足ト云フ.

定理一. 平面外ノ一點ヨリ之ニ諸直線ヲ引ケバ

第一. 垂線ハ最短ナリ.

第二. 垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル二斜線ハ相等シ.

第三. 垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ小ナル距離ニ足ヲ有スルモノヨリモ大ナリ.

定義. 點ト平面トノ距離トハ其點ト之ヨリ其面ニ引ケル垂線ノ足トノ距離ヲ云フ.

定理二. 定理一ノ逆ハ眞ナリ.

定理三. 平面外ノ一點ヨリ之ニ與ヘラレタル長サノ斜線ヲ引クトキハ其足ノ軌跡ハ一圓周ナリ.

問題.

(1) 與ヘラレタル二點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

(2) 一直線上ニ在ラザル三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

(3) 捩四角形(總ベテノ邊ガ同一ノ平面上ニ在ルコトヲ得ザル四角形)ノ對邊ノ中點ヲ連ネタル直線ハ各々他ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

第三節 平行スル直線ト平面.

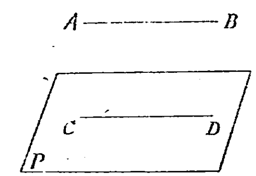
15. 定義. 何程延長スルモ決シテ公點ヲ有セザル直線ト平面トハ相平行スト云フ.

注意. 直線ト平面トノ相互ノ位置ハ之ヲ次ノ二ツニ大別スルコトヲ得

第一. 二ツガ公點ヲ有スルトキ(即チ直線ガ平面上ニ在ルトキ或ハ平面ニ交ルトキ).

第二. 二ツガ相平行スルトキ.

16. 定理. 二平行線ノ一ツヲ含ミテ他ノ線ヲ含マザル平面ハ第二ノ線ニ平行ナリ.



AB ∥ CD 且ツ P ガ CD ヲ含ミテ AB ヲ含マザルトキハ P ∥ AB ナリ.

(證) 若シ P ト AB トガ公點ヲ有スト假定セバ P ハ AB ヲ含ムベシ(6 ノ定理 2).

是レ假設ニ戾ル.

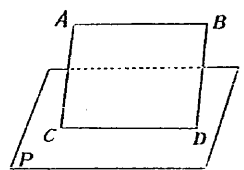
∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴ P ト AB トハ公點ヲ有セズ.

∴ P ∥ AB (15).

17. 定理. 平面ト之ニ平行セル直線ヲ含ム平面トノ交線ハ其直線ニ平行ナリ.

P ∥ AB トシ AB ヲ含ム平面ト P トノ交線ヲ CD トスルトキハ CD ∥ AB ナリ.



(證) 若シCD∥ABナラズトモ假定セバ此二線ハ平面ADノ上ニ在ルヲ以テ必ズ相交ルベシ.

然ルトキハPトABトガ公點ヲ有スルコトトナリテ假設ニ戻ル.

∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴ CD∥AB.

系一. 上ノ場合ニ於テABヲ含ミPニ交ル他ノ平面ヲ作ルトキハ其交線ハCDニ平行ナリ.

系二. 相平行セル直線ト平面トノ間ニ夾マレタル平行線ハ等長ナリ.

定義. 相平行セル直線ト平面トノ距離トハ其線上ノ任意ノ點ト其面トノ距離ヲ云フ.

系三. 平面上ノ一點ヨリ其面ニ平行セル直線ニ平行線ヲ引ケバ此線ハ其面上ニ在リ.

系四. 二平行線ノ一ツニ交ル平面ハ他ノ線ニモ交ル.

系五. 一直線ニ平行セル二平面ノ交線ハ其直線ニ平行ス.

系六. 一平面上ニ在ラザル與ヘラレタル二直線ノ一ツヲ含ミテ他ノ線ニ平行スル平面ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル.

問　　題.

(1) 二平行線ヲ唯一ツ宛含メル二平面ノ交線ハ其二線ニ平行ナルコトヲ證セヨ.

(2) 與ヘラレタル一點ヲ過ギテ一平面上ニ在ラザル與ヘラレタル二直線ニ交ルベキ直線ヲ引クコトヲ求ム. 但シ其點ト二線ノ任意ノ一ツトヲ含ム平面ハ他ノ線ニ平行ナラズトス.

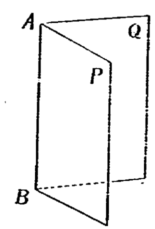
此ノ如キ直線ハ幾個アルカ.

(3) 與ヘラレタル一點ヲ過ギテ一平面上ニ在ラザル與ヘラレタル二直線ニ平行スベキ平面ヲ作ルコトヲ求ム. 但シ其點ト二線トノ位置ノ關係ハ前問ノ如シトス.

此ノ如キ平面ハ幾個アルカ.

第四節　相交ル二ツノ平面

18. 定義. 交線ニテ終レル二平面ノ間ノ開キヲ其二面ノ成ス或ハ夾ム二面角ト云ヒ,其交線及ビ二面ヲ夫々二面角ノ稜及ビ面ト云フ.



注意. 二直線ノ成ス角ト同樣ニ二面角ニ就キテモ亦共軛二面角,優二面角,及ビ劣二面角等ノ名稱アリ. 而シテ此後單ニ二面角ト稱スルハ劣二面角ノ意ナリト知ルベシ.

圖ニ於ケル二平面P, Qノ成ス二面角ハ之ヲ二面角PABQ或ハ二面角ABト呼ブ.

19. 定義. 二面角ノ稜上ノ一點ヨリ稜ニ垂線ニ各面上ニ引ケル二直線ノ成ス角ヲ其二面角ノ平面角ト云フ.

注意. 二面角ノ平面角ノ大サハ稜上ニ取リタル點ノ位置ニ關係セズ. 又稜ニ垂直ナル平面ト二面トノ交線ノ夾角ハ其二面角ノ平面角トナル.

定理一. 相等シキ二面角ノ平面角ハ相等シク又此逆モ眞ナリ.

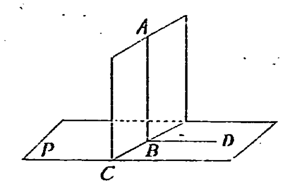
定理二. 二面角ハ其平面角ニ比例ス.

注意. 二面角ノ大サハ其平面角ノ大サニテ測ルモノトス.

定理三. 二平面ガ相交ルトキ生ズル隣二面角ハ互ニ補角ヲナシ對稜二面角(對頂角ニ相應ス)ハ相等シ.

定義. 平面角ガ直角ナル二面角ヲ直二面角ト云ヒ,其二面ハ互ニ垂直ナリト云フ.

20. 定理. 平面ヘノ垂線ヲ含ム總ベテノ平面ハ其面ニ垂直ナリ.



AB⊥PトシABヲ含ム平面ヲACトスレバAC⊥Pナリ.

(證) 交線BCニ垂線ニPノ上ニ直線BDヲ引クトキハAB⊥Pナルヲ以テ $\widehat{ABC}=\widehat{R}$ (8).

∴ $\widehat{ABD}$ ハ二面角 ABCD ノ平面角ナリ (19).

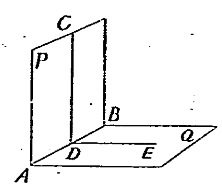
然ルニ $AB \perp P$ ナルヲ以テ $\widehat{ABD} = R$ (8).

∴　$AC \perp P$ (19).

系. 一點ニテ相交ル三直線ガ二ツ宛互ニ垂線ナルトキハ其各二線ニテ決定セラル、三平面ハ互ニ垂直ナリ.

作圖題. 與ヘラレタル直線ヲ含ミ與ヘラレタル平面ニ垂直ナル平面ヲ作ルコトヲ求ム.

21. 定理. 互ニ垂直ナル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ其交線ニ垂線ナル直線ハ他ノ面ニモ垂線ナリ.



$P \perp Q$ トシ P ノ上ニ在リテ交線 AB ニ垂線ナル直線ヲ CD トスレバ $CD \perp Q$ ナリ.

(證) AB ニ垂線ニ Q ノ上ニ直線 DE ヲ引クトキハ $\widehat{CDE}$ ハ二面角 PABQ ノ平面角ナリ (19).

然ルニ二面角 $PABQ = \widehat{R}$ (假設).

∴　$\widehat{CDE} = \widehat{R}$ (19).

