

K220.43

14



大正元年十月十六日

西村生

山海堂 於

6.1.24

近世 平面幾何學

英國 ジー・リチャードソン 及
エー・エス・ラムゼー 合著

薮池大蔵 數藤芥三郎

合譯

大日本圖書株式會社

日本数学教育学会寄贈

1973.10

国立教育研究所

緒 言

本書ノ趣旨ハ原序盡セルヲ以テ復記スルノ要ナシ; 故ニ余ハ唯此ニ之ヲ譯シテ世ニ公ニスル以所ト本書ニ付キ讀者ノ注意ス可キ件トヲ述ヘントス.

抑近世幾何學トハ僅ニ此五六十年間ニ發達シタル幾何學ノ一分科ニシテ其ノ方法ハ彼ノ解拆法ノ如ク代數學的ナラズ, 幾何學圖形其モノニ就テ攻究スルモノナリト雖又大ニ太古ヨリ傳ヘ來リタル方法即普通初等幾何學ニ於テ用非ルモノト異ナレリ. 而シテ其ノ方法ノ簡單ニシテ概括ナル, 獨リ幾何學上ノ研究ニ於テノミナラズ, 又其ノ應用ニ於テモ頗効力アル等, 實ニ數學ニ志ス者ハ必ズ學ハザル可カラザル一學科ナリ (尙ホ委シクハ東洋學藝雜誌第百六十二號幾何學ノ發達及分科ト題セル余ノ論文ニ述ヘタリ). 余ハ曩ニ初等幾何學敎科書ヲ編纂シ其ノ隨伴トシテ幾何學講義ヲ著シ, 近世幾何學ニモ説キ及ホサント期シタリキ; 然レモ其後種々ノ故障有リテ未タ出版ノ運ニ至ラズ; 然ルニ偶昨年英國マクミラン社ヨリ本書ノ原書一部ヲ贈ラル, 之ヲ閱スルニ其ノ順序ハ全ク英國幾

何學教授法改訂協會ニ於テ議定シタル近世幾何學ノ條目ニ據ルモノナリ。余ハ之ニ對シ少シク異見ヲ有シ又本書ニ付テモ充分ノ満足ヲハナシガタキノ點無キニ非ラズト雖本邦未タ此必要ノ學科ノ階梯タル可キ頁書無キト其ノ據ル所ノ條目ハ兎ニ角英國ニ於テ教授ニ經驗有ル數多ノ教員ノ議定シタル所ナルトヲ以テ理科大學數學撰科ヲ修了シタル數藤斧三郎君ト謀リ遂ニ共ニ之ヲ譯シテ本邦斯學ヲ學ハント欲シテ原書ヲ解スル能ハザル者ノ爲ニセントスルニ至レリ。而シテ余輩ハ註ヲ加ヘ(ペーシノ底ニ在リテ「原註」ト記セザルモノハ譯者ノ註ナリ)、證明、說明等ニ於テ特ニ不充分ナリト思ヘル所ニ注意ヲ與ヘタリ、且原書ニ於ケル印刷ノ誤謬等ヲモ訂正シタリ; 然レモ固ヨリ之ヲ以テ盡シタリト言フニアラズ。本書ニ於テハ原序ニモ言ヘル如ク讀者ハ(第八編、定理7以下ニ於テ)所謂幾何學的圓錐曲線論ヲ學ヒタルモノトセリ、是レ英國ニ於テハ通例初等幾何學ニ次テ之ヲ學ブモノナレハナリ; 而シテ圓錐曲線ノ性質ハ最初ヨリ近世幾何學ノ方法ニ依リテ攻究スルヲ得ルモノナレモ然スルキハ稍高尙ノ部分ニ入り且頗大部ト爲ルヲ以テ斯ノ如クセシナラン。又第八編ニ於テ複比及「イソヴォリューション」ヲ論シ、第九編

ニ於テ射影法ヲ講シタリト雖余ハ先ツ射影法ヲ論シ然ル後之ニ據リテ以テ複比及「イソヴォリューション」ヲ説クヲモテ正常ナリト考フルナリ、而シテ此等ノ事ハ近世幾何學中最重要ナル部分ニ屬スルヲ以テ余ハ附録トシテ此順序ニ據ルキハ如何ナル可キカノ綱領ヲ示セリ、而シテ一切圓錐曲線論ニ據ラズ、圓錐曲線ハ圓ノ射影ヨリ生スルモノトスルニ止メ、從テ曲線ノ性質ヲ要スル定理ハ之ヲ省ケリ; 就中相反對極ノ事ハ必ズ圓錐曲線ノ性質ニ關スルヲ以テ全ク之ヲ除キヌ。然レモ射影法ニ據リテ圓錐曲線ヲ論スルハ最有益ニシテ趣味深キモノナレハ余ハ他日其ノ機ヲ得ハ之ヲ説述スルヲ有ル可シ。

本書ニ於テ用非ル所ノ語ニシテ譯語無キモノ及ヒ未タ一定セザルモノ少カラズ、今假ニ之ヲ作り或ハ撰擇スト雖余輩ハ決シテ以テ十分トシ敢テ固執スルモノニアラズ、暫ク識者ノ定議ヲ待ツノミ。

明治廿八年、八月。

菊池大麓識。

原 序

本書ハ近世平面幾何學ノ入門ニシテ、クレモナ等ノ高等ナル著書ヲ學フノ準備タル可キモノナリ。即二重ノ目的ヲ以テ之ヲ編纂セリ：第一、ユークリッド、否、幾何學教授法改良協會ノ發行シタル初等平面幾何學教科書ノ續編タルヲ；第二、ユークリッド流ノ幾何學ヨリ進ミテ圓錐曲線論及虛點論等ノ高等圖形的幾何學ニ入ルノ階梯タルヲ是ナリ。最初ノ七編ハ專ラ第一ノ目的ヲ遂クルヲ以テ旨趣トシ、三角形、四角形、圓、調和比(第三編)及幾何學の極大極小(第七編)、等ヲ論ス：第二編ニ於テハ三角形ヲ論スルヲ頗周到ナリ、以テ三角形ニ關聯セル點及圓ニ就テノ最近研究ノ一斑ヲ窺フニ充分ナラシメテ期セリ。圓錐曲線(圓ヨリ他ノ)ハ第八編定理7ニ至ルマテハ全ク之ヲ提出セズ；其ノ以後ニ於テハ初等幾何學の圓錐曲線論ノ知識ヲ要ス。

射影ノ理論ハ固ヨリ圖形的平面幾何學上重要ナルモノニシテ且立卦幾何學ニ亘ルヲ極メテ少キヲ以テ、協會ガ之ヲ其ノ近世平面幾何學ノ條目中ニ入レタルヲ及著者ガ

其表題ヲ襲用シタルコトニ就テ辨解スルノ必要無カル可シ。

本書説ク所ハ實際協會ノ條目ト異ナルコト無ク悉皆之ヲ採用セリ。定理ノ番號ノ如キモ其儘之ヲ用非タリト雖多少重要ナル増補ヲナセシ所無キニ非ラズ。且例及問題ヲ各編ノ下ニ加ヘタリ。

著者ハ幾何學教授法改良協會ノ評議會ガ其ノ條目ヲ本書編纂ノ基礎トナスノ許可ヲ與ヘタルヲ謝シ併セテ其ノ起案者タル近世平而幾何學委員ニ對シテ感謝スル所無カル可カラズ。蓋シ本書ニシテ價值ヲ有スルモノアレハ是レ該委員ノ賜ニ外ナラザレハナリ。著者ハ又ケムブリッジ大學「シント・ジョシス・コレッ」長テーボル博士ニ對シ本書第四編定理3ニ於テ博士ノ創見ニ係ル證明法ヲ引用スルノ許可ヲ與ヘラレタルト其ノ著書「古今圓錐曲線幾何學」ヨリ隱然無量ノ補助ヲ受タルコトヲ謝セザル可カラズ。最後ニ諸學友、特ニ元「クライストチャーチ」ノ特待生タリシテー・ビー・クソト君ニ對シ校正ノ勞ヲ謝セザル可カラズ。此等諸友ノ注意ニ由リ誤植等ハ少カル可シト希望ス。

千八百九十三年十二月。

ジョー・ワチヤードソン。

エー・エス・ラムゼー。

目 錄

第一編	緒論	頁 1
第二編	三角形ノ性質	13
第三編	調和列點及調和束線	61
第四編	完全四邊形及完全四角形ノ性質	70
第五編	圓ノ性質	76
第六編	二以上ノ圓ノ性質	98
第七編	幾何學的極大及極小	117
第八編	複比「 <u>イノヴォリューション</u> 」及相反對極	138
第九編	射影法	171
	雜題	192
	附錄	199

近世平面幾何學

第一編

緒論

幾何學ハ之ヲ度量的 (metrical) ト 圖形的 (descriptive) トノ二種ニ別ツヲ得。前者ハ線ノ長、角及面積ノ大ヲ論シ、後者ハ線ノ位置、方向及交、點ノ軌跡、曲線ノ性質ヲ講究ス。⁽¹⁾ 例ヘハ「直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ他ノ一邊ノ上ノ正方形ニ等シ」ト云フカ如キハ度量的定理ノ一例ニシテ、「相切スル二ノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ハ切點ヲ過ル」ト云フカ如キハ圖形的定理ノ一例ナリ。

ユークリッド 及太古ノ幾何學ハ殆ソト全ク度量的ナリ、之ニ反シテ近世幾何學ノ一大特所ハ實ニ其ノ概シテ圖形的ナルニ在リ。

然レモ近世平面幾何學⁽²⁾ ノ古來ノ幾何學即 ユークリッド

⁽¹⁾ 主トシテ平面幾何學ニ就テ言ヒタルモノナリ。

⁽²⁾ 特ニ平面ト云フノ必要ナシ。

法ト異ル所以ハ其ノ基礎タル二大原理ニ在リトス。連續ノ原理 (Principle of Continuity) 及双對ノ原理 (Principle of Duality) 即是レナリ。連續ノ原理ニ依レハ、定理ハ常ニ眞ニシテ普ク之ヲ應用スヘク、決シテ特例ヲ其ノ間ニ容ルヘキモノニ非ズ。若シ形勢ノ變スルニ因リテ定理ノ眞ナラザルカ如キ觀ヲ爲スニ至ルルハ、定理ハ依然之ヲ存シ形勢ヲシテ讓歩ヒシメザル可ラズ；更ニ之ヲ言ヘハ、形勢ヲ解釋スルカ爲ニ適當ノ約束ヲ設ケ、以テ定理ノ演述ヲ毀廢スル無カラシメシムヲ要ス。斯ノ如ク原理ヲ成立ヒシモノカ爲ニ必要ナル約束ハ線ノ長、ヲ度ルヘキ方向及面積ノ位置ニ關シ代數學上ノ符號 $+$ 及 $-$ ニ意味ヲ附スルコト、及虛點虛線ノ概念ヲ提起スルコトナリ。學フ者宜ク注意シテ本論ニ進ムニ從ヒ此原理ノ漸々顯出シ來ルヲ見ルヘク、又一見其ノ範圍内ニ在ラザル如キ定理ニ應用シ得ルコトヲ考フルハ有益ノ演習ナリ。双對ノ原理ハ後ニ説明スヘシ (第四編ヲ見ヨ)。今ハ唯次ニ陳フル所ヲ以テ足レリトス；即各圖形の定理ニ伴フテ其ノ双對ト稱スル他ノ一定理ノ存スル有リテ、前者中ノ一點ニハ必ズ後者中ノ一直線之ニ對シ、前者中ノ一直線ニハ必ズ後者中ノ一點之ニ對ス。

直線ノ性質

(1) 初等幾何學ニ於テハ、有限直線即線分 (segment) ハ唯其ノ絕對ノ長ノミヲ考ヘ、之ヲ他ノ線ニ加ヘ或ハ之ヲ他ノ線ヨリ減スルコトハ特ニ明言スルヲ要ス。

近世平面幾何學ニ於テハ、直線上ニ長、ヲ度ルニ當リテ其ノ方向ヲモ併セテ考ヘ、 $+$ 及 $-$ ノ符號ヲ用非テ之ヲ表ス。

此符號ニ關スル基本ノ法則ハ次ノ如シ：

[i] A 及 B ヲ一直線上ノ二點トスレハ、

$$AB = -BA, \quad BA = -AB.^{(3)}$$

之ヨリ直ニ次ノ結果ヲ得、

$$-(-AB) = AB.$$

(3) 原書ニ於テハ AB, BC 等ヲ以テ向キヲ有スル線分ノ長サ即符號ヲ有スル一種ノ幾何量ヲ表ハスト雖、斯クスルルハ書中ノ證明往々不充分ニシテ且不安當ノ點點カラズ；即本書中 AB, BC 等及其ノ比 AB:BC 等ハ皆代數學ノ諸定則ニ從フモノトモリ、然レモ之レヲ證明ヲ要ス。而シテ其證明ハ甚々困難ナルニ非ラズト疑之ヲ揭ケザルカラハ寧ロ斷然此等ヲ以テ線分ノ長サヲ代數學的ニ表ハスモノトナス方簡單ナルヘシ。

直線 AB 上ニ A ヲ B ノ方ヘ度リタル長ヲ正量トスレハ $\overset{B}{A} \text{ ヲ } \overset{A}{B}$ ノ方ヘ度リタル長ヲ負量トスルコト必要ナリ。AB トハ $\overset{B}{A} \text{ ヲ } \overset{A}{B}$ ノ方ヘ度リタル長ヲ代數學的値ニシテ、BA トハ $\overset{A}{B} \text{ ヲ } \overset{B}{A}$ ノ方ヘ度リタル同シ長ヲ代數學的値ナルヲ以テ其ノ絕對ノ値ハ相等シク唯其ノ符號異レリトス。

(iii) A, B, P が一直線上ノ任意ノ三點トスレバ,

$$AP + PB = AB. \textcircled{a}$$

(2) 一直線上ニ二ノ定點 A 及 B を取レハ其直線上ニ在ル他ノ任意ノ一點 P ノ位置ハ比 $AP : PB$ ニ依リテ定マル。

若シ $AP : PB$ が正ナレハ AB ハ P ニ於テ内分セラル。

若シ $AP : PB$ が負ナレハ AB ハ P ニ於テ外分セラル。

何レニシテモ, $AP : PB$ が算術的ニ(其ノ符號ニ關セズ) 1 ヨリ小ナルカ或ハ大ナルカニ從テ, P ハ A 或ハ B ニ近シ。

若シ $\frac{AP}{PB} = +1$ ナレハ P ハ AB を二等分ス。

若シ $\frac{AP}{PB} = -1$ ナレハ P ハ A, B ヨリ無限ノ距離ニ在リ。

A を越ヘテ^(a) 無究遠ニ在ル點ト B を越ヘテ無究遠ニ在ル點トハ同一ナリ。何トナレハ,

P が A ニ在レハ $AP : PB$ ハ 0 ナリ;