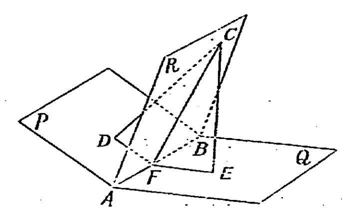
然ルニ　$\widehat{CDA} = \widehat{R}$ (假設).

∴　$CD \perp Q$ (10).

系一. 互ニ垂直ナル二平面ノ一ツノ上ノ一點ヨリ他ノ面ニ引ケル垂線ハ始メノ面上ニ在リ.

系二. 二平面ニ垂直ナル平面ハ其二面ノ交線ニモ垂直ナリ.

22. 定理. 二面角ノ內ニ在リテ其二面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二面角ノ二等分面ナリ.



二面角 PABQ ノ內ニ在リテ其二面 P, Q ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二等分面 R ナリ.

(證) **第一.** P, Q ヨリ點 C ニ到ル距離 DC, EC ヲ相等シトスレバ C ハ R ノ上ニ在リ.

∵ CD, CE ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ此面ハ P, Q ニ垂直ニシテ (20), 隨ツテ AB ニモ垂直ナリ (21 ノ系 2).

今此面ト AB トノ交點ヲ F トシ CF ヲ引ケバ

$\triangle CDF \equiv \triangle CEF$　(∵ CF ハ共通, CD=CE,

$\widehat{CDF}=\widehat{CEF}=\widehat{R}$).

∴ $\widehat{CFD}=\widehat{CFE}$.

然ルニ平面 DE⊥AB ナルヲ以テ

二面角 CABP=二面角 CABQ (19 ノ定理 1).

∴ C ハ R ノ上ニ在リ.

第二. P, Q ヨリ R ノ上ノ點 C ニ到ル距離 DC, EC ハ相等シ.

∵ CD, CE ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ

△CDF≡△CEF (∵ CF ハ共通, $\widehat{CDF}=\widehat{CEF}=\widehat{R}$, $\widehat{CFD}=\widehat{CFE}$).

∴ DC=EC.

∴ 軌跡ハ R ナリ.

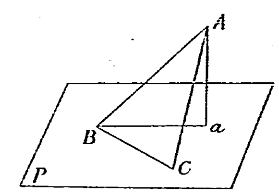
系. 相交ル二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ互ニ垂直ナル二平面ナリ.

23. 定義. 一點ヨリ一平面ニ引ケル垂線ノ足ヲ其面上ニ於ケル其點ノ正射影(或ハ射影又ハ投影)ト云ヒ,垂線ヲ射線(或ハ投送線)ト云フ. 一平面上ニ於ケル一線ノ正射影トハ其線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ.

定理一. 平面ニ垂線ナラザル直線ノ其面上ニ於ケル正射影ハ其線上ノ二點ノ正射影ヲ過グル直線ナリ.

定理二. 直線ガ平面ニ平行スルトキハ其線ハ亦正射影ニモ平行ス.

24. 定理. 平面ニ斜ナル直線ガ其正射影ト成ス鋭角ハ其線ガ其足ヲ過ギテ面上ニ引ケル他ノ總ベテノ直線ト成ス角ヨリモ小ナリ.



P ノ上ニ於ケル AB ノ正射影ヲ aB トシ B ヲ過ギテ P ノ上ニ引ケル他ノ任意ノ直線ヲ BC トスレバ $\widehat{ABa}<\widehat{ABC}$ ナリ.

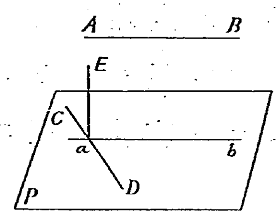
(證) AB 上ノ任意ノ點 A ノ射線 Aa ヲ引キ Ba ト等シク BC ヲ取リ AC ヲ引クトキハ △ABa, △ABC ニ於テ AB ハ共通, Ba=BC (作圖), Aa<AC (14 ノ定理 1).

∴ $\widehat{ABa}<\widehat{ABC}$.

定義. 直線ト之ニ斜ナル平面トノ成

ス或ハ夾ム角トハ其線ガ其面上ニ於ケル正射影ト成ス鋭角ノコトナリ.

25. **作圖題.** 一平面上ニ在ラザル與ヘラレタル二直線ニ垂線ニ交ル直線(公直交線ト云フ)ヲ引クコトヲ求ム.



一平面上ニ在ラザル二直線 AB, CD ニ公直交線ヲ引クコトヲ求ム.

(作法) CD ヲ含ミ AB ニ平行スル平面 P ヲ作リ(17 ノ系 6), P ノ上ニ於ケル AB ノ正射影 ab ヲ作リ CD トノ交點ヲ a トス[∵ $ab \parallel$ AB ナルヲ以テ(23 ノ定理 2), ab ガ CD ト一致スルカ或ハ平行スルトセバ AB, CD ハ相平行シ隨ツテ一平面上ニアルニ至ルベケレバナリ].

a ヨリ P ニ垂線 aE ヲ引ケ.

aE ハ求ムル所ノモノナリ.

(證) aE⊥P ナルヲ以テ aE ハ CD, ab ト直交ス(8).

又 a ハ AB ノ正射影上ノ點ナルヲ以テ aE ハ AB ニ交ル(23 ノ定理 1).

然ルニ AB $\parallel ab$ (23 ノ定理 2).

∴ aE ハ亦 AB ト直交ス.

∴ aE ハ公直交線ナリ.

注意. 上ノ場合ニ於テ公直交線ハ唯一ツニ限リ且ツ AB, CD 間ノ最短線ナリ.

定義. 一平面上ニ在ラザル二直線ノ距離トハ此二線ノ間ニ夾マレタル公直交線ノ長サヲ云フ.

問　　題.

(1) 二面角内ノ一點ヨリ其二面ニ引ケル垂線ノ夾角ハ其平面角ト補角ヲ成スコトヲ證セヨ.

(2) 相交ル二直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

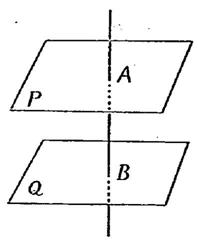
(3) 相交ル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ其交線ニ垂線ナル直線ガ他ノ面ト成ス所ノ角ハ交線ニ斜ナルモノノ成ス角ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ.

第五節　平行スル二ツノ平面.

26. **定義.** 何程延長スルモ決シテ公點ヲ有セザル二平面ハ相平行スト云フ.

定理. 平面上ノ直線ハ此面ニ平行セル平面ニ平行ス.

27. 定理. 同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ハ相平行ス.



$P \perp AB \perp Q$ ナルトキハ $P \parallel Q$ ナリ.

(證) 若シ P, Q ガ公點ヲ有スト假定セバ其公點ヲ過ギテ AB ニ垂直ナル二平面 P, Q ヲ作リ得タルコトヽナルベシ.

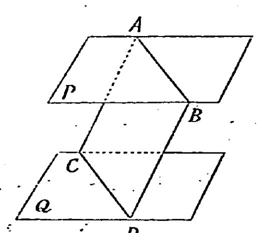
是レ背理ナリ (12ノ系3).

∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴ P, Q ハ公點ヲ有セズ.

∴ $P \parallel Q$ (26).

28. 定理. 一平面ト平行二平面トノ交線ハ相平行ス.



$P \parallel Q$ トシ平面 AD ト P, Q トノ交線ヲ夫々 AB, CD トスレバ $AB \parallel CD$ ナリ.

(證) 若シ AB, CD ガ相平行セズト假定セバ此二線ハ一平面上ニ在ルヲ以テ一致スルカ或ハ相交ルベシ.

然ルトキハ P, Q ガ公點ヲ有スルコトヽナル.

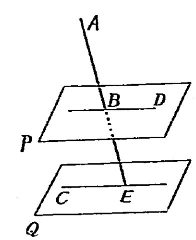
是レ假設ニ戻ル.

∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴ $AB \parallel CD$.

系. 平行二平面ノ間ニ夾マレタル平行線ハ等長ナリ.

29. 定理. 平行二平面ノ一ツニ交ル直線ハ必ズ他ノ面ニモ交ル.



$P \parallel Q$ ナルトキハ P ニ交ル AB ハ必ズ Q ニモ交ル.

(證) Q ノ上ノ點 C ト AB トヲ含ム平面ヲ作リ P, Q トノ交線ヲ夫々 BD, CE トスレバ $BD \parallel CE$ (28).

∴ BD ニ交ル AB ハ必ズ CE ニモ交ル. 其交點ヲ E トス.

B ハ Q ノ上ニ在ラザルヲ以テ Q ハ AE ヲ含マズ.

∴ AE ハ Q ニ交ル.

系一. 平行二平面ノ一ツニ交ル平面ハ必ズ他ノ面ニモ交ル.

系二. 平行二平面ノ一ツノ上ノ一點ヲ過ギテ他ノ面ニ平行線ヲ引ケバ此線ハ始メノ面ノ上ニ在リ.

系三. 平行二平面ノ一ツニ垂線ナル直線ハ他ノ面ニモ垂線ナリ.

系四. 與ヘラレタル點ヲ過ギテ與ヘラレタル平面ニ平行スル平面ヲ作ルコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル.

系五. 相交ル二直線ガ一平面ニ平行ナレバ其二線ヲ含ム平面モ亦此面ニ平行ナリ.

定義. 平行二平面ノ距離トハ一面上ノ一點ト他ノ面トノ距離ナリ.

30. 定理一. 一平面ガ平行二平面ニ交ルトキ生ズル諸二面角ノ大サノ關係ハ一直線ガ平行二直線ニ交ルトキ生ズル諸角ノ大サノ關係ト同樣ナリ.

定理二. 一ツノ二面角ノ二面ガ夫々他ノ二面角ノ二面ニ平行スレバ此等ノ二面角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲ成ス.

定理三. 一ツノ二面角ノ二面ガ夫々他ノ二面角ノ二面ニ垂直ニシテ且ツ其二稜ガ相平行スレバ此等ノ二面角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲ成ス.

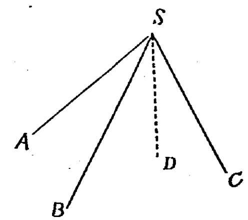
定理四. 同一ノ平面ニ平行セル二平面ハ相平行ス.

定理五. 平行三平面ノ間ニ夾マレタル二直線ノ對應部分ハ比例ヲナス.

第六節 多面角.

31. 定義. 三ツ以上ノ平面ガ一點ニテ相會シ空間ヲ二部ニ分ツトキハ此等ノ面ハ多面角(或ハ立體角)ヲ成ス或ハ夾ムト云ヒ,其點及ビ連續セル二面ノ交線ヲ夫々多面角ノ頂及ビ稜ト云ヒ,稜ノ間ニ在ル面ノ部分ヲ多面角ノ面ト云ヒ,連續セル二稜ノ成ス角ヲ多面角ノ平面角ト云フ.

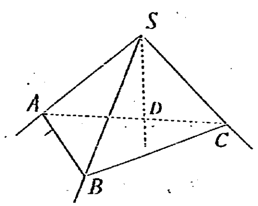
圖ノ如キ多面角ハ之ヲ多面角 S—ABCD ト記ス.



多面角ハ其面ノ數ニ隨ヒ之ヲ三面角,四面角等ト云フ.

多面角ヲ總ベテノ稜ニ交ル平面ニテ截ルトキ生ズル所ノ多角形ガ凸ナルトキハ其多面角ハ亦之ヲ凸ナリト云フ.

32. 定理. 三面角ノ二ツノ平面角ノ和ハ殘リノ平面角ヨリモ大ナリ.



三面角 S−ABC ニ於テ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{CSA}$ ナリ.

(證) $\widehat{ASB}\not<\widehat{CSA}$ ナルトキハ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{CSA}$ ナルコト明カナリ.

又 $\widehat{ASB}<\widehat{CSA}$ ナルトキハ CSA 内ニ $\widehat{ASD}$ ヲ $\widehat{ASB}$ ト等シク取リ SA, SC ト交ル任意ノ直線 AC ヲ引キ SD トノ交點ヲ D トシ SB ヲ SD ト等シク取リ AB, BC ヲ引ケ.

然ルトキハ $\triangle SAB\equiv\triangle SAD$ (∵ 二邊,夾角夫々相等シ).

∴ $AB=AD$.

然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ $AC-AB$ (即チ $AC-AD=DC$) $<BC$.

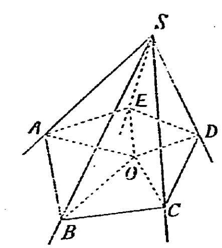
∴ $\triangle SBC$, $\triangle SDC$ ニ於テ $\widehat{BSC}>\widehat{DSC}$ (∵ $SB=SD$, SC ハ共通, $BC>DC$).

∴ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASD}+\widehat{DSC}$.

即チ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{CSA}$.

系. 三面角ノ二ツノ平面角ノ差ハ殘リノ平面角ヨリモ小ナリ.

33. 定理. 凸多面角ノ各平面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ.



凸多面角 S−ABCDE ニ於テ

$$\widehat{ASB}+\widehat{BSC}+\cdots\cdots+\widehat{ESA}<4\widehat{R}$$

ナリ.

(證) 總ベテノ稜ニ交ル平面ニ由リテ生ズル凸多角形ヲ ABCDE トス (31).

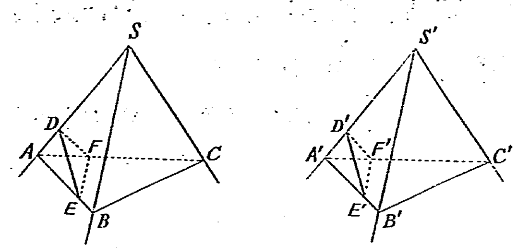
此多角形内ニ任意ノ點 O ヲ取リ O ト各角頂トヲ連ヌルトキハ $\triangle SAB$, $\triangle SBC$, ⋯⋯, $\triangle SEA$ ノ各角ノ總和ハ $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, ⋯⋯, $\triangle OEA$ ノ各角ノ總和ニ

等シ.

然ルニ $S\hat{B}A+S\hat{B}C>A\hat{B}C$, $S\hat{C}B+S\hat{C}D>B\hat{C}D$, ………,
$S\hat{A}E+S\hat{A}B>E\hat{A}B$ (32).

∴ $A\hat{S}B+B\hat{S}C+\cdots\cdots+E\hat{S}A<A\hat{O}B+B\hat{O}C+\cdots\cdots+E\hat{O}A$
(即チ $4\hat{R}$).

34. 定理. 一ツノ三面角ノ各平面角ガ夫々他ノ三面角ノ各平面角ニ等シク且ツ同ジ順序ニ在ルトキハ其兩三面角ハ全等ナリ.



$A\hat{S}B=A'\hat{S'}B'$, $B\hat{S}C=B'\hat{S'}C'$, $C\hat{S}A=C'\hat{S'}A'$ ナルトキハ三面角 S−ABC, S′−A′B′C′ ハ全等ナリ.

(證) SA, SB, SC, S′A′, S′B′, S′C′ ヲ任意ノ等シキ長サニ取リ △ABC, △A′B′C′ ヲ作ルトキハ △SAB≡△S′A′B′ 等(∵ 二邊,夾角夫々相等シ).

∴ AB=A′B′ 等.

∴ △ABC≡△A′B′C′, ∴ $B\hat{A}C=B'\hat{A'}C'$.

又 SA ノ上ニ一點 D ヲ取リ二面角 SA ノ平面角 EDF ヲ圖ノ如ク作リ EF ヲ引ケ.

S′A′ ノ上ニ A′D′=AD ト取リ上ト同樣ニ作圖セヨ.

然ルトキハ △ADE≡△A′D′E′ (∵ 二角,夾邊夫々相等シ).

∴ AE=A′E′, DE=D′E′.

同樣ニ AF=A′F′, DF=D′F′.

∴ △AEF≡△A′E′F′, ∴ EF=E′F′.

∴ △DEF≡△D′E′F′, ∴ $E\hat{D}F=E'\hat{D'}F'$.

∴ 二面角 SA=二面角 S′A′ (19 ノ定理 1).

∴ 兩三面角ハ全ク重ネ合ハスコトヲ得.

即チ全等ナリ.

注意. 上ノ場合ニ於テ各平面角ガ反對ノ順序ニアレバ各對應二面角ハ夫々相等シケレドモ其兩三面角ハ之ヲ重ネ合ハスコトヲ得ズ. 斯ノ如キ場合ニ於テ兩三面角ハ互ニ對稱ナリト云フ. 多面角ニ就キテモ同樣ナリ.

問　　題.

(1) 多面角ノ一平面角ハ殘リノ各平面角ノ和ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ.

(2) 三面角ノ各二面角ノ二等分面ハ同一ノ直線ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

(3) 三面角ノ各平面角ノ垂直二等分面ハ同一ノ直線ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

第三章　體.