P が直線ノ上ヲ動キテ AB ノ中點ニ至レハ $AP : PB$ ハ +1 トナリ;

P が B ニ近ツクニ從テ此比ハ漸次増大シ,

(a) 古來ノ幾何學ニ於テハ此定理ハ P が AB ノ間ニ在ル時ノミ真ナレバ, 此所ニ於テハ符號ノ約束ニヨリテ P が AB 線上何レノ位置ニ在ルモ常ニ真ナリ。是レ即約束ヲ設ケテ以テ定理ヲ普ク真ナラシムルノ一例ナリ。

(a) A (或ハ B) を越ヘテハ AB ノ中點ヨリシテ言フナリ。

極限ニ於テハ^(a) トナル;

P が B を過ル時比ハ其ノ符號ヲ變シ^(a) (極限ニ於テノ) 1 ヨリ其ノ絶對ノ値漸次減少シ, P が B を越ヘテ無究遠ニ至ル時ハ遂ニ -1 トナル。

最初ヨリ此處マテハ比ノ値ノ變化ハ連續性ニシテ, P ノ運動モ亦連續セリ。今 P が A を越ヘテ無究遠ニ在ル點ヨリ A ニ至ル迄動クハ, 比ノ値ハ -1 ヨリ絶對的ニ減少シ極限ニ至リテ遂ニ 0 トナル。然レハ比ノ値ノ變化ハ始終連續性ナリ。依リテ考フルニ次ノ斷定ハ無理ナラザルカ如シ; 即 P ノ運動モ亦始終連續セルモノニシテ, B を越ヘテ無究遠ニ在ル點ト A を越ヘテ無究遠ニ在ル點トハ同一ナリ, 而シテ直線ハ一個ノ連續セル軌跡ナリト考フルコトヲ得。^(a)

(a) $+\infty$ ト $-\infty$ トノ連續ナルコトハ菊池大麓, 澤田吾一合著初等平面三角法教科書第四編 37-38 ヲ見ヨ。

(a) P が B を越ヘテ無究遠ニ在ルモ比 $AP : PB$ ハ -1 ニシテ, P が A を越ヘテ無究遠ニ在ルモ亦 -1 ナリ。即比ハ 0 ヨリ始マリ +1, $+\infty$, $-\infty$, -1 ヲ經テ復 0 トナリ, 其ノ變化ハ連續性ナリ。此際 P ハ A ヨリ動キ始メ AB ノ中點及 B ヲ經, B を越ヘテ無究遠ノ所ニ至リ更ニ A を越ヘテ無究遠ノ所ヨリ A ニ還ル。斯ノ如ク比 -1 ニ對スル點二ツアルカ如キモ, 此二點ヲ同一ノモノトスレハ, P ノ運動モ亦連續性トナル。斯ノ如ク考フルモ A を越ヘテ無究遠ニ至ルモ B を越ヘテ無究遠ニ至ルモ到底同點ニ達ス, 即直線ハ圖ノ如ク端無キモノトス。

附言. 直線 AB ト言フモハ, 有限直線 AB ノコトナルカ
或ハ AB ナ一部分トスル連續セル軌跡ヲ指スカニ就テ學
者ノ惑ヲ生スルコトアルヘシト雖, 長, AB ト明言シ或ハ
其ノ長, ノ意ヲ暗示スルニ非ラザレハ, 必ズ後者ヲ指スモ
ノト心得テ可ナリ.

(3) 比ハ乗除ニ依リ幾個ニテモ之ヲ組合ハスコトヲ
得. 通例

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{r} \cdot \frac{d}{s} \cdot \frac{e}{t} = 1 \quad \text{ヲ} \quad abcde = pqrst \quad \text{ト記シ},$$

$$\frac{AB}{AC} + \frac{AB}{AD} = 2 \quad \text{ヲ} \quad \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB} \quad \text{ト記ス},$$

其他此類ノコトアリト雖, 後ノ方程式ハ前ノ方程式ヲ表
ス便法ニシテ, $abcde, \frac{2}{AB}$ 等ノ如キ量ガ各自幾何學上ノ意
味ヲ有スト云フニ非ラザルナリ.⁶⁾

(4) 次ニ掲クルモノハ一直線上ノ數線分間ノ關係ヲ示
スモノナリ.

(i) A, B, C ガ一直線上ノ三點ナレハ,

$$AB + BC + CA = 0.$$

是レ明白ナリ.

(ii) P ガ其直線上ニ在ル他ノ任意ノ點ナレハ,

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0.$$

⁶⁾ 此一節ハ前ニ述フル如ク線分ノ長, 等ノ代數値ヲ取リテ考フルモハ不
必要ナル.

A	B	C	P
---	---	---	---

何トナレハ, $PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB$

$$= -AP(AC - AB) - (AB - AP)AC + (AC - AP)AB$$

$$= -AP \cdot AC + AP \cdot AB - AB \cdot AC + AP \cdot AC + AC \cdot AB - AP \cdot AB$$

$$= 0$$

ナレハナリ.

$$(iii) \quad PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB = -BC \cdot CA \cdot AB.$$

左節 $= AP^2 \cdot (AC - AB) - (AB - AP)^2 AC + (AC - AP)^2 AB$

$$= AP^2 \cdot AC - AP^2 \cdot AB - AB^2 \cdot AC + 2AP \cdot AB \cdot AC - AP^2 \cdot AC$$

$$+ AC^2 \cdot AB - 2AP \cdot AC \cdot AB + AP^2 \cdot AB$$

$$= AB \cdot AC \cdot (AC - AB) = AB \cdot AC \cdot BC = -BC \cdot CA \cdot AB.$$

(iv) 若シ P ガ BC ヲ二等分スルモハ, $AP = \frac{1}{2}(AB + AC).$

何トナレハ, $BP = -CP$

$$\therefore AP - AB = -(AP - AC),$$

即

$$2AP = AB + AC$$

ナレハナリ.

(v) 若シ A, B, C, D ガ一直線上ノ四點ニシテ, P ガ AB
ヲ二等分シ, Q ガ CD ヲ二等分スルモハ,

$$PQ = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

何トナレハ,

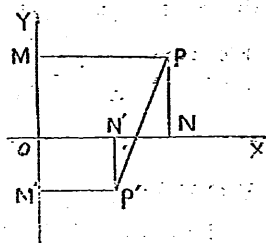
$$2PQ = 2PB + 2BC + 2CQ$$

$$= AB + BC + BC + CD$$

$$= AC + BD \text{ 或 } AD + BC$$

ナレハナリ.

(5) 學者ハ前諸定理ノ圖ニ於テ線分ハ左ヨリ右ノ方ヘ度リタルモノヲ正量トシタルコトヲ了知セルナラフ. 是レ普通行ハルハ所ナリト雖何レヲ正ト撰フモ全ク隨意ナリ. 唯緊要ナルハ何レノ方向ヲ正トスルモ之ニ反對スルモノヲ必ズ負トセザル可ラザルコトナリ. 向 (Sense) ト云フ語ヲ用非テ此區別ヲ表示ス. 即 AB 及 BA ハ同シ線分ヲ相反スル向ニ取リタルモノヲ表ス. 向ノ思想ハ唯一直線上ノ諸線分ニノミ之ヲ用非タリト雖尙平行直線上ノ諸線分ニモ之ヲ應用スルヲ得. 例ヘハ今圖ノ如ク二點 P, P' ヨリ相直交スル二直線 OX, OY へ垂線ヲ引クルハ, PN ト P'N' ハ反對ノ向ヲ有シ, PM ト P'M' ハ同シ向ヲ有スルモノトス. 故ニ $PM - P'M' = NN'$ ナルト同シク $PN - P'N' = MM'$ ナリ.



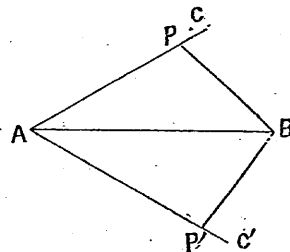
(6) 定義. 二點間ノ線分ヲ其二點ノ結ヒ (Join) ト名ク. 任意ノ一點ヨリ直線ヘ引クル垂線ノ足ヲ其點ノ射影 (Projection)^① ト云フ.

① 正射影 (Orthogonal projection) ノ器.

與ヘラレタル直線上ニ投スル一ノ線分ノ射影トハ其ノ兩端ノ射影ノ結ヒナリ. 例ヘハ (前圖中) PP' ノ OX 及 OY 上ノ射影ハ夫々 NN' 及 MM' ナリ.

任意ノ直線形 (閉チタル) ノ諸邊 (順次ニ取リタル) ノ一直線上ノ射影ノ和ハ零ナルコト容易ニ見ル可シ.

(7) 符號ノ約束ハ之ヲ擴張シテ角度ニモ用非ルコトヲ得. 今若シ角 BAC ヲ AB ノ位置ヨリ發シ A ヲ中心トシテ回轉スル直線ニ依テ作ラレタリトセハ角 BAC 及 BAC' ハ反對ノ符號ヲ有ス可シ. 又角 BAC 及 CAB ハ反對ノ符號ヲ有ス. 依リテ



$$BAC + CAB = 0.$$

平面形或ハ平面積ヲ作ルニハ必ズシモ向ノ思想ヲ要セザルヲ以テ. 符號ノ約束ハ常ニ面積ニ應用スルコト能ハズ. 然レモ面積ヲ作ルニ當リテ向ノ思想ノ含有セラルル時ハ又符號ノ約束ヲ應用スルコトヲ得. 例ヘハ二ノ三角形 ABP, ABP' (或ハ其他ノ圖形ニテモ) ガ一ノ直線 AB ノ反對ノ側ニ在ル時ハ ABP, ABP' ハ反對ノ符號ヲ有ス. 又 ABP ト BAP トハ反對ノ向ニ取リタル同面積ト

考フルコトヲ得、依テ $ABP+BAP=0$ ナリ。

中 點

定義. 一平面上ニ任意ニ分布セル n 個ノ點アリトシ、此平面上一點ヲ、此平面上ノ任意ノ一直線ヨリ其ノ距離ノ n 倍ガ同直線ヨリ與ヘラレタル諸點ノ距離ノ和ニ等シキ様ニ定ムル時ハ其點ヲ與ヘラレタル諸點ノ中點 (Centre of mean position 或ハ Centroid) ト稱ス。

任意ノ場合ニ於テ中點ヲ定ムルニハ次ノ如クス可シ。

(1) 平面上ニ相交ル任意ノ二直線ヲ取リ、各直線ヨリ n 點ノ距離ノ和ノ $1/n$ ニ等シキ距離ヲ以テ之ニ平行線ヲ引クニハ其二線ノ交點ハ即中點ナリ。

(2) 或ハ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ナ n 點トシ、先ツ A_1A_2 ナ結ビ付ク之ヲ B_1 ニ於テ二等分シ、次ニ B_1A_3 ナ結ビ付ク之ヲ B_2 ニ於テ $2B_1B_2=B_2A_3$ ナル様ニ二分シ、更ニ B_2A_4 ナ結ビ付ク之ヲ B_3 ニ於テ $3B_2B_3=B_3A_4$ ナル様ニ二分シ、逐次斯ノ如ク點ヲ悉ク結ビ付クタル時ハ最後ノ分點 B ハ求ムル所ノ中點ナル可シ。此方法ノ定ムル所ノ點ト前法ノ與フル所ノ點ト同一ナルコトハ次ノ如ク證明スルコトヲ得。

平面上ニ一ツノ直線ヲ取リ、垂線 A_1M_1, A_2M_2 等、 B_1N_1, B_2N_2 等ヲ引キ、又圖ノ如ク、此直線ニ平行シテ A_1m_1, B_1n_1, B_2n_2

A_3m_3 等ヲ引ク。然ルニ

ハ二ツノ全ク相等シキ

三角形 $A_2B_1n_1, B_1A_1m_1$ ニ

於テ、

$$A_2n_1 = B_1m_1;$$

$$\therefore 2B_1N_1 = A_1M_1 + A_2M_2;$$

又平行線ノ定理ニ依リテ、

$$B_1n_2 : n_2m_3 = B_1B_2 : B_2A_3;$$

$$\therefore 2B_1n_2 = n_2m_3, \quad \therefore 3B_2N_2 = 3n_2N_1 + 2B_1n_2 - n_2m_3$$

$$= 2B_1N_1 + A_3M_3$$

$$= A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3,$$

逐テ斯ノ如シ。遂ニ次ノ式ヲ得、

$$n \cdot BN = A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3 + \dots + A_nM_n.$$

且又此結果ヨリ推シハ、與ヘラレタル諸點ヲ結ビ付クル順序如何ニ關ヒズ常ニ同一ノ點 B ニ歸着スルコト明ナリ。

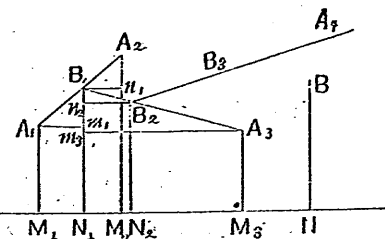
次ノ結果ハ直ニ定義ヨリ來ル。

(1) A, B, C, D 等ヲ同一直線上ノ n 個ノ點トシ、 O ナ其ノ中點トシ、 P ナ其直線上ノ任意ノ點トシハ、

$$AP+BP+CP+\dots=n \cdot OP,$$

又

$$AO+BO+CO+\dots=0.$$



(2) 若シ諸點が同一直線上ニ在ラザルハ、A, B, C, D 等ヲ其ノ一直線上ノ射影トシ、O ヲ中點ノ射影トシ、P ヲ其直線上ノ任意ノ點トセハ上ノ結果ハ尙ホ眞ナリ。

第一編ノ問題

(1) 定理 (4) [iii] ハ P 點ガ直線 ABC ノ外ニ在ル時モ尙ホ眞ナリ：之ヲ證明セヨ。

(2) A, B, C, D ガ同一直線上ノ四點ニシテ、P ガ他ノ任意ノ點ナレハ、次ノ關係アルヲ證明セヨ：

$$PA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB - PB^2 \cdot CD \cdot DA \cdot AG + PC^2 \cdot DA \cdot AB \cdot BD$$

$$- PD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

(3) A, B, C, D 等ガ一平面上ニ在ル n 箇ノ點ニシテ、O ガ其ノ中點、P ガ同平面上ノ他ノ任意ノ點ナレハ、

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + \dots = AO^2 + BO^2 + CO^2 + \dots + n \cdot OP^2.$$

第二編

三角形ノ性質

注意 原書ニ於テハ英國幾何學教授法改良協會平面幾何學條目ヨリ諸定理ヲ引用スト雖本書ニ於テハ總テ之ヲ菊池大麓編纂初等平面幾何學ヨリ取ルコトトセリ。定理 3 中ノ (V, 14) ノ如シ。