第一節　角壔.

35. 定義. 多角形ニテ圍マレタル體ヲ多面體ト云ヒ,其多角形ヲ多面體ノ面ト云フ.

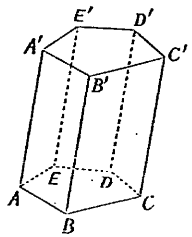
多面體ノ面ノ邊及ビ角頂ヲ夫々多面體ノ稜及ビ角頂ト云フ.

多面體ハ其面ノ數ニ隨ヒ之ヲ四面體,五面體等ト云フ.

多面體ノ對角線トハ同一ノ面上ニ在ラザル二角頂ヲ連ネタル直線ヲ云フ.

36. 定義. 同一ノ直線ニ平行セル面ト此線ニ交ル平行二面トニテ圍マレタル多面體ヲ角壔(或ハ角柱)ト云ヒ,其平行二面ヲ各々底面ト云ヒ,他ノ面ヲ各々傍面(或ハ側面)ト云フ. 底面ノ邊ニアラザル稜ヲ傍稜(或ハ側稜)ト云ヒ,二底面ノ距

離ヲ高サト云フ.



圖ノ如キ角壔ハ之ヲ角壔(ABCDE−A')ト記ス.

角壔ハ其底面ノ三角形,四角形等ナルニ隨ヒ之ヲ三角壔,四角壔等ト云フ.

角壔ハ其傍稜ガ底面ニ垂線或ハ斜線ナルニ隨ヒ之ヲ直角壔或ハ斜角壔ト云フ.

定理. 角壔ノ傍面ハ平行四角形ニシテ二底面ハ全等ナル多角形ナリ.

37. **定理一.** 角壔ヲ總ベテノ傍稜ニ交ル平行平面ニテ截ルトキハ其截リ口ハ全等ナリ.

定理二. 角壔ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其截リ口ハ底面ト全等ナリ.

定義. 角壔ノ傍稜ニ垂直ナル平面ガ各傍面(必要ナラバ其延長部)ト交リテ生ジタル多角形ヲ其角壔ノ直截リ口ト云フ.

定理三. 角壔ノ全傍面積(略シテ傍面積トモ云フ)ハ其直截リ口ノ周ニ一傍稜ヲ乘ジタルモノニ等シ.

定理四. 直角壔ノ全傍面積ハ其底面ノ周ニ高サヲ乘ジタルモノニ等シ.

定理五. 一ツノ角壔ノ三面角ヲ成ス三面ガ他ノ角壔ノ三面角ヲ成ス三面ト夫々全等ニシテ且ツ同樣ノ位置ニ在ルトキハ此等ノ角壔ハ全等ナリ.

定理六. 底面全等ニシテ高サ相等シキ二ツノ直角壔ハ全等ナリ.

定義. 角壔ヲ總ベテノ傍稜ニ交リ底面ニ平行セザル平面ニテ截ルトキハ其各部分ヲ斜截頭角壔ト云フ.

斜截頭角壔ノ記法ハ角壔ト同樣ナリトス.

定理七. 定理五ノ角壔ニ代フルニ斜截頭角壔ヲ以テスルコトヲ得.

38. **定義.** 底面ガ平行四角形ナル角壔ヲ平行六面體ト云フ.

注意. 平行六面體ハ相對セル何レノ二面ヲモ其底面ト見做スコトヲ得.

傍稜ガ底面ニ垂線ナル平行六面體ヲ直平行六面體ト云フ.

注意. 直平行六面體ノ各傍面ハ矩形ナリ.

底面ガ矩形ナル直平行六面體ヲ矩形六面體ト云フ.

一角頂ニ會セル三稜ガ等長ナル矩形六面體(即チ各面ガ正方形ナル平行六面體)ヲ立方體ト云フ.

定理一. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ各々他ヲ二等分ス.

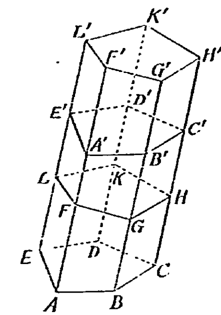
定理二. 矩形六面體ノ各對角線ハ皆相等シ.

39. 定義. 體ノ大サヲ體積ト云フ.

注意. 單位ノ長サヲ有スル直線ヲ稜トセル立方體ノ體積ヲ體積ノ單位ト定ム.

40. 定理. 斜角壔ハ其直截リ口ヲ底面トシ傍稜ヲ高サトセル直角壔ト等積

ナリ.



斜角壔(ABCDE−A')ノ直截リ口FGHKLヲ底面トセル直角壔ヲ(FGHKL−F')トシAA'=FF'トスレバ

(ABCDE−A')=(FGHKL−F')

ナリ.

(證) (A'B'C'D'E'−F')

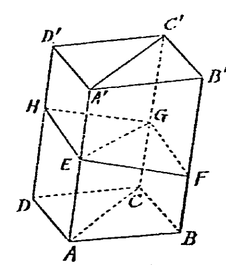
≡(ABCDE−F)(37ノ定理7).

∴ (ABCDE−F')−(A'B'C'D'E'−F')

=(ABCDE−F')−(ABCDE−F).

即チ (ABCDE−A')=(FGHKL−F').

41. 定理. 平行六面體ノ同一ノ面上ニ在ラザル平行二稜ヲ含ム平面ハ其體ヲ二等分ス.



平行六面體(ABCD−A')ヲ平面AC'ニテ截ルトキハ(ABC−A')=(CDA−C')ナリ.

(證) 直截面EFGHヲ作リ平面AC'トノ交線ヲEGトスレバ

EFGH ハ平行四角形ニシテ (28), EG ハ其對角線ナリ.

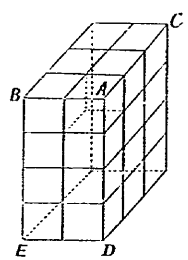
∴　$\triangle EFG \equiv \triangle GHE$.

∴ $\triangle EFG$ ヲ底面トシ AA' ヲ高サトスル直三角壔ハ $\triangle GHE$ ヲ底面トシ AA' ヲ高サトスル直三角壔ニ等シ (37 ノ定理 6).

然ルニ此兩三角壔ハ夫々 $(ABC-A')$, $(CDA-C')$ ニ等シ (40).

∴　$(ABC-A')=(CDA-C')$.

42. 定理. 一角頂ニ會セル三稜ガ a 尺, b 尺, c 尺ナル矩形六面體ノ體積ハ abc 立方尺ナリ.



矩形六面體 $(ABED-C)$ ニ於テ $AB=2$ 尺, $AC=3$ 尺, $AD=4$ 尺ナルトキハ其體ノ體積ハ $2\times3\times4$ 立方尺ナリ.

(證) AB, AC, AD ヲ夫々 2, 3, 4 等分シ各分點ヲ過ギテ各稜ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ原體ハ一稜 1 尺ナル立方體 $2\times3\times4$ 個ニ分タルベシ.

∴ 其體ノ體積ハ $2\times3\times4$ 立方尺ナリ.

AB, AC, AD ガ如何ナル値ヲ有スルモ證ハ同樣ナリト知ルベシ.

注意. 上ノ定理ハ通常之ヲ次ノ如ク略述ス (此後總ベテ之ニ倣フ)

一角頂ニ會セル三稜ガ a, b, c ナル矩形六面體ノ體積ハ abc ナリ.

或ハ

矩形六面體ノ體積ハ一角頂ニ會セル三稜ノ乘積ニ等シ.

或ハ

矩形六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

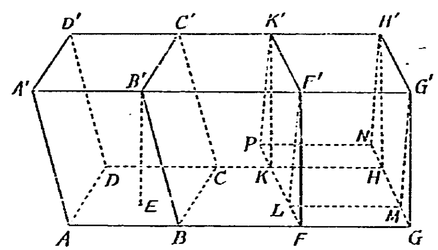
系一. 一稜 a ナル立方體ノ體積ハ a^3 ナリ.

系二. 一稜ガ na ナル立方體 [之ヲ $(na)^3$ ト記ス] ノ體積ハ n^3a^3 ナリ, 但シ n ハ任意ノ正數ナリトス. 又 $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

系三. 等高等底ナル矩形六面體ハ等積ナリ.

系四. 等高(或ハ等底)等積ナル矩形六面體ハ等底(或ハ等高)ナリ.

43. 定理. 平行六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.



平行六面體$(ABCD-A')$ノ高サヲ$B'E$トスルトキハ

$$(ABCD-A')=ABCD.B'E$$

ナリ.