定義

(1) 一組ノ線ヲ横截スル任意ノ直線ヲ截線 (Transversal) ト名ク。

(2) 三箇以上ノ直線ガ一點ヲ過ルハ、其諸線ハ共點 (Concurrent) ナリト云フ。

(3) 三箇以上ノ點ガ一直線上ニ在ルハ、其諸點ハ共線 (Collinear) ナリト云フ。

(4) 四箇以上ノ點ガ一圓周上ニ在ルハ、其諸點ハ共圓 (Concyclic) ナリト云フ。

(5) 共點ナラザル三直線ノ一組ト其ノ三交點、或ハ共線ナラザル三點ノ一組ト之ヲ結ビ付クル三直線トハ相共ニ一ノ三角形ヲ成ス。⁽¹⁾

⁽¹⁾ 定義 (5) ハ條目中ニ見ザル所ノモノナリ。

本書ニ於テハ斯ノ如ク定義ヲ與フト正ク旨ヘハ、共點ナラザル三直線

此定義ハ初等平面幾何學ニ與フル所ノモノト異リ、度量的ナラズシテ圖形的ナルヲ見ルヘシ。即此ニ謂フ所ハ三箇ノ無限直線ノ作ル圖形ニシテ其線分ノ長、或ハ其ノ間ノ面積如何ニ關セズ。然レモ尙ホ此編中數箇ノ度量的定理ヲ證明スベシ。而シテ時々「三角形」ノ語ヲユウクリッド流ニ用フルヲアレモ其ノ爲ニ混雜ヲ來スヲナカルヘシ。

次ノ諸定理中、三角形 ABC ノ諸邊上ニ線分ノ大、ヲ測ルニ當リ向ヲ考フルヲ要スル時ハ A ヨリ B ノ方ニ、B ヨリ C ノ方ニ、C ヨリ A ノ方ニ至ルヲ正向トス。此規定ニ從フモハ諸邊ヲ順環ノ順序ニ取ルト云フ。掲クル所ノ諸圖中、三角形 ABC ヲ銳角ノモノナラシメ、AB ヲ最大邊、CA ヲ最小邊トシ、定理ヲ述フルニ當リテ圖中線ノ長、等ヲ總ヘテ正量ナラシムル様ニシタリ。若シ異リタル圖形ヲ畫クモハ(學者宜ク毎ニ之ヲ爲ス可キナリ)設令ハ鈍角三角形ヲ取ルトハ諸般ノ定理尙ホ嚴正ニ眞ニシテ唯諸量ノ向ニ注意ヲ要スルヲ知ル可シ。例ヘハ定理 12 ノ系ニ於テ $XX_1 = c - b$ ナルヲ證明ス; 若シ $b > c$ ナルモ此定理尙ホ眞ナリ、或ハ之ヲ $XX_1 = b - c$ ト述フルモ可ナリ。同様

ノ一組ト其ノ三交點ハ一ツノ三邊形ヲ成シ、共線ナラザル三點ノ一組ト之ヲ結ビ付クル三直線ハ三角形ヲ成ス。但此二者相同シキヲ以テ通シテ之ヲ三角形ト呼フナリ。第四編ノ四邊形ト四角形ノ定義ヲ參照セヨ。

ニ定理 22 ノ系ニ於テ、 $OA \perp BC$ ハ常ニ $C = B$ ニ等シ; 但若シ $B > C$ ナレハ、 AH ハ圖ノ如クナラズシテ OA ノ反對ノ側ニ在ルヘシ。

定理 1.

三角形ノ頂點 A, B, C ヲ過ル三ノ截線ガ共點線ニシテ、對邊ト夫々 D, E, F ニ於テ交ルモハ、

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB \quad (\text{セザ、Ceva ノ定理}).$$

三ノ截線ガ O ニ於テ交ルト

セヨ; 然ルモハ

$$BD : DC = \triangle ABD : \triangle ADC,$$

$$\text{又 } BD : DC = \triangle OBD : \triangle ODC;$$

$$\therefore BD : DC = \triangle ABO : \triangle CAO,$$

$$\text{同様ニ } CE : EA = \triangle BCO : \triangle ABO,$$

$$\text{又 } AF : FB = \triangle CAO : \triangle BCO;$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF : DC \cdot EA \cdot FB$$

$$= \triangle ABO \cdot \triangle BCO \cdot \triangle CAO : \triangle CAO \cdot \triangle ABO \cdot \triangle BCO,$$

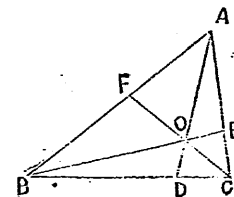
即

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB.$$

定理 2.

D, E, F ガ夫々三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ在リ

テ、 $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$ ナルモハ AD, BE, CF ハ共



點線ナリ (定理 1 の逆).

BE, CF が O に於て交ルトセヨ, 而シテ若シ AD が O を過ラザレハ, AO が BC と交ル點ヲ D' トセヨ; 然ルルハ

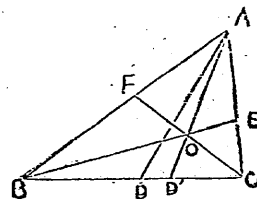
$$BD' \cdot CE \cdot AF = D'C \cdot EA \cdot FB,$$

然ルニ $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$;

$$\therefore BD' : D'C = BD : DC;$$

故ニ D' ハ D と合セザルヲ得ズ

[緒論 (2)]



定理 3.

三角形ノ内角ヲ二等分スル三直線ト外角ヲ二等分スル三直線トハ三ヶ宛四ヶノ點即内接及傍接スル圓ノ中心ニ於テ交ル.

AD, BE, CF ヲ内角ノ二等分線, AD', BE', CF' ヲ外角ノ二等分線トセヨ; 然ルルハ

$$BD : DC = AB : CA, \quad (V, 14)$$

$$CE : EA = BC : AB,$$

$$AF : FB = CA : BC;$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF : DC \cdot EA \cdot FB = AB \cdot BC \cdot CA : CA \cdot AB \cdot BC;$$

故ニ AD, BE, CF ハ共點線ナリ. (定理 2)

同様ニ AD, BE', CF', 及 BE, CF', AD', 及 CF, AD', BE' ニ就テ證明スルヲ得.

此定理ハ又三ヶノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫クヲ作圖題 (II, 作圖題 20) ニ依リテ直チニ之ヲ證明スルヲ得.

定義. 三角形ニ内接スル圓ヲ内接圓 (In-circle), 其ノ中心ヲ内心 (In-centre), 傍接スル圓ヲ傍接圓 (Ex-circle), 其ノ中心ヲ傍心 (Ex-centre) ト稱ス.⁽¹⁾

定理 4.

三角形ノ頂點ヲ夫々對邊ノ中點ト結ビ付クル直線ハ共點線ナリ.

此定理ハ定理 2 ヨリ直ニ推究スルヲ得, 或ハ次ノ如ク初等幾何學ノ方法ニ依リテ證明スルヲ得:⁽²⁾

A', B', C' ヲ三邊ノ中點トセヨ. BB', CC' ヲ結ビ付ク, 其ノ交點ヲ G トシ, AG, GA' ヲ結ビ付ケヨ.

然ルルハ, $\triangle BB'C = \triangle BB'A,$

⁽¹⁾ 内接圓ノ半徑ヲ内半徑ト稱シ, 傍接圓ノ半徑ヲ傍半徑ト稱ス.

⁽²⁾ 近世幾何學ノ教科書ニ於テ斯ノ如キ證明法ヲ掲ケルハ吾輩其ノ必要ヲ見ズ. 以下ニモ此類ノ例有リ.

$$\text{又 } \triangle GB'C = \triangle GB'A;$$

$$\therefore \triangle BGC = \triangle BGA.$$

$$\text{同様 } \triangle BGC = \triangle CGA;$$

$$\therefore \triangle BGA = \triangle CGA;$$

$$\text{又 } \triangle BGA' = \triangle CGA';$$

$$\therefore \text{圖形 } BAGA' = \text{圖形 } CAGA';$$

故ニ各三角形 ABC ノ半分ナリ; 故ニ G ハ AA' ノ上ニ在ルヲ要ス.

定義 此定理中ノ三截線ヲ三角形ノ中線 (Median), 其ノ交點ヲ重心 (Centroid) ト稱ス.

定理 5.

三角形ノ頂點ヨリ夫々對邊ヘ引クル垂線ハ共點線ナリ.

AD, BE, CF ヲ三ノ垂線トセヨ;

然ルルハ三角形 BDA, BFC ハ相似ナルヲ以テ,

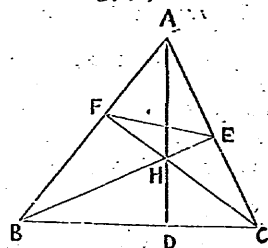
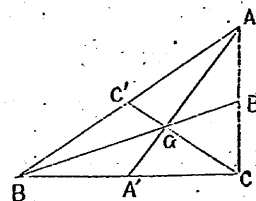
$$BD:FB = AB:BC.$$

$$\text{同様 } CE:DC = BC:CA,$$

$$\text{又 } AF:EA = CA:AB;$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF : FB \cdot DC \cdot EA$$

$$= AB \cdot BC \cdot CA : BC \cdot CA \cdot AB;$$



$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB,$$

故ニ AD, BE, CF ハ共點ナリ (定理 2).

此定理ハ又次ノ如ク獨立ニ證明スルヲ得:

夫々 CA, AB へ引クル垂線 BE, CF ガ H ニ於テ交ルトセヨ.

AH ヲ結ビ付ク, HD ヲ BC へ垂線ニ引ク.

然ルルハ 角 AHF = AEF (A, E, H, F ハ共圓ナルヲ以テ)

$$= FEC \text{ ノ補角}$$

$$= FBC \text{ (E, F, B, C ハ共圓ナルヲ以テ)}$$

$$= FHD \text{ ノ補角 (F, B, D, H ハ共圓ナルヲ以テ);}$$

故ニ AHD ハ一直線ナリ;

故ニ三ノ垂線ハ共點ナリ.

定義 三ノ垂線ヲ三角形ノ高サ (Altitudes) ト稱シ, 其ノ交點ヲ垂心 (Orthocentre) ト稱ス.

定理 6.

三角形ノ頂點ヲ夫々之ニ對スル內接圓ノ切點ト結ビ

付クル直線ハ共點線ナリ.

圓ガ BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 X, Y, Z トセヨ,

然ルルハ

$$AZ = YA, \quad BX = ZB, \quad CY = XC$$

ナルヲ以テ, 此定理ハ直ニ定理 2 ヨリ來ル.

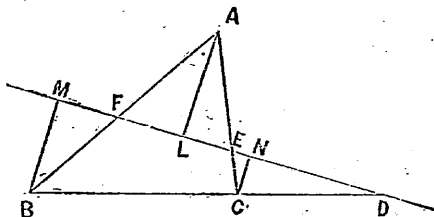
系 傍接圓ニ就テモ同様ノ定理ヲ證明スルヲ得.

定理 7.

一ノ截線ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, Fニ於テ交ルルハ, $BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB$.

(メネラウス Menelaus ノ定理)

AL, BM, CN ヲ DEF
ヘ垂線ニ引ク. 然ル
ルハ相似三角形ノ理
ニ依リ, 線分ノ向ヲ
モ考ヘテ,



$$BD : -DC = BM : CN,$$

$$CE : EA = CN : -AL, \quad AF : FB = -AL : BM;$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF : -DC \cdot EA \cdot FB = -BM \cdot CN \cdot AL : -CN \cdot AL \cdot BM;$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB.$$

定理 8.

D, E, F ガ夫々三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ在リ
テ, $BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB$ ナルルハ, D, E, F ハ共
線點ナリ. (定理 7 ノ逆)

FE ガ BC ト交ル點ヲ D' トセヨ; 然ルルハ, 定理 7 ニ依リ,

$$BD' \cdot CE \cdot AF = -D'C \cdot EA \cdot FB,$$

$$\text{然ルニ} \quad BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB;$$

$$\therefore BD' : D'C = BD : DC,$$

即 D' ハ D ト合ス (結論 (2)).

定理 9.

三角形ノ内角及外角ヲ二等分スル直線ハ夫々對邊ト
六ノ點ニ於テ交リ, 此六點ハ三ノ宛四直線上ニ在リ.

三ノ内角ノ二等分線ガ夫々對邊ト D, E, F ニ於テ交リ,
外角ノ二等分線ガ之ト D', E', F' ニ於テ交ルトセヨ; 然ル
ルハ

$$BD : DC = AB : CA,$$

$$CE : EA = BC : AB,$$

$$-AF' : F'B = CA : BC;$$

$$\therefore -BD \cdot CE \cdot AF' = DC \cdot EA \cdot F'B;$$

故ニ D, E, F' ハ共線點ナリ (定理 8).

同様ニ E, F, D' 及 F, D, E' 及 D', E', F' モ共線點ナリ.

定理 10.

外接圓周上ノ一點ヨリ三角形ノ邊ヘ引ケル垂線ノ足
ハ共線點ナリ.

ABC ヲ三角形トシ, PL, PM, PN ヲ夫々 BC, CA, AB ヘ引

クル垂線トセヨ. LN, NM ヲ結ビ付ケヨ.

PNB, PLB ハ各直角ナルヲ以テ, P, N, L, B ハ共圓點ナリ;

同様ニ P, M, A, N モ共圓點ナリ;

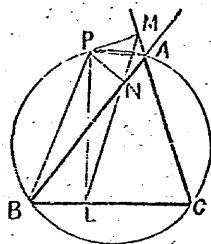
$\therefore$ 角 $PNL = PBL$ ノ補角

$= PAC$

$= PAM$ ノ補角

$= PNM$ ノ補角;

故ニ LMN ハ一直線ナリ.



定義. 直線 LMN ヲ P 點ノ「シム
ソ」線 (Simson line) 或ハ垂足線 (Pedal line) ト稱ス.

三角形ニ外接スル圓ヲ外接圓 (Circumcircle), 其ノ中心ヲ
外心 (Circumcentre), 其ノ半徑ヲ外半徑 (Circumradius) ト稱ス.

定理 11 乃至 32ニ於テ三角形 ABC ニ就テノ記號ハ次
ノ如シ:—

A', B', C' ハ夫々邊 BC, CA, AB ノ中點ナリ;

AD, BE, CF ハ此三邊ヘ引ケル垂線ナリ;

G ハ重心, H ハ垂心ナリ;

O ハ外心, N ハ九點圓ノ中心ナリ;

I, I_1, I_2, I_3 ハ夫々內心及傍心ナリ;

X, Y, Z ハ内接圓ガ夫々邊 BC, CA, AB ニ切スル點;

X_1, Y_1, Z_1 ハ A ニ對スル傍接圓ガ邊ニ切スル點ナリ;

R, r, r_1, r_2, r_3 ハ夫々外半徑, 內半徑, 及傍半徑ナリ;

a, b, c, s, Δ ハ三邊ノ長, 半周, 及面積ナリ.

定理 11.

$AZ + BC = BX + CA = CY + AB = \text{半周};$

或ハ $AZ = YA = s - a, \quad BX = ZB = s - b,$

$CY = XC = s - c.$

$AZ = YA, BX = ZB, CY = XC$

(II, 22, 系)

ニシテ, 且此六ツノ線分ガ相合

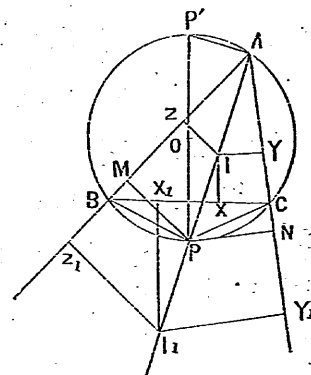
シテ三角形ノ周ヲ作ルヲ以テ,

$AZ + BX + XC = \text{半周};$

即 $AZ + BC = \text{半周},$

或ハ $AZ = s - a,$

同様ニ $BX = s - b, CY = s - c.$



定理 12.

$AZ_1 = BX_1 + AB = X_1C + CA = \text{半周};$

或ハ $AZ_1 = Y_1A = s; \quad BX_1 = BZ_1 = s - c; \quad X_1C = Y_1C = s - b.$

周 $= AB + BX_1 + X_1C + CA,$

$= AB + BZ_1 + Y_1C + CA$ (II, 22, 系)

$= AZ_1 + Y_1A = 2AZ_1;$

$\therefore AZ_1 = BX_1 + AB = Y_1A = X_1C + CA = \text{半周};$

或ハ $AZ_1 = Y_1A = s; BX_1 = BZ_1 = s - c; X_1C = Y_1C = s - b.$

系 $X_1X = BX - BX_1 = (s - b) - (s - c) = c - b.$

又 $XX_2 = BX_2 - BX = s - (s - b) = b.$

同様ニ $XX_3 = c.$

定理 13.

$$\Delta = rs = r_1(s - a) = r_2(s - b) = r_3(s - c).$$

$\Delta = \text{三角形 } BCI, CAI, ABI \text{ ノ和}$

$$= \frac{1}{2}(ra + rb + rc) = rs.$$

又 $\Delta = ABI_1 + CAI_1 - BCI_1 = \frac{1}{2}(r_1c + r_1b - r_1a) = r_1(s - a);$

其他モ亦同様ナリ.

定理 14.

$$AA' = 3GA'; BB' = 3GB'; CC' = 3GC'.$$

$A'B'$ ヲ結ビ付クレハ (定理 4 ノ圖ヲ見ヨ), AB ハ之ニ平行ナリ, 而シテ二ノ三角形 $ABC, B'A'C$ ハ相似ナリ.

$$\therefore AB : B'A' = BC : A'C = 2 : 1.$$

又 ABG 及 $A'B'G$ モ相似ナリ;

$$\therefore AG : GA' = AB : B'A' = 2 : 1;$$

$\therefore AA' = 3GA'. \quad \text{其他モ亦同様ナリ.}$

定理 15.

AB, AC ノ夾ム内角及外角ヲ二等分スル直線カ外接圓ト夫々 P, P' ニ於テ交ルルハ, PP' ハ圓ノ直徑ニシテ BC ヲ二等分ス.

角 PAP' ハ直角ナルヲ以テ PP' ハ直徑ナリ (II, 18), 而シテ弧 $BP = \text{弧 } PC$ ナルヲ以テ, 直徑 PP' カ BC ヲ直角ニ二等分スルヲハ容易ニ證明スルヲ得.⁽¹⁾

定理 16.

$$PI = PB = PC.$$

BI ヲ結ビ付クヨ. 然ルルハ角 $BIP = IAB + IBA = \frac{1}{2}(A + B).$ 又 角 $IBP = PBC + IBC = PAC + IBC$ (II, 16).

$$= \frac{1}{2}(A + B);$$

$\therefore$ 角 $BIP = IBP$, 故ニ $PI = PB = PC.$

系 ICI_1 ハ直角ナルヲ以テ, P ヲ中心トシ PI ヲ半徑トセル圓ハ B, C, I_1 ヲ過リ $PI_1 = PI = PB = PC.$

定理 17.

$$PM \text{ カ } AB \text{ = 垂線ナレハ, } 2AM = b + c; \quad 2MB = c - b.$$

⁽¹⁾ 此證明ハ原書ニ於ケルモノト稍異レリ.

PNヲACへ垂線ニ引ク; 然ルニハ二ノ三角形PAM, PANハ全ク相等シク, $AM = AN$, $PM = PN$.

又二ノ三角形PBM, PCNニ於テ, $PB = PC$, $PM = PN$, 而シテM及Nニ於テノ角ハ共ニ直角ナリ;

$$\therefore MB = NC \quad (\text{I, 22系甲}).$$

$$\text{故ニ} \quad 2AM = AM + AN = AB - MB + AC + CN = c + b.$$

$$\text{又} \quad 2MB = 2(AB - AM) = 2AB - (c + b) = c - b.$$

定理 18.

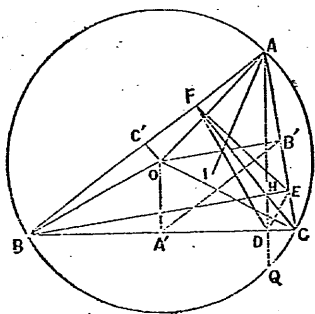
$$4R \cdot \Delta = abc.$$

角 $AOB = 2C$ (II, 15); $\therefore$ 角 $BOC' = C$ 故ニ二ノ三角形ADC, $BC'O$ ハ相似ニシテ, $AD:AC = BC':BO$;

$$\therefore 2R \cdot AD = bc; \quad \therefore 2R \cdot AD \cdot a = abc,$$

即

$$4R \cdot \Delta = abc.$$



定理 19.

A, B, C, Hノ中, 任意ノ一點ハ他ノ三點ヲ結ビ付クテ作リタル三角形ノ垂心ナリ.

三角形HBCノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル三ノ垂線HD, BE, CEハAニ於テ相交ルヲ明ナリ; 他ノ三角形ニ就テモ亦同様ナリ.

定理 20.

$$\text{角 } BHF = CHE = A, \quad \text{角 } CHD = AHF = B,$$

$$\text{角 } AHE = BHD = C.$$

角BHFハ角HBFノ餘角ニシテ, Aモ亦同シ角ノ餘角ナリ; $\therefore$ 角 $BHF = CHE = A$; 其他モ亦同様ナリ.

定理 21.

三角形AEF, DBF, DECハ各ABCニ相似ナリ.

BEC及CFBハ共ニ直角ナルヲ以テ, BCヲ直径トセル半圓ハE及Fヲ過ル.

$$\therefore FEC + B = \text{二直角} = FEC + FEA;$$

$$\therefore \text{角 } FEA = B. \quad \text{同様ニ} \quad EFA = C;$$

故ニ三角形AEFハABCニ相似ナリ; 其他ニ就テモ亦同様ナリ.

定理 22.

AI, BI, CI ハ夫々角 OAH, OBH, OCH ヲ二等分ス.

角 AOC' ハ AOB ノ半分ナリ, 故ニ C = 等シ; 而シテ AC'O 及 ADC ハ直角ナリ;

∴ OAC' = CAD. 而シテ AI ハ角 BAC ヲ二等分スルヲ以テ又角 OAH ヲ二等分ス; BI 及 CI = 就テモ同様ナリ.

$$\begin{aligned} \text{系. } OAH &= A - 2DAC = A - 2(90^\circ - C) \\ &= A - (A + B + C) + 2C \\ &= C - B. \end{aligned}$$

同様ニ OBH = C - A, OCH = A - B.

定理 23.

A, B, C, H ハ垂足三角形 DEF ノ邊ニ切スル所ノ四ツノ圓ノ中心ナリ.

HD ハ BC = 垂線ナルヲ以テ二ツノ角 HDE, HDF ハ夫々 CDE 及 FDB ノ餘角ナリ, 而シテ後ノ二角ハ各 A = 等シ (定理 21).

故ニ DH 及 BDC ハ FD, DE ノ夾ム内角及外角ヲ二等分ス; 之ニ依リテ直ニ定理ヲ得.

定理 24.

$$\underline{AH = 2OA'; BH = 2OB'; CH = 2OC'}.$$

三角形 HAB ノ邊ハ夫々 OA'B' ノ邊ニ平行ナルヲ以テ, 二ツノ三角形ハ相似ナリ; 而シテ AB = 2A'B' ナルヲ以テ, AH = 2OA', BH = 2OB', 同様ニ CH = 2OC' ナリ.

定理 25.

AD ヲ延長シ外接圓ト Q = 於テ交ラシムレハ,

$$\underline{HD = DQ}.$$

BQ ヲ結ビ付ケヨ;

然ルルハ 角 QBC = QAC = C ノ餘角
= CBE.

而シテ BD ハ二ツノ三角形 HBD 及 QBD = 共通ニシテ且 HQ = 垂線ナリ.

$$\therefore HD = DQ.$$

定理 26.

$$\underline{\text{矩形 } AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF}.$$

二ツノ三角形 AHE, BHD ハ相似ナルヲ明ナリ;

$$\therefore AH : HE = BH : HD;$$

$\therefore$ 矩形 $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$
(二つの三角形 AHE, CHD 等).

定理 27.

A', B', C', D, E, F , 及 HA, HB, HC ノ中點ハ一ノ圓周ノ上ニ在リ.

$B'D, C'D$ ナ結ビ付ケヨ; 然ルニハ B' ハ AC ナ直徑トセ
ル圓ノ中心ナルヲ以テ, $B'D = B'A$;

$\therefore$ 角 $B'DA = B'AD$.

同様ニ $C'DA = C'AD$;

$\therefore C'DB' = A$.

又 $C'A'$ 及 $B'A'$ ハ夫々 CA 及 BA ニ平行ナルヲ以テ,

角 $C'A'B' = A$;

$\therefore C'DB' = C'A'B'$;

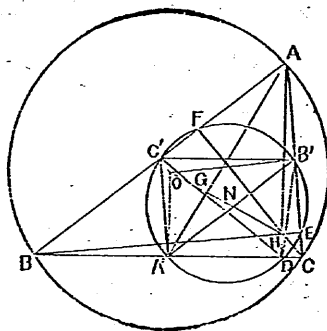
故ニ A', B', C' ナ過ル圓ハ D
ヲ過ル.

同様ニ又 E 及 F ナ過ル.

即 DEF ノ外接圓ハ三角形
 ABC ノ邊ノ中點ヲ過ル.

同様ニ同ノ圓ガ HBC, HCA ,
 HAB ノ邊ノ中點ヲ過ルコト

ヲ知ル (定理 19).



系. $A'D$ ナ直角ニ二等分スル直線ハ此圓ノ中心及 OH
ノ中點ヲ過ル; 而シテ $B'E$ ナ直角ニ二等分スル直線モ
亦同シ二點ヲ過ルヲ以テ, 此圓ノ中心ハ OH ノ中點 N ナ
リ.

又三角形 $A'B'C'$ ノ邊ハ夫々三角形 ABC ノ邊ノ半分ナ
ルヲ以テ, 此 $A'B'C'$ ノ外接圓ノ直徑ハ ABC ノ外接圓ノ直
徑ノ半分ニシテ^(*) 即 $R = 等シ$.

定義. 此定理ニ於テ提出シタル圓ヲ三角形 ABC ノ
九點圓 (Nine-point circle) ト稱ス.

定理 28.

G ハ OH ノ上ニ在リテ, $OH = 3OG$ ナリ.

AA' ガ OH ト G' ニ於テ交ルトセヨ. 然ルニハ二ノ三
角形 $AG'H, A'G'O$ ハ相似ナリ, 而シテ $AH = 2A'O$ (定理 21);

$\therefore G'H = 2OG', AG' = 2G'A'$.

然ルニ $AG = 2GA'$; 故ニ G' ハ G ト合シ, $GH = 2OG$;

即 $OH = 3OG$.

^(*) 二ノ相似形ニ於テ, 相對應スル線分ガ比例ヲ爲スノハ容易ニ證明スル
ヲ得.

定理 29.

$$IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

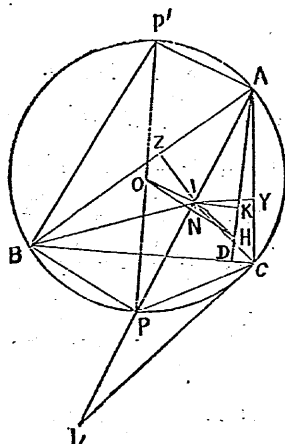
P'B を結ビ付ケヨ. 然ルニハ
角 BP'P = BAP ナルヲ以テ, ニッ
ノ三角形 BP'P 及 ZAI ハ相似
ナリ;

$$\therefore PP' : PB = AI : IZ,$$

即 $2Rr = PB \cdot AI = PI \cdot AI$ (定理 16)

$$= R^2 - OI^2 \text{ (III, 14)};$$

$$\therefore OI^2 = R^2 - 2Rr.$$



定理 30.

$$IH^2 = 2r^2 - AH \cdot HD.$$

CI₁ を結ビ付ケ, IK を AD へ垂線 = 引ケ.