(證) ABノ引長部上ニ$FG=AB$ト取リF, Gヲ過ギテFGニ垂直ナル二平面ヲ作リ二傍面AB', DC'及ビ兩底面ノ延長部ト共ニ直平行六面體$(FF'K'K-G)$[即チ平行六面體$(FGG'F'-K)$]ヲ形成スレバ第40條ニ由リ

$$(AA'D'D-B)=(FF'K'K-G).$$

即チ $(ABCD-A')=(FGG'F'-K)$.

又F', K'ヲ過ギテ$F'K'$ニ垂直ナル二平面ヲ作リ四平面$F'H'$, FH, FK', GH'ト共ニ矩形六面體$(LMGF'-P)$[即チ矩形六面體$(LMNP-F')$]ヲ形成スレ

バ亦第40條ニ由リ

$$(FGG'F'-K)=(LMG'F'-P)=(LMNP-F').$$

$\therefore$ $(ABCD-A')=(LMNP-F')$.

然ルニ $(LMNP-F')=LMNP.F'L$ (42).

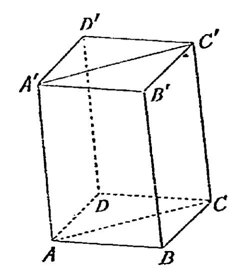
又 $LMNP=F'G'H'K'=FGHK=ABCD$,

$F'L=B'E$ (28ノ系).

$\therefore$ $(ABCD-A')=ABCD.B'E$.

44. 定理. 角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

第一. 三角壔ノ場合.



三角壔$(ABC-A')$ノ高サヲhトスルトキハ

$$(ABC-A')=\triangle ABC.h$$

ナリ.

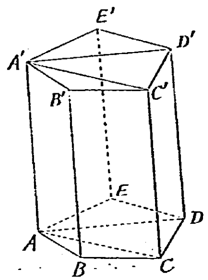
(證) AA', CC'ヲ含ミテ對面ニ平行スル二平面ヲ作リ二底面ノ平面及ビ面AC'ト共ニ平行六面體$(ABCD-A')$ヲ形成スルトキハ第41條ニ由リ

$$(ABC-A')=\frac{1}{2}(ABCD-A').$$

然ルニ $(ABCD-A')=ABCD.h$ (43).

∴ $(ABCD-A')=\frac{1}{2}ABCD.h=\triangle ABC.h.$

第二. 一般ノ角壔ノ場合.



角壔$(ABCDE-A')$ノ高サヲhトスルトキハ

$$(ABCDE-A')=ABCDE.h$$

ナリ.

(證) AA'トCC', DD'ノ各々トヲ含ム平面ヲ作ルトキハ

$$\begin{aligned}(ABCDE-A')&=(ABC-A')\\&+(ACD-A')+(ADE-A')\\&=\triangle ABC.h+\triangle ACD.h+\triangle ADE.h\ (\text{第一})\\&=(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE)h\\&=ABCDE.h.\end{aligned}$$

系一. 等高等底ナル角壔ハ等積ナリ.

系二. 等高(或ハ等底),等積ナル角壔ハ等底(或ハ等高)ナリ.

問題.

(1) 一稜$a+b$ナル立方體ト一稜$a-b$ナル立方體トノ體積ノ和及ビ差如何.

(2) 平行六面體ノ各對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ各稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ.

(3) 矩形六面體ノ一對角線ノ上ノ正方形ハ一角頂ニ會セル三稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ.

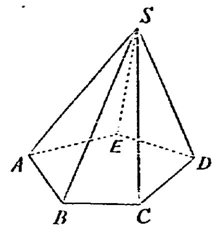
(4) 三角壔ノ體積ハ一傍面ニ此面ト對稜トノ距離ヲ乘ジタルモノノ半ニ等シキコトヲ證セヨ.

第二節 角錐.

45. 定義. 多角形ト其各邊ヲ底邊トシ其平面外ノ一點ヲ公頂角頂トセル三角形トニテ圍マレタル多面體ヲ角錐ト云ヒ,其多角形ヲ底面,一點ヲ頂點,三角形ヲ傍面(或ハ側面)ト云フ.

角錐ノ底面ノ邊ニアラザル稜ヲ傍稜(或ハ側稜)ト云ヒ,頂點ト底面トノ距離ヲ高サト云フ.

圖ノ如キ角錐ハ之ヲ角錐(S−ABCDE)ト記ス.



角錐ハ其底面ノ三角形,四角形等ナルニ隨ヒ之ヲ三角錐,四角錐等ト云フ.

三角錐ハ特ニ之ヲ四面體トモ云フ.

注意. 三角錐ハ其何レノ面ヲモ底面ト見做スコトヲ得.

46. 定理一. 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ傍稜及ビ高サハ比例スル部分ニ分タレ且ツ截リ口ハ底面ニ相似ナリ.

定理二. 角錐ノ底面ニ平行ナル截リ口ノ面積ハ頂點ヨリノ距離ノ平方ニ比例ス.

定理三. 等底等高ナル角錐ヲ底面ニ平行シ且ツ頂點ヨリ等距離ナル平面ニテ截ルトキハ其截リ口ハ等積ナリ.

47. 定義. 底面正多角形ニシテ其中

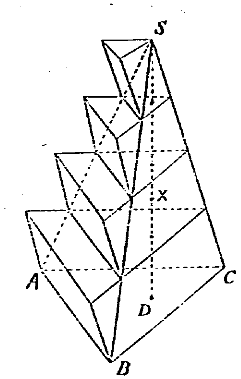
心ヲ過ギ且ツ其面ニ垂線ナル直線上ニ頂點ヲ有スル角錐ヲ正角錐ト云ヒ,其垂線ヲ軸ト云フ.

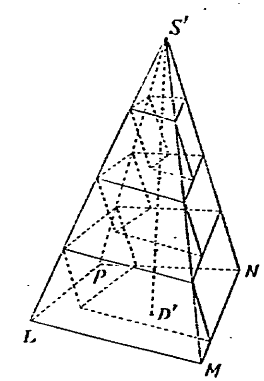
正角錐ノ頂點ト底面ノ一邊トノ距離ヲ斜高(或ハ傍高)ト云フ.

注意. 正角錐ノ各傍面ハ全等ナル二等邊三角形ニシテ底面ノ何レノ邊ニ就キテモ斜高ハ不變ナリ.

定理. 正角錐ノ全傍面積ハ底面ノ周ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ.

48. 定理. 等底,等高ノ二角錐ハ等積ナリ.





三角錐(S−ABC)及ビ四角錐(S′−LMNP)ノ高サヲ夫々SD, S′D′ トシ △ABC = LMNP, SD=S′D′ トスルトキハ

$$(S-ABC)=(S'-LMNP)$$

ナリ.

(證)　$(S-ABC)\neq(S'-LMNP)$ ナリト假定シ $(S-ABC)>(S'-LMNP)$ ナリトセバ其差ヲ底面 △ABC, 高サ XD ナル三角壔トスベシ.

SD, S′D′ ヲ一部分ガ XD ヨリモ小ナル樣ニ若干等分(圖ニ於テハ四等分)シ各分點ヲ過ギテ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ相對應セル各截リ口ハ等積ナリ (46 ノ定理 3).

今各截リ口及ビ底面 ABC ヲ底面トシ圖ノ如ク角壔ヲ作ルトキハ (S−ABC) ニ屬スル上層ノ三個ノ三角壔ハ夫々(S′−LMNP)ニ屬スル三個ノ四角壔ニ等シ (44 ノ系 1).

∴　(S−ABC) ニ屬スル各角壔ノ和(V トセヨ)ト (S′−LMNP) ニ屬スル各角壔ノ和(V′ トセヨ)トノ差ハ △ABC ヲ底面トセル角壔ニシテ隨ツテ

$$V-V'<(S-ABC)-(S'-LMNP).$$

然ルニ　$V>(S-ABC),\ V'<(S'-LMNP).$

∴　$V-V'>(S-ABC)-(S'-LMNP).$

是レ背理ナリ.

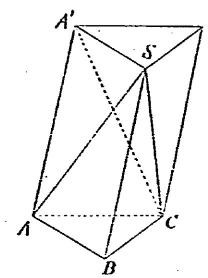
∴ 上ノ假定ハ誤リナリ.

∴　$(S-ABC)=(S'-LMNP).$

二ツノ角錐ガ如何ナル形狀ヲ有スルモ證ハ同樣ナリ.