然ルニハ, $ICI_1 = \text{直角} = \frac{1}{2}(A + B + C);$

$$\therefore ACI_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + C = AIB;$$

故ニニッノ三角形 AIB, ACI₁ ハ相似ニシテ,

$$AI \cdot AI_1 = AB \cdot AC = 2R \cdot AD \text{ (定理 18)};$$

即 $2AI \cdot AP - AI^2 = 2R \cdot AD$

(定理 16 系ニ依リ, $PI = PI_1$ ナルヲ以テ);

$\therefore 2AK \cdot 2R - AI^2 = 2R \cdot AD$ (相似三角形 AIK, PP'A),

即 $4R \cdot AK = 2R \cdot AD + AI^2.$

又 $IH^2 = AI^2 + AH^2 - 2AH \cdot AK.$

故ニ $2R \cdot IH^2 = 2R \cdot AI^2 + 2R \cdot AH^2 - AH \cdot 4R \cdot AK$

$$= 2R \cdot AI^2 + 2R \cdot AH^2 - AH(2R \cdot AD + AI^2)$$

$$= (2R - AH) AI^2 - 2R \cdot AH(AD - AH)$$

$$= (2OP - 2OA') AI^2 - 2R \cdot AH \cdot HD \text{ (定理 24)}$$

$$= 2A'P \cdot AI^2 - 2R \cdot AH \cdot HD$$

$$= 2r \cdot PB \cdot AI - 2R \cdot AH \cdot HD$$

(相似三角形 BA'P, AYI)

$$= 2r \cdot r \cdot 2R - 2R \cdot AH \cdot HD$$

(相似三角形 P'BP, AYD);

$$\therefore IH^2 = 2r^2 - AH \cdot HD.$$

定理 31.

$$OH^2 = R^2 - 2AH \cdot HD.$$

$$AH \cdot HQ = R^2 - OH^2 \text{ (III, 14)};$$

$$\therefore AH \cdot 2HD = R^2 - OH^2 \text{ (定理 25)},$$

即 $OH^2 = R^2 - 2AH \cdot HD.$

定理 32.

$$NI = \frac{1}{2}R - r.$$

N は OH の中點ナルヲ以テ,

$$2IN^2 + \frac{1}{2}OH^2 = IO^2 + IH^2 \quad (\text{III, 12})$$

$$\text{即} \quad 2IN^2 + \frac{1}{2}R^2 - AH \cdot HD = R^2 - 2Rr + 2r^2 - AH \cdot HD \quad (\text{定理 29, 30, 31})$$

$$\therefore 4IN^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2,$$

$$\text{故ニ} \quad 2IN = R - 2r.$$

系. 此定理ハ九點圓ノ半徑ト内接圓ノ半徑トノ差ガ其ノ中心ノ間ノ距離ニ等シキヲ證明ス, 即二ノ圓ガ内切スルヲ證ス. 此性質ヲフエイエルバハ (Feuerbach) ノ定理ト稱ス.

此趣味有ル定理ノ次ニ掲クル處ノ獨立ノ證明ハダブリユーハーヴェー (W. Harvey) 氏ノ發見シタルモノヲ稍修正シタルモノニシテエジノボロー數學會記事第五卷 102 頁ヨリ採萃セルモノナリ.

A'D ヲ直角ニ二等分スル九點圓ノ直徑 RLNR' ヲ引ク. KIK' ヲ A'D ニ平行ニ引ク. RD, R'D, C'D, C'A', NX ヲ結ビ付クヨ.

然ルニハ C' ハ ABD ノ外心ナルヲ以テ, AC'D = 2B; 而

シテ C'A' ガ CA ニ平行ナルヲ以テ, 角 AC'A' ハ A ノ補角ナリ, 故ニ B+C = 等シ;

$$\therefore \text{角 A'C'D} = C - B.$$

$$\text{又角 RR'D} = \frac{1}{2} \text{A'C'D} =$$

$$\frac{1}{2}(C-B) = \text{IAD} \quad (\text{定理 23 系});$$

故ニ四ノ三角形 RR'D,

RDL, IAK, IPK' ハ皆相

似ナリ.

$$\text{故ニ} \quad \frac{A'X}{BP} = \frac{KI}{PI} = \frac{RD}{R} \quad (\text{定理 16, 及 27 系})$$

$$\text{又} \quad \frac{XD}{AI} = \frac{IK}{AI} = \frac{RL}{RD};$$

$$\text{又} \quad \frac{BP}{2R} = \frac{IZ}{AI} = \frac{r}{AI} \quad (\text{相似三角形 PBP', IZA});$$

$$\therefore \frac{A'X}{BP} \cdot \frac{XD}{AI} \cdot \frac{BP}{2R} = \frac{RD}{R} \cdot \frac{RL}{RD} \cdot \frac{r}{AI};$$

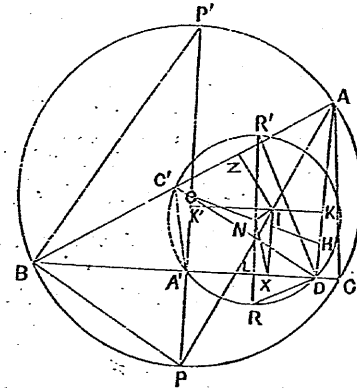
$$\text{故ニ} \quad A'X \cdot XD = 2r \cdot RL,$$

$$\text{即} \quad \frac{R^2}{4} - NX^2 = 2r \cdot RL \quad (\text{III, 14}) \dots \dots \dots (1)$$

又三角形 NIX ニ於テ

$$NX^2 + IX^2 - NI^2 = 2IX \cdot NL = 2r \cdot NL;$$

$$\text{故ニ} \quad (1) = \text{依リ} \quad \frac{R^2}{4} + r^2 - NI^2 = 2r \cdot NR = rR;$$



$$\therefore NI^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$$

依リテ定理ヲ得.

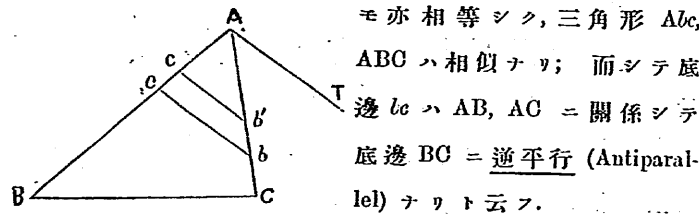
倒形法ヲ用井テ此定理ヲ證明スル方法ハ後ニ述フベシ.

上ニ與ヘタル方法ト同様ニシテ九點圓ガ傍接圓ニ切スルヲ證明スルヲ得. Aニ對スル傍接圓ニ就テハ, 定理 29 及 30 ハ次ノ如クナルヘシ:

$$I_1O^2 = R^2 + 2Rr_1, \quad I_1H^2 = 2r_1^2 - AH \cdot HD.$$

逆平行線, 類似中線 及 類似重心

定義. ABCヲ三角形トシ二點 b, c ヲ夫々 CA, ABノ上ニ角 Acb ガ角 ABC ニ等シキ様ニ取ルルハ角 Acb , 角 ACB モ亦相等シク, 三角形 Abc , ABC ハ相似ナリ; 而シテ底邊 bc ハ AB, ACニ關係シテ



底邊 BC ニ逆平行 (Antiparallel) ナリト云フ.

附言. 四點 B, c, b, C ハ共圓點ナリ, 何トナレハ四邊形 $BcbC$ ノ對角ノ和ガ二直角ニ等シクレハナリ.

逆平行線 bc ハ他ノ任意ノ逆平行線 $b'c'$ ニ平行ニシテ

又外接圓ノ Aニ於テノ切線 AT ニ平行ナリ. (角 $TAC = ABC = Abc$ ナルヲ以テ). 故ニ其ノ方向ハ確定シタルモノナリ.

定理 33.

PQRヲ外接圓ノ A, B, Cニ於テノ切線ノ作リタル三角形トスレハ, AP, BQ, CR ハ夫々 BC, CA, AB ニ逆平行ナル總テノ直線ヲ二等分シ又共點線ナリ.

Pヲ過リ BC ニ逆平行線 R ヲ引ク.
即 QAR ニ平行線 $\beta\gamma$ ヲ引ク.

然ルルハ

$$\begin{aligned} \text{角 } P\gamma B &= RAB = RBA \\ &\quad (RA = RB) \end{aligned}$$

$$= \gamma BP;$$

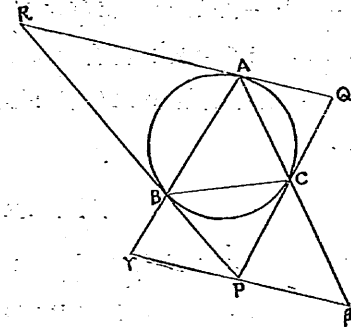
$$\therefore P\gamma = PB.$$

$$\text{同様ニ } P\beta = PC.$$

而シテ $PB = PC$ ナルヲ以テ, Pハ $\beta\gamma$ ノ中點ナリ. 而シテ AP ハ $\beta\gamma$ ヲ二等分スルヲ以テ, $\beta\gamma$ ニ平行ニシテ其ノ端ヲ AB, ACノ上ニ有スル總テノ直線即 BC ニ逆平行ナル總テノ直線ヲ二等分ス; BQ, CR ニ就テモ同様ナリ.

$$\text{又 } BP = PC, CQ = QA, AR = RB \text{ナルヲ以テ,}$$

$$PC \cdot QA \cdot RB = CQ \cdot AR \cdot BP;$$



故に PA, QB, RC は共點線ナリ (定理 2).

定義. 三角形ノ頂點ヲ過リ, 底邊ニ逆平行ナル直線ヲ二等分スル直線ヲ類似中線 (Symmedian lines) ト稱ス.

三ノ類似中線ノ交點 K ヲ類似重心 (Symmedian point) 或ハルモアヌ (Lemoine) 點ト稱ス.

附言. 類似中線ト云フ名稱ハ其ノ性質ノ三角形ノ中線ニ似タルヨリ來ル; 即中線 AA', BB', CC' ガ夫々 BC, CA, AB ニ平行ナル直線ノ二邊ノ間ニ在ル部分ヲ二等分シ且ツ重心ニ於テ出會フガ如ク (定理 4) 類似中線 AP, BQ, CR ハ逆平行線ヲ二等分シ且ツ類似重心 K ニ於テ出會フ.

定理 34.

三角形ノ一頂點ヲ K, G ト結ビ付クル二直線ハ其角ノ二等分線ト相等シキ角ヲ爲ス.

BC ニ逆平行線 bc ヲ引キ, AK

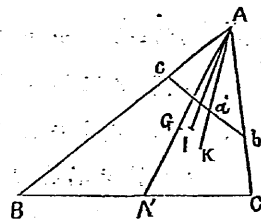
ガ之ヲ α ニ於テ二等分ストセヨ.

然ルニハ $AB:BC = Ab:bc$ ナルヲ

以テ, $AB:BA' = Ab:ba$;

故ニ二ノ三角形 ABA', Aba ハ相

似ニシテ, 角 $BAA' = bAa$.



同様ニ 角 $CAA' = cAa$.

而シテ 角 BAI, CAI ハ相等シキヲ以テ, 角 GAI, KAI モ亦相等シ.

定義. K ト G トノ如ク此定理ニ於テ證明シタル性質ヲ有スル一雙ノ點ヲ等角共軛點 (Isogonal conjugates) ト稱ス.⁽⁶⁾

定理 35.

二點 S, S' ガ三角形 ABC ノ二頂點 A 及 B ニ就テ等角共軛ナルニハ, 頂點 C ニ就テモ亦等角共軛ナリ; 而シテ此二點ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ.

L, M, N 及 L', M', N' ヲ S, S' ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ノ足トセヨ. 相似三角形ニ依リテ,

$$SN:SA = S'M':S'A,$$

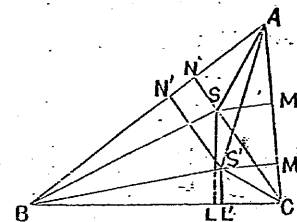
$$SA:SM = S'A:S'N',$$

$$\therefore SN:SM = S'M':S'N',$$

$$\text{即} \quad SN \cdot S'N' = SM \cdot S'M',$$

$$\text{同様ニ} \quad SN \cdot S'N' = SL \cdot S'L';$$

$$\therefore SM \cdot S'M' = SL \cdot S'L',$$



⁽⁶⁾ 此定義稍不明ナリ: AG, AK ノ如ク角 BAC ノ二等分線ト相等シキ角ヲ爲ス直線ハ角ノ邊ニ就テ各他ノ等角共軛線ナリト云フ. 各三角形ノ一頂點ヲ過ル三ノ共點線ノ等角共軛線モ亦共點線ニシテ, 兩組ノ交點ヲ各他ノ等角共軛點ト云フ.

即

$$SL:SM = S'M':S'L'$$

故ニ OS, OS' が角 AOB ナ、其ノ上ノ點ヨリ邊ヘ引ケル垂線ノ比ガ相等シキ様ニ分ツヲ以テ、 S, S' ハ O ニ就テモ等角共観點ナリ。

定理 36.

類似重心 K ノ三邊ヨリノ垂線距離ハ其邊ト比例ヲナス。

$AA' = 3GA'$ (定理 14) ナルヲ以テ、重心 G ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ハ夫々 AD, BE, CF ノ三分ノ一ナリ；而シテ AD, BE, CF $OA = OE, AB = 2AD$ ナルヲ以テ、 G ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ハ三邊ト逆比例ヲ爲ス；故ニ K ヨリ引ケル垂線ハ三邊ト正比例ヲ爲ス。

定理 37.

垂足三角形ノ三邊ハ原三角形ノ三邊ニ逆平行ニシテ、夫々外接圓ノ之ニ對スル半徑ニ垂線ナリ。

B, F, E, C ハ共圓點ナルヲ明ナリ；故ニ EF ハ BC ニ逆平行ナリ。故ニ EF ハ外接圓ノ A ニ於テノ切線ニ平行ニシテ即チ半徑 OA ニ垂線ナリ。

プロカール點

定理 38.

A ニ於テ邊 AB ニ切シ C ナ過ル圓ヲ畫キ、 AR ハ BC ニ平行ナル弦ニシテ、 BR ガ圓ト再ヒ Ω 點ニ於テ交ルトセ

ハ
角 $\Omega BC = \Omega CA = \Omega AB$ ナリ。

AR ハ BC ニ平行ナルヲ

以テ、

$$\text{角 } \Omega BC = \Omega RA = \Omega CA, \\ (\text{同シ弓形ニ於テ})$$

又 BA ハ圓ニ切スルヲ以

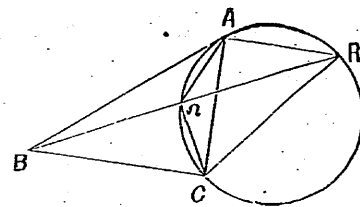
テ、

$$\text{角 } \Omega AB = \Omega CA.$$

定義。此相等シキ角ヲ三角形ノ プロカール (Brocard) 角ト稱シ、 ω ナ以テ之ヲ表ハス。

定理 39.

三角形ノプロカール角ハ唯三角形ノ形ニ關シ、總テノ相似三角形ニ就テ同一ナリ。



CRヲ結ビ付ケヨ(前ノ圖ヲ見ヨ). 然ルニハ角 $BAC = CRA$ (II, 23); 而シテ ARガBCニ平行ナルヲ以テ, 角 $BCA = CAR$; 故ニ二ツノ三角形 ABC, RCAハ相似ナリ; 故ニ ABCト相似ナル總テノ三角形ニ就テハ, ABCRノ如キ四邊形ハ相似形ナルヲ以テ, 角 RBC即 ω ハ斯ノ如キ三角形ニ於テ同一ナリ.

定義. Ω 點ヲアポカール正點ト稱ス. 而シテ Aニ於テ ACニ切シ Bヲ過ル圓ヲ書キ, 弦 AR'ヲCBニ平行ニ引キ CR'ガ圓ト交ル點 Ω' ヲアポカール負點ト稱ス.

此場合ニ於テ, 角 $\Omega'CB = \Omega'AC = \Omega'BA = \omega$; 何トナレバ, 二ツノ三角形 R'CB, RBCハ全ク相等シキヲ容易ニ證明シ得可キヲ以テ, 角 $\Omega'CB = \Omega'BC = \omega$ ナレハナリ. 故ニ二點 Ω, Ω' ハ等角共軛點ニシテ, 各邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ.

定理 40.

$$\text{角 } B\Omega C = C \text{ ノ補角} = C\Omega'A,$$

$$\text{角 } C\Omega A = A \text{ ノ補角} = A\Omega'B,$$

$$\text{角 } A\Omega B = B \text{ ノ補角} = B\Omega'C.$$

角 $B\Omega C$ ハ $\Omega BC + \Omega CB$ ノ補角ナリ;

故ニ $\omega + (C - \omega)$ ノ補角ナリ

即

Cノ補角ナリ.

其他皆同様ナリ.

附言. 二ツノアポカール點ハ次ノ如クシテ之ヲ區別スルヲ得. 正點ニ付テハ ω ヲ度ルニ正循環ノ順序ニ從ヒ, $\Omega BC, \Omega CA, \Omega AB$ トス; 負點ニ付テハ其ノ順序ヲ反對ナラシメ, $\Omega'CB, \Omega'BA, \Omega'AC$ トス.

次ノ諸定理ニ於テハ三角形 ABCノ頂點ヲ Aトシ, 底邊ノ左端ヲ B, 右端ヲ Cトス.

三 乘 比 圓

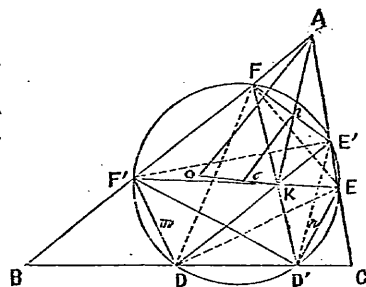
定理 41.

類似重心 Kヲ過リ夫々三邊ニ平行ニ $F'KE, D'KE, E'KD$ ヲ引クキハ, 六點 D, D', E, E', F, F'ハ KOノ中點 σ ヲ中心トセル圓ノ上ニ在リ.

AFKE'ハ平行四邊形ナルヲ以テ, AKハFE'ヲ二等分シ, FE'ハBC或ハEFニ逆平行ナリ;

故ニ E, E', F, F'ハ共圓點ナリ.

同様ニ DF', ACハ逆平行ニシテ, 角 $BF'D = C$;



故 = 角 $E'DF' = E'EF'$;

故 = D ハ同シ圓ノ上ニ在リ;

同様 = D' モ其ノ上ニ在リ.

次 = AK, FE' ナ l ニ於テ交ルトシ, $l\sigma, AO$ ナ結ビ付ケヨ;

然レハ $l\sigma, AO$ ハ平行ナリ;

而シテ AO ハ FE' ニ垂線ナルヲ以テ (定理 37),

$l\sigma$ ハ FE' ニ垂線ニシテ又之ヲ二等分ス.

同様 = DF', ED' ノ中點 m, n ナ σ ニ結ビ付クル直線ハ夫々 DF', ED' ニ垂線ナリ.

故 = F, E', E, D', D, F' ナ過ル圓ノ中心ハ $l\sigma, m\sigma, n\sigma$ ノ上ニ在リ; 即 σ ガ其中心ナリ.

定理 42.

$$DD' : EE' : FF' = a^2 : b^2 : c^2.$$

相似三角形ニ於テ, $DD' : D'K = a : b$,

$$OE : D'C = a : b,$$

$$KE : EE' = a : b.$$

然ルニ $OE = D'K, KE = D'C$ ナルヲ以テ, 此三ノ比ヲ相乗スレハ

$$DD' : EE' = a^2 : b^2 \text{ トナル.}$$

定義. 此定理ニ因リ D, D', E, E', F, F' ナ過ル圓ヲ三乗比圓 (Triplicate ratio circle) ト稱ス.

定理 43.

定理 41 ノ二ノ三角形 $FDE, E'F'D'$ ハ全ク相等シク各

ABC ニ相似ナリ.

何トナレハ, 角 $FDE = FFE$ (同シ弓形ニ於テ)

$$= B.$$

同様ニ $FED = FD'D = C$.

故ニ FDE, ABC ハ相似ナリ;

同様ニ, $E'F'D', ABC$ モ相似ナリ;

而シテ $FDE, E'F'D'$ ハ相似ニシテ且同シ圓ニ内接スルヲ以テ全ク相等シキヲ明ナリ.⁽⁷⁾

定理 44.

Ω, Ω' ガ ABC ノプロカール點ナルトハ Ω, K 及 K, Ω'

ハ夫々 $FDE, E'F'D'$ ノプロカール點ナリ.

EF', DD' ハ三乗比圓ノ平行弦ナルヲ以テ,

$$D'E = F'D$$

同様ニ $= E'F$.

而シテ等シキ弦ハ圓周ニ於テ等シキ角ニ對スルヲ以テ,

$$\text{角 } KED = KFE = KDF;$$

(7) 此事ハ容易ニ證明スルヲ得.

又

$$KD'E' = KE'F' = KF'D';$$

故ニ K ハ FDE ノ プロカール負點ニシテ E'F'D' ノ プロカール正點ナリ.

次ニ, H ガ FDE ノ プロカール正點ナレハ, 角 FHD ハ FDE 即 B ノ補角ナリ.

故ニ B, F, H, D ハ共圓點ニシテ 角 HFD = HBC.

然ルニ HFD ハ FDE ノ プロカール角ナルヲ以テ相似三角形 ABC ノ プロカール角 ΩBC = 等シ (定理 39);

故ニ BH ハ Ω ヲ過ル. 同様ニ AH, CH モ Ω ヲ過ル;

故ニ Ω ハ FDE ノ プロカール正點ナリ.

同様ニ Ω' ガ E'F'D' ノ プロカール負點ナルコトヲ證明スルヲ得.

プロカール圓

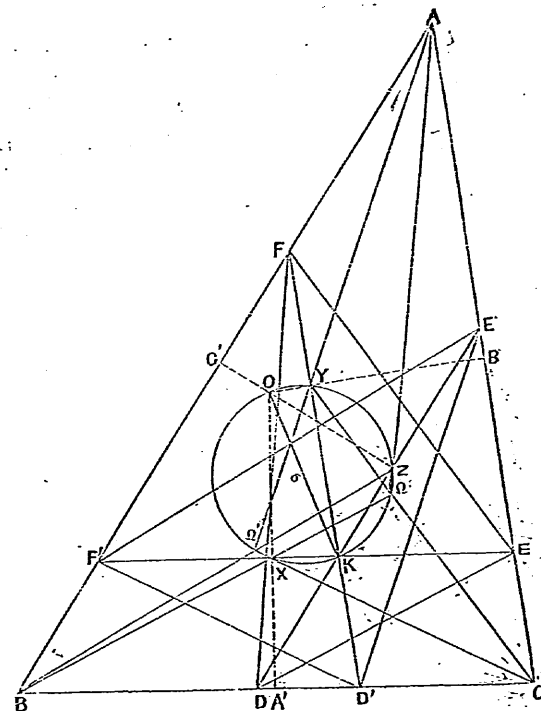
定義. OK ヲ直径トセル圓 (從テ三乘比圓ト同シ中心ナル) ヲ プロカール圓 (Brocard Circle) ト稱ス.

定理 45.

プロカール圓ハ $A\Omega, B\Omega, C\Omega$ ガ夫々 $B\Omega', C\Omega', A\Omega'$ ト交ル所ノ三點及プロカール點 Ω, Ω' ヲ過ル; 而シテ

$$\text{角 } \Omega\sigma K = \Omega'\sigma K = 2\omega.$$

三乘比圓ノ時ト同シ作圖ヲ爲シ, $A\Omega, B\Omega, C\Omega$ ヲ結ビ付ケヨ.



然ルトハ 角 $DFE' = DE'F'$ (三乘比圓ノ同シ弓形ニ於テ)
 $= \omega$ (K ハ D'E'F' ノ プロカール點
 $= \Omega AB;$ ナルヲ以テ)

故 $= A\Omega$ ハ FD ニ平行ナリ;

同様 $= B\Omega, C\Omega$ ハ夫々 DE, EF ニ平行ナリ;

同様 $= A, B, C$ ヲ過リ夫々 $D'E', E'F', F'D'$ ニ平行ナル三直線ハ Ω' ニ於テ交ル.

$B\Omega$ ガ $F'E$ ト交ル點ヲ X トシ, CX ヲ結ビ付ケヨ. 然ルニハ平行線ノ定理ニ依リテ,

$$F'K = BD = XE = XK + KE;$$

故 $= F'X = KE = D'C$ ニシテ, $F'X$ 及 $D'C$ ハ平行ナリ;

故 $= CX$ ハ $D'F'$ ニ平行ニシテ, Ω' ヲ過ル.

同様 $= C\Omega, A\Omega'$ ハ $D'F'$ ノ上ノ Y ニ於テ交リ, 又 $A\Omega, B\Omega'$ ハ $E'D$ ノ上ノ Z ニ於テ交ル.

而シテ 角 $XBC = \omega = XCB$ ナルヲ以テ,

$$XB = XC;$$

故 $= BC$ ニ垂線ナル XA' ハ BC ヲ二等分シ又 O ヲ過ル;

故 $= OXK$ ハ直角ニシテ, X ハプロカル圓ノ上ニ在リ.

同様 $= Y, Z$ モ其ノ上ニ在リ.

又 角 $YOZ = C\Omega A$ ノ補角 $= A$

$$= B'OC' \text{ ノ補角 } = YOZ;$$

故 $=$ プロカル圓ハ Ω ヲ過ル, 又同様 $= \Omega'$ ヲ過ル.

次ニ, σ ハ此圓ノ中心ナルヲ以テ,

角 $\Omega\sigma K = 2\Omega ZK = 2\Omega AB = 2\omega,$

又 $\Omega'\sigma K = 2\Omega' ZK = 2\Omega' BA = 2\omega.$

餘 弦 圓

定 理 46.

三角形ノ類似重心ヲ過リ夫々三邊ニ逆平行ナル直線
ガ邊ト交ル所ノ六點ハ其三角形ノ餘弦圓 (Cosine circle)
ト稱スル一ツノ圓ノ上ニ在リ.

fKe', dKf', eKd' ヲ逆平行線トモヨ; 然レハ K ハ類似重心ナルヲ以テ此三直線ノ

中點ナリ;

又 角 $Kdd' = A = Kd'd$;

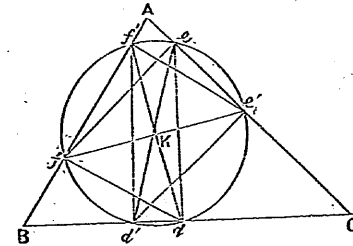
故 $= Kd = Kd'$

同様 $= Ke = Ke'$

$$= Kf = Kf';$$

故 $= K$ ヲ中心トセル一ツノ圓ハ d, d', e, e', f, f' ヲ過ル.

系. $efd'e'$ ノ如キ圓形ハ皆矩形ナルヲ明ナリ. 又角 dfo ハ同シ弓形ニ於テノ角 $dd'e$ ニ等シ, 故 $= A$. 同様 $= def = C, edf = B$ ナルヲ以テ三角形 fde ハ ABC ニ相似ナリ; 同様 $= e'f'd'$ モ ABC ニ相似ナリ;

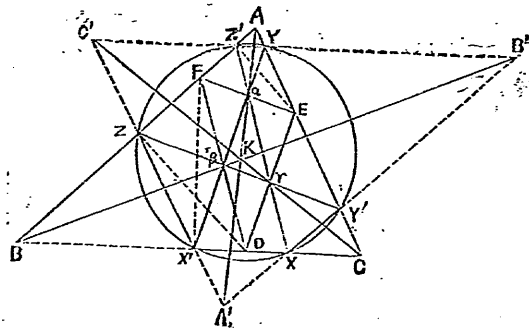


而シテ fdc 及 $ef'd'$ ハ相似ニシテ且同シ圓ニ内接スルヲ以テ全ク相等シキヲ明ナリ.

テール圓

定理 47.

DEF ヲ三角形 ABC ノ垂足三角形; α, β, γ ヲ其ノ邊ノ中點トシ; $\beta\gamma$ ガ CA, AB ト夫々 Y', Z ニ於テ交リ, $\gamma\alpha$ ガ AB, BC ト夫々 Z', X ニ於テ交リ, $\alpha\beta$ ガ BC, CA ト夫々 X', Y ニ於テ交ルトセハ六點 X, X', Y, Y', Z, Z' ハ三角形 $\alpha\beta\gamma$ ノ内接圓ト同シ中心ヲ有スル一圓ノ上ニ在リ, 之ヲテール圓 (Taylor circle) ト稱ス.



逆平行線ノ理ニ因リ角 $DFZ = C = Y'ZA$ ナルヲ以テ,

$$\beta Z = \beta F,$$

$$\text{又同様ニ } \beta X' = \beta D;$$

$$\text{然ルニ } \beta F = \beta D;$$

故ニ FD ヲ直径トセル圓ハ Z 及 X' ヲ過ル; 故ニ ZX' ハ

DF 及 XZ' ニ逆平行ニシテ, CA ニ平行ナリ;

故ニ Z, Z', X, X' ハ共圓點ナリ;

同様ニ $Z'Y$ ハ BC ニ平行ナリ,

$$\text{故ニ } Z'YX' = YX'C = A = ZXX';$$

故ニ Z, Z', X, X' ヲ過ル圓ハ Y ヲ過ル,

又同様ニ Y' ヲ過ル.

又 $\beta Z = \beta X'$ ナルヲ以テ, ZX' ヲ直角ニ二等分スル直線ハ角 β ヲ二等分ス,

故ニ三角形 $\alpha\beta\gamma$ ノ内心ヲ過ル.

同様ニ XY', YZ' ヲ直角ニ二等分スル直線モ同シ點ヲ過ル,

故ニ圓 $XX'YY'ZZ'$ ノ中心ハ三角形 $\alpha\beta\gamma$ ノ内心ト合ス.

系 1. 六點 $Z, Y'; X, Z'; Y, X'$ ハ高サノ足 D, E, F ガ夫々原三角形ノ邊ノ上ニ投スル射影ナリ.

系 2. 三角形 $ZXY, Y'Z'X'$ ハ全ク相等シク, ABC ニ相似ナリ. 證明ハ定理 43 ノ如シ.

タツカ—圓

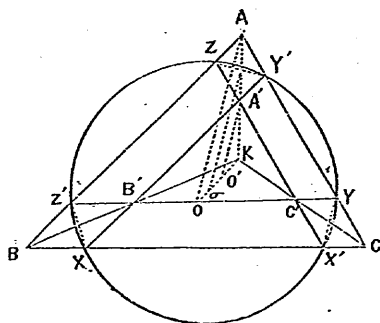
定理 48.