49. 定理. 角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

第一. 三角錐ノ場合.



三角錐(S−ABC)ノ高サヲ h トスルトキハ

$$(S-ABC)=\frac{1}{3}\triangle ABC.h$$

ナリ.

(證)　BS, BA, BC ヲ稜トセル三角壔 (ABC−A′) ヲ圖ノ如ク作リ SC, SA′ ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ

$$(ABC-A')=(S-ABC)+(C-SA'C)+(S-ACA').$$

然ルニ　$(C-SA'C')=(S-ABC)$ (48).

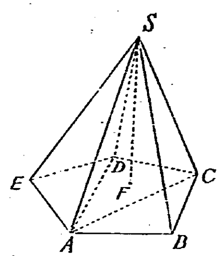
$$(S-ACA')=(S-C'A'C)\ (48)$$
$$=(C-SA'C')$$
$$=(S-ABC).$$

∴　$(ABC-A')=3(S-ABC).$

然ルニ $(ABC-A')=\triangle ABC.h$ (44).

$\therefore$ $(S-ABC)=\frac{1}{3}\triangle ABC.h.$

第二. 一般ノ角錐ノ場合.



角錐$(S-ABCDE)$ノ高サヲSFトスルトキハ

$$(S-ABCDE)=\frac{1}{3}ABCDE.SF$$

ナリ.

(證) 平面 SAC, SAD ヲ作ルトキハ

$$(S-ABCDE)=(S-ABC)+(S-ACD)+(S-ADE)$$

$$=\frac{1}{3}\triangle ABC.SF+\frac{1}{3}\triangle ACD.SF+\frac{1}{3}\triangle ADE.SF \text{ (第一)}$$

$$=\frac{1}{3}ABCDE.SF.$$

系. 等高(或ハ等底),等積ナル角錐ハ等底(或ハ等高)ナリ.

注意. 多面體ノ體積ヲ測ルニハ通常之ヲ數多ノ角錐ニ分チ此等ノ角錐ノ體積ヲ測リ而シテ之ヲ合計スルモノトス.

問　　題.

(1) 四面體ノ各二面角ノ二等分面ハ同一ノ點(內

心ト云フ)ヲ過グルコトヲ證セヨ.

(2) 四面體ノ各角頂ヨリ等距離ナル點(外心ト云フ)ノ位置如何.

(3) 四面體ノ各角頂ト對面ノ重心トヲ連ネタル直線ハ同一ノ點(重心ト云フ)ヲ過グルコトヲ證セヨ.又重心ハ其等ノ直線ヲ如何ニ分ツカ.

(4) 四面體ノ各稜ト其對稜トノ中點ヲ連ネタル直線ハ重心ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

(5) 四面體ノ各稜ト其對稜トノ中點ヲ連ネタル直線ガ互ニ垂線ナルトキハ各面ハ全等ナルコトヲ證セヨ.

(6) 四面體ノ二雙ノ對稜ガ夫々互ニ垂線ナルトキハ殘リノ稜モ亦互ニ垂線ナルコトヲ證セヨ.

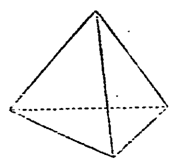
(7) 四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハ對稜ヲ其二面角ヲ夾ム二面ニ比例スル部分ニ分ツコトヲ證セヨ.

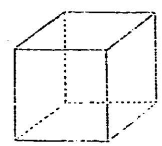
(8) 二ツノ四面體ガ一雙ノ全等ナル三面角ヲ有スルトキハ其體積ノ比ハ其角ノ各稜ノ乘積ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

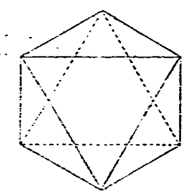
第三節 一般ノ多面體.

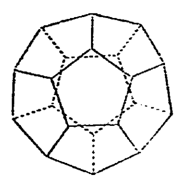
50. 定義. 各面全等ナル正多角形ニシテ各多面角亦全等ナル多面體ヲ正多面體ト云フ.

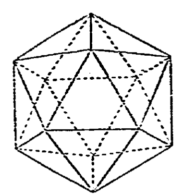
正多面體ハ次ノ五種ナリ


(正四面體)


(正六面體)


(正八面體)


(正十二面體)


(正二十面體)

正三角形ノ一角ヲ以テ六面角以上ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ,正方形或ハ正五角形ノ一角ヲ以テ四面角以上ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ,又正六角形以上ノ正多角形ノ一角ヲ以テ多面角ヲ作ルコト能ハ

ズ(33). 故ニ正多面體ハ上ノ五種ニ限ルコトヲ知ル.

51. 定義. 一ツノ多面體ノ各面ガ夫々他ノ多面體ノ各面ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在リ且ツ各對應多面角全等ナルトキハ此二體ハ相似ナリト云フ.

定理一. 二ツノ相似多面體ノ對應稜ハ比例ヲナス.

定義. 二ツノ相似多面體ノ對應稜ノ比ヲ其相似比ト云フ.

定理二. 二ツノ相似多面體ノ全面積ノ比ハ其相似比ノ平方ニ等シ.

問題.

(1) 一ツノ角錐ノ底面及ビ一傍面ガ夫々他ノ角錐ノ底面及ビ一傍面ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在リ且ツ其間ノ二面角相等シキトキハ此二角錐ハ相似ナルコトヲ證セヨ.

(2) 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキ生ズル所ノ角錐ハ原角錐ト相似ナルコトヲ證セヨ.

(3) 二ツノ相似ナル角錐或ハ角壔ノ比ハ其相似比ノ立方ニ等シキコトヲ證セヨ.

第四節 圓壔.

52. 定義. 一邊ヲ軸トシテ矩形ヲ一回旋轉セルトキ生ジタル體ヲ圓壔(或ハ圓柱)ト云ヒ,軸ニ交レル二邊ノ作リタル各面(即チ全等ナル圓)ヲ底面ト云ヒ,他ノ邊ノ作リタル面ヲ傍面(或ハ曲面)ト云ヒ,兩底面ノ距離(即チ軸ノ長サ)ヲ高サト云フ. 傍面ヲ作リタル邊ハ何レノ位置ニ在ルモ之ヲ其面ノ母線ト云フ.

定理一. 圓壔ヲ其底面ニ垂直ナル平面ニテ截レバ截リ口ハ矩形ナリ.

定理二. 圓壔ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ截リ口ハ底面ト全等ナリ.

定理三. 底面ノ半徑 R, 高サ H ナル圓壔ノ傍面積,全面積及ビ體積ハ夫々 $2\pi RH$, $2\pi R(H+R)$ 及ビ πR^2H ナリ.

問題.

(1) 傍面積相等シキ二圓壔ノ體積ノ比如何.

(2) 等積ナル二圓壔ノ傍面積ノ比如何.

(3) 與ヘラレタル圓壔ノ傍面ト與ヘラレタル一母線ノミヲ共有スベキ平面ヲ作ルコトヲ求ム.

定義. 此ノ如キ平面ト圓壔トハ相切スト云ヒ,其母線ヲ切母線ト云フ.

第五節 圓錐.

53. 定義. 直角ノ一邊ヲ軸トシテ直三角形ヲ一回旋轉セルトキ生ジタル體ヲ圓錐ト云ヒ,直角ノ他ノ邊ノ作リタル面(即チ圓)ヲ底面ト云ヒ,斜邊ノ作リタル面ヲ傍面(或ハ曲面)ト云ヒ,底面ヲ作リタル邊ノ對角頂ヲ頂點ト云ヒ,頂點ト底面トノ距離(即チ軸ノ長サ)ヲ高サト云フ. 斜邊ハ何レノ位置ニ在ルモ之ヲ傍面ノ

母線ト云ヒ,母線ノ長サヲ斜高(或ハ傍高)ト云フ.

定理一. 圓錐ヲ其頂點ヲ過グル平面ニテ截レバ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

定理二. 圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ截リ口ハ圓ナリ.

定理三. 底面ノ半徑 R, 高サ H, 斜高 L ナル圓錐ノ傍面積,全面積及ビ體積ハ夫々 πRL, $\pi R(L+R)$ 及ビ $\frac{1}{3}\pi R^2H$ ナリ.

定理四. 底面ノ半徑 R ナル圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ以テ生ジタル截リ口ノ半徑ヲ r トシ底面ト截リ口トノ間ニ在ル斜高ノ部分ヲ l トスルトキハ此二平面ノ間ニ在ル傍面ノ部分ハ $\pi(R+r)l$ ナリ.