K を三角形 ABC の類似重心^⑤ニシテ、夫々 KA, KB, KC の上ニ

$$KA':KA = KB':KB = KC':KC = \text{常比}$$

ナル様ニ A', B', C' を取リ; 而シテ $B'C'$ が CA, AB と夫々 Y, Z' ニ於テ交リ, $C'A'$ が AB, BC と夫々 Z, X' ニ於テ交リ, $A'B'$ が BC, CA と夫々 X, Y' ニ於テ交ルトセハ、六點 X, X', Y, Y', Z, Z' ハ ABC 及 $A'B'C'$ ノ外心ヲ結ビ付クル直線ノ中點ヲ中心トセル一ノ圓ノ上ニ在ル。

$AZA'Y'$ ハ平行四邊形ナルヲ以テ、 ZY' 及 AA' ハ各他ヲ二等分ス;
然ルニ AA' ハ類似中線ナルヲ以テ、 ZY' ハ BC ニ逆平行ニシテ、外接圓ノ A ニ於テノ切線ニ平行ナリ;
而シテ三角形 $ABC, A'B'C'$



ハ相似ニシテ K ニ就テ相似ノ位置^⑥ニ在ルヲ以テ、外接圓ノ A 及 A' ニ於テノ切線ハ互ニ平行ナルヲ明ナリ;

故ニ O, O' が外心ナレハ、 ZY' ハ直角ニ二等分スル直線ハ $AO, A'O'$ ニ平行ニシテ OO' ノ中點ヲ過ル。

同様ニ XZ', YX' ハ直角ニ二等分スル直線モ同シ點ヲ過ル。

又 ZY' ハ BC 及 $Z'Y$ ニ逆平行ナルヲ以テ Z, Z', Y, Y' ハ共圓點ナリ。

同様ニ $Z'X$ ハ CA ニ逆平行ナルヲ以テ、

$$\angle Z'XY' = \angle XZ'B = \angle C = \angle Z'YY';$$

故ニ Z, Z', Y, Y' ヲ過ル圓ハ X ヲ過ル、又同様ニ X' ヲ過ル、而シテ其ノ中心ハ OO' ノ中點ヲナリ。

系. 三角形 $OAK, O'A'K$ ハ相似ナルヲ以テ、 O, O', K ハ共線點ナリ。

定義. 此定理中ニ在ルカ如キ六點ヲ過ル圓ヲタツカ—圓 (Tucker circle) ト稱ス。

⑤ [K ニ就テ相似ノ位置ニ在リ]トハ K が二形ノ相似ノ中心ナルヲ云フ (V, 定義 4).

定理 49.

定理 48 ノ三角形 $ZXY, Y'Z'X'$ ハ全ク相等シク各 ABC ニ相似ナリ.

此ノ證明ハ全ク定理 43 ト同一ナリ.

定理 50.

外接圓, 三乗比圓, 餘弦圓, テーロル圓ハ皆タツカー圓ノ特別ナルモノナリ.

比 $KA':KA$ ガ變スルモタツカー圓ノ中心ノ軌跡ハ直線 OK ナリ.

$KA':KA=1$ ナレハ, A', B', C' ハ夫々 A, B, C ト合シテ, タツカー圓ハ外接圓トナル.

$KA':KA=0$ ナレハ, A', B', C' ハ皆 K ト合シ, タツカー圓ハ三乗比圓トナル.

$KA':KA=-1$ ナレハ, AA' ノ中點ガ K ト合シ, 逆平行線 ZY', YX', XZ' ハ皆 K ヲ過ル, 而シテタツカー圓ハ餘弦圓トナル.

テーロル圓ニ於テハ比 $KA':KA$ ハ一定ノ數字ヲ以テ表ハシ得ヘキ値ヲ有セズ, 然レモ三角法ニ依リテ其ガ

$$1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}, \text{ 或ハ } \frac{OH^2}{4R^2} - \frac{5}{4}$$

ニ等シキヲ知ルヲ得ヘシ.

テーロル圓ガ一ツタツカー圓ナルコトハ次ノ如クニシテ見ルヲ得; 定理 47 ノ圖ニ於テ YZ', ZX', XY' ガ夫々 BC, CA, AB ニ平行ナルコトヲ證明シタリ; 此三直線ヲ延長シテ A', B', C' ニ於テ相交ラシムレハ, BB' ハ平行四邊形 $BXB'Z'$ ノ對角線ナルヲ以テ CA ニ逆平行ナル $Z'X$ ヲ二等分ス; 故ニ BB' ハ類似中線ニシテ K ヲ過ル; 同様ニ AA' 及 CC' モ K ヲ過ル, 故ニ

$$KA':KA = KB':KB = KC':KC.$$

第二編ノ問題

1. 三邊 BC, CA, AB ト夫々 P, Q, R ニ於テ直角ニ交ル三ツノ直線ガ共點線ナルキハ,

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0;$$

又逆ニ, 斯ノ如キ關係アルモ此三垂線ハ共點線ナリ.

2. 三ツノ圓カ二ツ宛相切スルモ其ノ切點ニ於テノ三切線ハ共點線ナリ.

3. 三ツノ傍接圓ガ夫々之ニ對應スル邊ニ X_1, Y_1, Z_1 ニ於テ切スルモ, 此三點ヲ過リ夫々邊ニ垂線ナル三ツノ直線ハ共點線ナリ.

4. 一ツノ圓ガ $P', P''; Q, Q'; R, R'$ ニ於テ夫々三邊 BC, CA, AB ト交リ AP, BQ, CR ガ共點線ナルキハ, AP', BQ', CR' モ亦共點線ナリ.

5. O ガ任意ノ一點ナレハ, 三ツノ角 BOC, COA, AOB ノ外角ヲ二等分スル直線ガ夫々三邊 BC, CA, AB ト交ル點ハ共點線ナリ.

6. 内接圓ノ切點ヲ X, Y, Z トシ, XI, YI, ZI カ夫々 YZ, ZX, XY ト交ル點ヲ L, M, N トスレハ, AI, BI, CI ハ重心ニ於テ出合フ.

7. XX', YY', ZZ' ナ内圓ノ切點 X, Y, Z ナ過ル三ツノ直徑トスレハ, AX', BY', CZ' ハ共點線ナリ.

8. A, B, C ニ於テノ外圓ノ切線カ夫々 BC, CA, AB ト交ル點ハ共點線ナリ.

9. 三角形 ABC ノ外側ニ三ツノ正三角形 A_1BC, B_1CA, C_1AB ナ作ルハ, AA_1, BB_1, CC_1 ハ相等シク且共點線ナリ.

10. BC ナ K ニ於テ $BK:KC = l:m$ ナル様ニ分ツハ $m \cdot AB^2 + l \cdot CA^2 = (l+m)AK^2 + m \cdot BK^2 + l \cdot KC^2$ ナリ.

11. 夫々 BC, CA, AB ノ上ニ K, L, M ナ $BK:KC = l:m, CL:LA = m:k, AM:MB = k:l$ ナル様ニ取ルハ AK, BL, CM ハ一點 S ニ於テ相交ル, 而シテ

$$SK:AK = lm:lm + mk + kl;$$

又

$$\frac{SK}{AK} + \frac{SL}{BL} + \frac{SM}{CM} = 1.$$

12. 外接圓ハ内心ト傍心トノ結ビヲ二等分ス.

13. 三角形 HBC, HCA, HAB ノ外接圓ハ皆相等シ.

14. 三角形 IBC ノ外接圓カ邊 AB, CA ト交ル點ハ A ヨリ夫々 CA, AB ニ等シキ距離ニ在リ. 又之ニ依リテ $AI \cdot AI_1 = bc$ ナルヲ證明セヨ.

15. 外接圓ノ上ニ在ル一點ヨリ三角形ノ三邊ヘ引ケル垂線カ再ヒ圓ト交ル點ヲ夫々 Q, R, S トスレハ, AQ, BR, CS ハ其點ノシムソソ線ニ平行ナリ.

16. 一點 P ノシムソソ線ハ PH ナ二等分ス.

17. シムソソ線カ與ラレタル直線ニ平行ナル様ナル P 點ノ位置ヲ見出セ.

18. 外接圓ノ一ツノ直徑ノ兩端ノシムソソ線ハ九點圓ノ上ニ於テ互ニ直交ニ交ル.

19. 直線 $A'B'$ カ AI ト S ニ於テ交リ, AI_2 ト T ニ於テ交ルハ $A'S = \frac{1}{2}(c-b)$, $A'T = \frac{1}{2}(b+c)$ ニシテ $ASCT$ ハ矩形ナリ.

20. 高 AD, BE, CF ナ夫々 P_1, P_2, P_3 トスレハ,

$$\frac{2}{P_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}, \quad \frac{2}{P_2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}, \quad \frac{2}{P_3} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3},$$

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$$

21. A' ナ BC ノ中點, $PA'P'$ ナ外接圓ノ直徑トスレハ $2A'P = r_1 - r$,

$2P'A' = r_2 + r_3$ ナリ.

22. $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$.

23. $AH + BH + CH = 2(OA' + OB' + OC') = 2(R + r)$.

24. $r \cdot r_1 = (s-b)(s-c)$. 依リテ

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

ナルヲ證明セヨ.

25. $A'I$ ナ延長シテ AD ト L ニ於テ交ラシムルハ $AL = r$ ナリ; 又一般ニ一ツノ傍心ナ一邊ノ中點ト結ビ付クル直線カ之ニ對應スル高ヲト交ル所ノ點ハ其頂點ヨリ傍半径ニ等シキ距離ニ在リ.

26. C ガ直角ナルハ,

$$r = s - c, \quad r_1 = s - b, \quad r_2 = s - a, \quad r_3 = s.$$

27. $AD^2:BE:CF = bc:a^2$.

28. $2(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH) = a^2 + b^2 + c^2$.

29. $AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2$.

30. A' ハ XX_1 ノ中點ナリ.

31. $r_2 = r_3$ ナルハ $b = c$ ナリ.

32. $R = 2r$ ナルハ三角形ノ三邊相等シ.

33. A_1, B_1, C_1 ガ三角形 BHC, CHA, AHB ノ外心ナルハ, O' ハ $A_1B_1C_1$ ノ垂心, H ハ其ノ外心; A, B, C ハ三ツノ三角形 $B_1OC_1, C_1OA_1, A_1OB_1$ ノ外心ニシテ, 此七ツノ三角形ハ皆 ABC ト同シ九點圓ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

34. $II_1^2 + I_2^2$ ハ圓 II_1I_2 ノ直徑ノ上ノ正方形ニ等シ; 又 I, I_1, I_2, I_3 ナ如何様ナル順序ニ取ルモ同様ノ關係カ成リ立ツヲ證明セヨ.

35. 四點 I, I_1, I_2, I_3 の中任意ノ三點ヲ以テ作リタル三角形ノ面積ニ他ノ一點ヲ中心トセル圓ノ半徑ヲ乘シタルモノハ $\frac{1}{2}abc$ ニ等シ.
36. 面積 $I_1 I_2 I_3 : \Delta = 2R : r$.
37. 垂足三角形ノ外半徑 $= \frac{1}{2}R$.
38. 三角形ノ面積ハ其ノ外半徑ノ上ノ正方形ト其ノ垂足三角形ノ周ノ上ノ正方形トノ間ノ比例中項ナリ.
39. I ハ三ツノ三角形 BIC, CIA, AIB ノ外心ヲ以テ作リタル三角形ノ垂心ナリ.
40. BM 及 CN ガ AI ニ垂線ナルハ $BM \cdot CN = r \cdot r_1$.
41. 三角形 ABC ノ内ニ面積 PBC, PCA, PAB ガ相等シキ様ナル點 P ナ見出セ.
42. 鋭角三角形 ABC ノ内ニ三ツノ圓 PBC, PCA, PAB ガ相等シキ様ナル點 P ナ見出セ; 次ニ此圓ガ皆圓 ABC ニ等シキコトヲ證明セヨ.
43. 三角形内ニ其ノ三邊ヨリノ距離ガ邊ニ比例ヲ爲ス様ナル一點ヲ見出セ.
44. A' ナ EF ノ中點ニ結ビ付クル直線ハ EF ニ垂線ナルコトヲ證明セヨ.
45. 直線 DKL ガ DE ト直角ヲ爲シ BE, BA ト夫々 K, L ニ於テ交ルハ $LB^2 = LK \cdot LD$ ナリ.
46. AO, AI ガ夫々外接圓ト L, P ニ於テ交ルハ BL ト OP トノ夾ム角ノ一ツガ B ニ等シキヲ證明セヨ.
47. AA' ガ外接圓ト K ニ於テ交ルハ $KB : KC = AC : AB$, 及 $AC^2 + AB^2 = 2AA' \cdot AK$ ナリ.
48. AI ガ外接圓ト P ニ於テ交リ, PM ナ AB へ垂線ニ引クハ M ヨリ外接圓ヘ引ケル切線ノ上ノ正方形ハ $CA' \cdot AD$ ニ等シ.
49. P ガ三角形 ABC ノ平面上ノ任意ノ一點ナレハ,
- $$AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2.$$

(*) 周ハ半周ノ誤ナルヘシ.

50. N ガ九點圓ノ中心ナレハ,
- $$AN^2 + BN^2 + CN^2 = 3R^2 + 9NG^2. (*)$$
51. K ガ GHI ノ中點ナレハ,
- $$AK^2 + BK^2 + CK^2 = 3R^2.$$
52. P ガ九點圓ノ上ノ任意ノ一點ナレハ, $AP^2 + BP^2 + CP^2 + HP^2$ ハ常量ナリ.
53. 三角形ノ各邊ノ中點ヨリ之ニ對スル角ノ二等分線ヘ垂線ヲ引クハ此三直線ノ作ル所ノ三角形ハ原三角形ト同シ九點圓ヲ有ス.
54. 三角形ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ三點 A', B', C' ナ $BA' : A'C = CB' : BA = AC' : CB$ ナル様ニ取ルハ三角形 $A'B'C'$ ノ重心ハ ABC ノ重心ト合ス.
55. (i) 二邊ト一巾線, (ii) 一邊ト二巾線, (iii) 三巾線ガ與ヘラレタルハ三角形ヲ作ルヲ求ム.
56. 三角形ノ巾線ヲ邊トセル三角形ヲ作ルハ其ノ巾線ノ長ハ原三角形ノ邊ノ四分ノ三ニ等シ.
57. 一邊ノ位置 (長ハ與ヘズ) ト内心ト其邊ニ對スル傍心トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
58. (i) 三邊ニ接スル圓ノ三ツノ中心; (ii) 三邊ニ接スル圓ノ二ツノ中心ト外心; (iii) 三邊ニ接スル圓ノ一ツノ中心ト外心ト一ツノ頂點; (iv) 重心ト外心ト一ツノ頂點トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
59. 三角形ノ底邊ノ大サ及位置ト頂角ノ大サトガ與ヘラレタルハ (i) 外心 (ii) 内心 (iii) 垂心, (iv) 九點圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.
60. 底邊ト頂角ト (i) 他ノ二邊ノ和, (ii) 其ノ差, (iii) 其ノ包ム矩形ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
61. 底邊ト之ニ對應スル高ト他ノ二邊ノ和或ハ差トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
62. 底邊ト外半徑ト底邊ニ隣ルニツノ角ノ差トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
- (*) $3R^2 + 9NG^2$ ハ $3R^2 - 9NG^2$ ノ誤ナルベシ.