問　題.

(1) 直角ノ二邊ヲ軸トシテ直三角形ヲ旋轉セルトキ生ジタル二ツノ圓錐ノ傍面積及ビ體積ノ比如何.

(2) 與ヘラレタル圓錐ノ傍面ト與ヘラレタル…母線ノミヲ共有スベキ平面ヲ作ルコトヲ求ム.

定義. 此ノ如キ平面ト圓錐トハ相切スト云ヒ,其母線ヲ切母線ト云フ.

第六節　球.

54. 定義. 直徑ヲ軸トシテ半圓ヲ一回旋轉セルトキ生ジタル體ヲ球ト云ヒ,直徑ノ中點ヲ中心ト云ヒ,半圓周ノ作リタル面ヲ球面ト云フ. 中心ト球面上ノ點トヲ連ネタル直線ヲ半徑ト云ヒ,中心ヲ過ギテ球面間ニ夾マレタル直線ヲ直徑ト云フ.

注意. 半徑ハ直徑ノ半ナリ.

定理一. 球ノ中心ト球面ノ內,上,或ハ外ニ在ル點トノ距離ハ夫々半徑ヨリモ小,之ニ等シ,或ハ之ヨリモ大ナリ.

定理二. 球ノ中心ト一點トノ距離ガ

半徑ヨリモ小,之ニ等シ,或ハ之ヨリモ大ナルトキハ其點ハ夫々球面ノ内,上,或ハ外ニ在リ.

定理三. 球ヲ平面ニテ截レバ截リ口ハ圓ナリ.

定義. 中心ヲ過グル平面ニテ球ヲ截リタルトキ生ジタル截リ口ヲ大圓ト云ヒ,中心ヲ過ギザル平面ニ由リテ生ジタル截リ口ヲ小圓ト云フ. 大圓或ハ小圓ノ平面ニ垂線ナル直徑ヲ其圓ノ軸ト云ヒ,軸ノ各端ヲ其圓ノ極ト云フ.

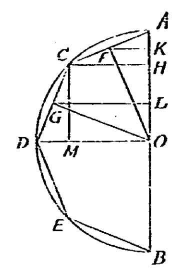
定理四. 大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分ス.

定義. 大圓ニ由リテ分タレタル球及ビ球面ノ二部分ヲ夫々半球及ビ半球面ト云フ.

定理五. 二ツノ大圓或ハ大圓周ハ各々他ヲ二等分ス.

定理六. 二ツノ球面ノ交線ハ圓周ナリ.

55. 定理. 半徑 R ナル球面ノ面積ハ $4\pi R^2$ ナリ.



長サ 2R ナル直徑 AB ヲ軸トシテ半圓周 ADB ヲ旋轉セルトキ生ジタル球面ノ面積ハ $4\pi R^2$ ナリ.

(證) 半圓周 ADB ヲ C, D, E ニテ四等分シ折線 ACDEB ヲ作レ.

中心 O ヨリ AC, CD ニ垂線 OF, OG ヲ引キ,又 AB ニ垂線 CH, DO, FK, GL ヲ引ケ.

旋轉ニ由リテ AC ガ作リタル面ハ圓錐ノ傍面ナルヲ以テ其面積(面積 AC ト呼ブ,以下之ニ倣フ)ハ第53條ノ定理三ニ由リ

$$\pi CH.AC=2\pi FK.AC\ (\because\ AF=FC,\ FK \parallel CH).$$

然ルニ $\triangle ACH \backsim \triangle FOK.$

$$\therefore\ FK.AC=FO.AH.$$

$\therefore$ 面積 $AC=2\pi FO.AH.$

又 CD ガ作リタル面ハ底面ト之ニ平行ナル截リ口

トノ間ニ在ル圓錐ノ傍面ノ部分ナルヲ以テ第53條ノ定理四ニ由リ

$$面積 CD=\pi(CH+DO)CD$$

$$=2\pi GL.CD\ (\because\ CG=GD,\ CH \parallel GL \parallel DO).$$

然ルニ CM ヲ DO ニ垂線ニ引ケバ $\triangle CDM \backsim \triangle GOL$.

$$\therefore\quad GL.CD=GO.CM=GO.HO.$$

$$\therefore\quad 面積 CD=2\pi GO.HO.$$

面積 DE 等ニ就キテモ同樣ノ結果ヲ得ベシ.

然ルニ OF=OG 等ナルヲ以テ折線 ACDEB ガ作リタル面積ハ

$$2\pi FO(AH+HO+\cdots\cdots)=2\pi FO.AB.$$

半圓周 ADB ヲ 8, 16, 32 等ニ等分スルモ同樣ノ結果ヲ得ベキヲ以テ今半圓周 ADB ヲ之ヲ窮リナク多ク等分シタルトキ生ジタル折線ト見做ストキハ

$$面積(半圓周 ADB) 即チ 球面積=2\pi R.2R=4\pi R^2.$$

系. 球面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス.

56. 定理. 半徑 R ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi R^3$ ナリ.

(證) 球ハ之ヲ其中心ヲ公頂點トセル窮リナキ多クノ小角錐ノ和ト見做シ得ルヲ以テ其體積ヲ求ムルニハ此等ノ小角錐ノ體積ノ和ヲ求ムレバ可ナリ.

然ルニ此等ノ小角錐ノ高サハ皆半徑ニ等シト見做シ得ルヲ以テ

$$球ノ體積=\frac{1}{3}(球面積)(半徑)$$

$$=\frac{1}{3}.4\pi R^2.\ R\ (55)$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

系一. 直徑 D ナル球ノ體積ハ $\frac{1}{6}\pi D^3$ ナリ.

系二. 球ノ體積ハ半徑ノ立方ニ比例ス.

問　題.

(1) 球ノ中心ヨリ等距離或ハ不等距離ニアル二ツノ小圓ヲ比較セヨ. 又之ヲ逆ニ攻究セヨ.

(2) 球ノ大圓或ハ小圓ノ一ツノ極ト其圓周上ノ各點トノ間ニ在ル大圓弧(隨ツテ之ニ對スル弦)ハ皆相等シキコトヲ證セヨ.

(3) 體積100立方尺ナル球ノ直徑及ビ面積如何.

(4) 球ノ大圓ヲ底面トシ直徑ヲ高サトセル圓壔

ノ全面積ハ球面積ノ $\frac{3}{2}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

(5) 球ノ大圓ヲ底面トシ直徑ヲ高サトセル圓錐及ビ圓壔ヲ作ルトキハ其圓錐,球,圓壔ノ體積ハ1,2,3ニ比例スルコトヲ證セヨ.

(6) 球面ト與ヘラレタル一點ノミヲ共有スベキ平面ヲ作ルコトヲ求ム.

定義. 此ノ如キ球ト平面トハ相切ストラヒ,其點ヲ切點ト云フ.

附 錄.

練 習 問 題.

(1) 平面ニ斜ナル直線上ノ二點ト其面トノ距離ノ比ハ其二點ト斜線ノ足トノ距離ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

(2) 平面ヘノ斜線ノ足ヲ過ギテ其面上ニ斜線ト與ヘラレタル角ヲ成ス直線ヲ引クコトヲ求ム.

(3) 平面上ノ與ヘラレタル一點ヲ過ギテ其面上ニ直線ヲ引クコトヲ求ム. 但シ此線ト他ノ與ヘラレタル一點トノ距離ハ與ヘラレタル長サニ等シキコトヲ要ス.

(4) 同一ノ平面ニ垂線ナル直線ト平行ナル直線トハ互ニ垂線ナルコトヲ證セヨ.

(5) 同一ノ直線ニ垂直ナル平面ト直線トノ位置ノ關係如何.

(6) 同一ノ直線ニ平行ナル直線ト平面トノ位置ノ關係如何.

(7) 一平面ニ垂線ナル直線ノ他ノ一平面上ニ於ケル正射影ハ其二面ノ交線ニ垂線ナルコトヲ證セ

ヨ.

(8) 相等シク且ツ相平行セル二直線ノ一平面上ニ於ケル正射影ハ亦相等シク且ツ相平行スルカ或ハ一致スルコトヲ證セヨ.

(9) 平行ナル二直線ガ一平面ト成ス角ハ相等シキコトヲ證セヨ.

(10) 與ヘラレタル直線ヲ含ミ與ヘラレタル平面ト與ヘラレタル角ヲ成ス平面ヲ作ルコトヲ求ム.

(11) 同一ノ平面ニ平行ナル直線ト平面トノ位置ノ關係如何.

(12) 一直線ガ平行二平面ト成ス角ハ相等シキコトヲ證セヨ.

(13) 三面角ノ二ツノ平面角相等シキトキハ之ニ對スル二面角亦相等シキコトヲ證セヨ.

(14) 三面角內ノ一點ヨリ各面ニ引ケル垂線ヲ稜トセル三面角ノ平面角及ビ二面角ハ原三面角ノ二面角及ビ平面角ト如何ナル大サノ關係ヲ有スルカ.

(15) 三面角ノ各平面角ノ二等分線ト對稜トヲ含ム三平面ハ同一ノ直線ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

(16) 平行六面體ノ各對角線ノ交點(中心或ハ重心ト云フ)ヲ過ギ兩對面ノ間ニ夾マレタル直線ハ其點

ニテ二等分セラルヽコトヲ證セヨ.

(17) 平行六面體ノ中心ト此體ヲ截ラザル一平面トノ距離ハ各角頂ト此面トノ距離ノ等差平均ニ等シキコトヲ證セヨ.

(18) 與ヘラレタル立方體ヲ一平面ニテ截リ其截リ口ヲシテ正六角形ナラシムルコトヲ求ム.

(19) 三角壔ノ二傍面ノ和ハ他ノ傍面ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ.

(20) n角壔ノ稜ノ總數,各面ノ角ノ和,及ビ各二面角ノ和各々如何.

(21) 角壔ノ直截リ口ハ總ベテノ傍面(必要ナラバ其延長部)ニ交ル平面ニテ生ズル他ノ截リ口ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ.

(22) 四面體ノ重心ト此體ヲ截ラザル一平面トノ距離ハ各角頂ト此面トノ距離ノ等差平均ニ等シキコトヲ證セヨ.

(23) 正四面體ノ一角頂ヨリ對面迄引ケル垂線ハ其足ヨリ他ノ一面迄引ケル垂線ノ三倍ナルコトヲ證セヨ.

(24) 斜截頭三角壔ハ其底面ヲ底面トシ截リ口ノ各角頂ヲ頂點トセル三ツノ三角錐ノ和ニ等シキコ

トヲ證セヨ(第49條ノ圖ノ如ク分割シテ考フベシ).

(25) 斜截頭三角壔ノ體積ハ其直截リ口ト各傍稜ノ和トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シキコトヲ證セヨ.

定義. 底面ト之ニ平行ナル截リ口トノ間ニ在ル角錐ノ部分ヲ**平截頭角錐**ト云ヒ,平行二面ヲ各々**底面**ト云ヒ,他ノ各面ヲ**傍面**(或ハ**側面**)ト云ヒ,二底面ノ距離ヲ**高サ**ト云フ.

平截頭角錐ノ記法ハ角壔ト同樣ナリ.

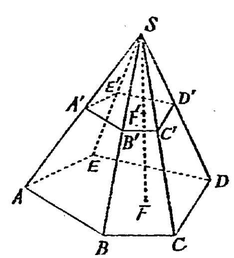
定義. 平截頭正角錐ノ二底面ノ相對應セル二邊ノ距離ヲ**斜高**(或ハ**傍高**)ト云フ.

注意. 平截頭正角錐ノ各傍面ハ全等ナル梯形ニシテ何レノ傍面ニ就キテモ斜高ハ不變ナリ.

(26) 平截頭正角錐ノ全傍面積ハ二底面ノ周ノ和ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シキコトヲ證セヨ.

(27) 平截頭角錐ノ兩底面積,高サ,體積ヲ夫々 β, β', h, V トスルトキハ

$V=\frac{1}{3}h(\beta+\beta'+\sqrt{\beta.\beta'})$ ナルコトヲ證セヨ.



平截頭角錐(ABCDE−A')ニ於テ ABCDE$=\beta$, A'B'C'D'E'$=\beta'$,高サ F'F$=h$,體積=V トスルトキハ V

ハ上記ノ如シ.

(證) 截頭部ヲ完成シ其高サ SF' ヲ x トスレバ

$$V=\frac{1}{3}\beta(h+x)-\frac{1}{3}\beta'x.$$

然ルニ $\frac{\beta}{\beta'}=\left(\frac{h+x}{x}\right)^2$ (何故カ).

$\therefore$ $x=\frac{h\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta'}}$ (何故カ).

$\therefore$ $V=\frac{1}{3}h(\beta+\beta'+\sqrt{\beta.\beta'})$ (詳說セヨ).

(28) 二隣邊ノ各々ヲ軸トシテ矩形ヲ旋轉セルトキ生ジタル二圓壔ノ體積ノ比如何.

定義. 對應邊ヲ軸トシテ相似ナル矩形ヲ旋轉セルトキ生ジタル圓壔ヲ**相似圓壔**ト云フ.

(29) 相似圓壔ノ傍面積及ビ全面積ハ底面ノ半徑或ハ高サノ平方ニ比例スルコトヲ證セヨ.

(30) 相似圓壔ノ體積ハ底面ノ半徑或ハ高サノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ.

(31) 二隣邊ノ各々ヲ軸トシテ平行四角形ヲ一回旋轉スルトキ生ズル所ノ體積ハ軸ニ反比例スルコトヲ證セヨ.

定義. 底面ト之ニ平行ナル截リ口トノ間ニ在ル圓錐ノ部分ヲ**平截頭圓錐**ト云ヒ,平行二面ヲ各々**底面**ト云ヒ,他ノ面ヲ**傍面**(或ハ**曲面**)ト云ヒ,二底面

ノ距離ヲ**高サ**ト云ヒ,二底面ノ間ニ在ル斜高ノ部分ヲ其**斜高**ト云フ.

(32) 平截頭圓錐ノ二底面ノ半徑ヲ R, R′ トシ高サヲ H トスルトキハ體積ハ $\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$ ナルコトヲ證セヨ.

定義. 對應邊ヲ軸トシテ相似ナル直三角形ヲ旋轉セルトキ生ジタル圓錐ヲ**相似圓錐**ト云フ.

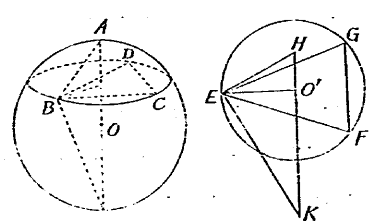
(33) 相似圓錐ノ傍面積及ビ全面積ハ底面ノ半徑,高サ,或ハ斜高ノ平方ニ比例スルコトヲ證セヨ.

(34) 相似圓錐ノ體積ハ底面ノ半徑,高サ,或ハ斜高ノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ.

(35) 半徑3米ナル球ノ小圓ガ5平方尺ナルトキハ其小圓ト球ノ中心トノ距離何尺ナルカ.

(36) 與ヘラレタル一直線ヲ含ミ與ヘラレタル球ニ切スベキ平面ヲ作ルコトヲ求ム.

(37) 球面内ニ圖形ヲ作ラズシテ與ヘラレタル球ノ半徑ヲ求メヨ.



中心Oナル球ノ半徑ヲ求メントス.

(作法) 球面上ニ任意ノ一點Aヲ取リAヨリ等距離ナル三點 B, C, D ヲ球面上ニ取レ.

BC, CD, DB ト等シキ三邊ヲ有スル △EFG ヲ作リ其外接圓ノ半徑 O′E ヲ求メヨ.

O′ ヲ過ギ EO′ ニ垂線 HK ヲ引キ E ヨリ之ニ AB ト等シキ直線 EH ヲ引ケ.

平面 EO′H 上ニテ $H\hat{E}K=\hat{R}$ ナルベキ直線 EK ヲ引キ HO′ トノ交點ヲ K トセヨ.

$\frac{1}{2}$HK ハ求ムル所ノモノナリ.

此證ヲ問フ(圖ニ於ケル補助線ヲ參考セヨ).

中等教育

立體幾何學教科書

終.

關西賣捌所　大坂市東區南久寶寺町四丁目　前川善兵衛

發行所　振替貯金口座東京一八四四番　東京市日本橋區馬喰町二丁目一番地　興文社

印刷發行者　東京市日本橋區馬喰町二丁目一番地　鹿島長次郎

著作者　宮本藤吉

明治四十四年二月十六日改訂三版發行
明治四十四年二月十三日改訂三版印刷
明治四十三年十一月十五日改訂再版發行
明治三十七年九月十二日發行

定價金四拾錢

改訂　立體幾何