63. 底邊ト底邊ニ隣ルニツノ角ノ差ト他ノ二邊ノ差トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
64. 外接圓ト內心ト一ツノ頂點トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
65. 九點圓ト一邊トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
66. 垂心ト外接圓ト一ツノ頂點トヲ與ヘテ三角形ヲ作ルヲ求ム.
67. 三角形ノ頂點ヲ之ニ對スル邊ト内接圓ノ切點及其邊ニ對應スル傍接圓ノ切點ニ結ビ付クルニツノ直線ノ長及位置ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.
68. 三角形ノ外接圓ト垂心トガ與ヘラレタルトハ高ヲ足チ結ビ付クル直線ハ一定ノ圓ニ切ス.
69. 三角形 ABC ノ外接圓ト同中心ニテシ三邊 BC, CA, AB ト夫々 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ニ於テ交ル圓ヲ畫キ, A_1 ヨリ夫々 CA, AB へ垂線 A_1b_1, A_1c_1 ナ引キ, A_2, B_1 等ヨリモ同様ニ垂線ヲ引クレハ, $A_1b_1c_1$ ノ如キ六ツノ圓ノ中心ハ, ABC ノ九點圓ト同中心ニシテ原圓ノ半徑ノ半分ニ等シキ半徑ノ圓ノ上ニ有リ.
70. 類似中線 AK ガ BC ト R ニ於テ交ルハ, $BR:RC = c^2:b^2$.
71. 三邊ノ上ニ類似重心 K ノ射影ヲ L, M, N トスレハ K ハ三角形 LMN ノ重心ナリ.
72. 一邊及ヒ之ニ對應スル高ヲ中點ハ類似中點ト共線點ナリ.
73. 三角形 LMN ノ邊ハ ABC ノ中線ニ垂線ナリ.
74. 定理 47 (テ-ロル圓) ノ圖ニ於テ次ノ如キヲ證明セヨ:
- (i) $Y'Z = Z'X = X'Y =$ 三角形 $\alpha\beta\gamma$ ノ周;
- (ii) $X, X', Y, Y', Z, Z' \wedge D, E, F$ ヨリ ABC ノ邊ヘ引ケル垂線ノ足ナリ;
- (iii) YZ', ZX', XY' ハ夫々 BC 及 EF, CA 及 FD, AB 及 DE ノ第三比例項ナリ.

第三編

調和列點及調和束線

定義

AB ガ一直線上ノ二點, C, D ガ其線上ノ他ノ二點ニシ

テ

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

ナルハ, 四點 A, C, B, D ハ調和列點 (Harmonic range) ナリ作リ; C 及 D ハ A 及 B ニ就テ調和共軛點 (Harmonic conjugates) ナリト云フ; AC, AB, AD ハ調和級數 (Harmonic progression) ナリト云フ; AB ハ AC ト AD ノ間ノ調和中項 (Harmonic mean) ナリト云フ. [此定義ガ代數學ニ於テノ定義ト同一ニ歸スルヲハ比例 $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ ナ $\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{BD} = \frac{AB-AC}{AD-AB}$ ト記セハ明ナリ.]

上ノ比例ガ成立ツニハ二點 C, D ノ中何レカ一ヲ而シテ唯一ガ A ト B トノ間ニ在ルコト必要ナリ.

定理 1.

C 及 D が A 及 B に就テ調和共轭ナルトハ, A 及 B ハ

C 及 D に就テ調和共轭ナリ.

A O C B D

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \text{ ナルヲ以テ, } \frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}, \text{ 故ニ } \frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}.$$

定理 2.

A, C, B, D が調和列點ヲ作ルハ,

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \text{ ナルヲ以テ,}$$

$$\frac{AC}{AC-AB} = -\frac{AD}{AD-AB}, \text{ 即 } \frac{AC-AB}{AC} = -\frac{AD-AB}{AD};$$

$$\text{故ニ } 2 = \frac{AB}{AC} + \frac{AB}{AD}, \text{ 即 } \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

定理 3.

O が AB ノ中點ナルハ, $OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$,

又 $DA \cdot DB = DC \cdot DO$ ナリ.

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \text{ ナルヲ以テ, } \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD};$$

$$\therefore \frac{AC+CB}{AC-CB} = \frac{AD+BD}{AD-BD};$$

$$\therefore \frac{2OB}{2OC} = \frac{2OD}{2OB} \quad (\text{結論 (4) [iv]});$$

$$\text{即 } OC \cdot OD = OB^2.$$

$$\text{又 } \frac{DC-DA}{DC-DB} = -\frac{DA}{DB};$$

$$\therefore DC \cdot DB - DA \cdot DB = -DC \cdot DA + DA \cdot DB;$$

$$\therefore DC(DA+DB) = 2DA \cdot DB,$$

$$\text{即 } DC \cdot DO = DA \cdot DB.$$

系. $OC \cdot OD = OA^2$ ナルヲ以テ, C が AB ノ中點 O ト合スルハ, A 及 B に就テ C ノ調和共轭點 D ハ無窮遠ニ在ルコト明ナリ.

定理 4.

S が調和列點 ACBD ヲ含ム直線外ノ一點トシ, C ヲ

過リ SD = 平行ニ一直線ヲ引キ SA, SB ト夫々 G, H ニ於

テ交ラシムルトハ $GC = CH$.

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \text{ ナルヲ以テ } \frac{AC}{AD} = \frac{CB}{BD},$$

$$\therefore \frac{GC}{SD} = \frac{CH}{SD} \quad (\text{相似三角形ニ依リ}),$$

即

$$GC = CH.$$

定理 5.

前定理ト同圖ニ於テ、任意ニ他ノ截線ヲ引キ $SA, SB, SC,$
 SD ト夫々 A', B', C', D' ニ於テ交ラシムルトハ、 $A'C'B'D'$
 ハ調和列點ヲ作ル。

C' ヲ過リ SD 或ハ GH ニ平行ニ $G'C'H'$ ヲ引ケ;

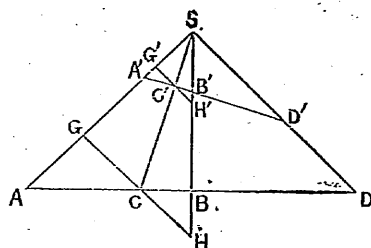
然ルルハ $GC = CH$

ナルヲ以テ $G'C' = C'H'$;

$$\therefore \frac{G'C'}{SD'} = \frac{C'H'}{SD'};$$

$$\therefore \frac{A'C'}{A'D'} = \frac{C'B'}{B'D'};$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{A'C'}{B'C'} = -\frac{A'D'}{B'D'}.$$



定義. 四直線 SA, SC, SB, SD ガ截線 $ACBD$ ト交リ調和
 列點 $ACBD$ ヲ作ルルハ其四線ヲ調和束線 (Harmonic pencil)
 ト稱ス; S 點ヲ束線ノ頂點 (Vertex), 四ノ直線ヲ何レモ
 射線 (Ray) ト稱シ, SC, SD ハ SA, SB ニ就テ調和共軛線ヲ
 リト云フ.⁽¹⁾

⁽¹⁾ 此束線ヲ $S(ACBD)$ ト記ス.

定理 6.

一ノ角ノ邊ハ其ノ内等分線及外等分線ト共ニ調和束
 線ヲ作ル。

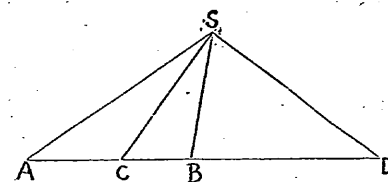
SC, SD ヲ SA, SB ノ作ル内角及外角ノ二等分線トセヨ.

任意ノ截線 $ACBD$ ヲ引ケ.

然ルルハ

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AS}{SB} = \frac{AD}{BD};$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$



定理 7.

調和束線ニ於テ、一ノ射線ガ之ト共軛ナラザル二射線
 ノ夾ム角ヲ二等分スルルハ、其線ハ之ト共軛ナル射線ニ
 垂線ナリ。

前定理ノ圖ニ於テ、 SC ガ角 ASB ヲ二等分スルルハ、

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

故ニ SD ハ SA, SB ノ作ル外角ヲ二等分シ、依リテ SC ニ垂
 線ナリ。

定理 3.

調和束線ニ於テ一雙ノ共軛射線ガ互ニ垂線ナレハ、此二線ハ他ノ雙ノ射線ノ夾ム角ヲ二等分ス。

SC, SD ガ互ニ垂線ナリトセヨ。

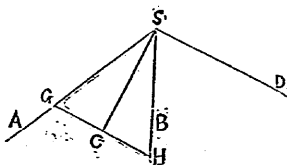
直線 GCH ヲ SD ニ平行ニ引ケ。

然ルニハ、 $GC = CH$ (定理4);

C ニ於テノ角ハ直角ニシテ、SC

ハ二ツノ三角形 GSC, HSC ニ共通ナリ;

故ニ SC ハ角 GSH ヲ二等分ス; 故ニ又 SD ハ其ノ外角ヲ二等分ス。

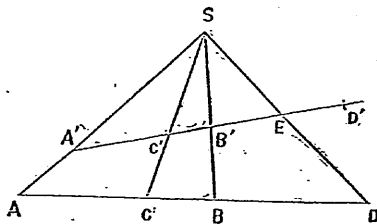


定理 9.

二ツノ直線ノ上ニ各一組ノ調和列點アリテ、相應對スル點ノ三雙ヲ結ビ付クル三直線ガ同一ノ點ヲ過ルニハ、第四雙ノ結ビモ亦其點ヲ過ル。

ル。

ACBD, A'C'B'D' ナ二組ノ列點トセヨ、而シテ、 AA', CC', BB' ガ S ニ於テ出會フトセヨ; SD ヲ結



ビ付ケ、其ガ A'C'B' ト交ル點ヲ E トセヨ。

然ルニハ SA, SC, SB, SD ガ調和束線ナルヲ以テ、A'C'B'E ハ調和列點ナリ。然ルニ A'C'B'D' ハ調和列點ナリ; 故ニ D' 及 E ハ相合ス。即 S, D', D ハ共線點ナリ。

系. 相對應スル二點ガ二ツノ直線ノ交點ニ於テ合スルニハ、他ノ相對應スル點ノ三雙ヲ結ビ付クル直線ハ共線點ナリ。

定理 10.

二組ノ調和束線ニ於テ、相對應スル三雙ノ射線ノ交點ガ一直線上ニ在ルニハ他ノ一雙ノ交點モ亦其ノ上ニ在リ。

$S(ACBD), S'(ACBD')$ ナ二ツ

ノ調和束線トシ、A, C, B ガ

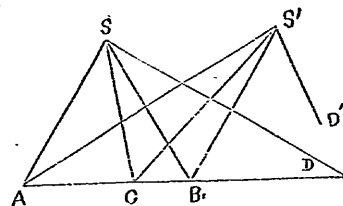
共線點ナリトセヨ; 然ルニ

ハ SD, S'D' ガ ACB ト交ル點

ハ何レモ A 及 B ニ就テ C

ノ調和共軛點ナリ; 故ニ定理ヲ得。

系. 一組ノ一射線ガ他ノ組ノ之ニ對應スル射線ト相合スルニハ、他ノ三雙ノ交點ハ共線點ナリ。



第三編ノ問題

1. 一直線ノ上ニ三點 A, B, C 有リ. C ヲリ相等シキ距離ニ在リテ A 及 B ニ就テ調和共轭ナル二點ヲ見出セ.
2. C, D が A, B ニ就テ調和共轭ナレハ,

$$AB \cdot CD + 2AD \cdot BC = 0,$$

$$AB \cdot DC + 2AC \cdot BD = 0.$$
3. 任意ノ二點 A, B ニ就テモ, 亦他ノ任意ノ二點 C, D ニ就テモ調和共轭ナル二點ヲ見出セ.
4. AH, AI, AO, AI₂ (第二編ノ記號ヲ用井ル) が調和束線ヲ作ルヲ證明セヨ.
5. A', B', C' が三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ナレハ A'C', A'B' ハ A'A, A'C' ニ就テ調和共轭線ナリ.
6. 一ツノ圓が三角形ノ邊 BC, CA, AB ニ夫々 X, Y, Z 點ニ於テ切シ YZ が BC ト X' ニ於テ交レハ, X, X' ハ B, C ニ就テ調和共轭點ナリ.
7. 一ツノ平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過リ其ノ邊ニ平行ニ引ケルニツノ直線ハニツノ對角線ト共ニ調和束線ヲ作ル.
8. P, Q, R が夫々三角形ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ在ル共線點ニシテ, P', Q', R' が各邊ノ兩端ニ就テ夫々其ノ調和共轭點ナルハ AP', BQ', CR' ハ共點線ナリ. 此ノ逆モ亦真ナリ.
9. AB が C, D ニ於テ及 P, Q ニ於テ調和ニ分タレ, M, R, E が夫々 AB, PQ, CD ノ中點ナレハ.

$$PC \cdot PD = 2PM \cdot RE, \quad QC \cdot QD = 2QM \cdot RE.$$
10. A ニ於テノ外接圓ノ切線ト類似中線 AK トハ二邊 AB, AC ニ就テ調和共轭線ナリ.
11. 一ツノ圓ノ上ニ在ル四點ガ同シ圓ノ上ニ在ル一點ニ於テ, 調和束線ヲ定ムルハ (即四點ト其點ノ結ヒガ調和束線ナルハ) 同シ圓ノ上ニ在ル點ヲノ點ニ於テ亦然リ.

12. 一ツノ圓ノ四切線ガ他ノ一ツノ切線ノ上ニ調和列點ヲ定ムルハ (即四ツノ切線ト其切線トノ交リガ調和列點ナルハ) 總テノ切線ノ上ニ於テ亦然リ.
13. 一ツノ圓ノ上ニ在ル四點ガ調和系ヲナスハ (即同シ圓ノ上ノ任意ノ點ニ於テ調和束線ヲ定ムルハ) 其ノ一ツニ於テノ切線ハ之ヲ他ノ三點ニ結ビ付クル直線ト共ニ調和束線ヲ作ル.
14. 一ツノ圓ノ四切線ガ調和系ヲナスハ (即同シ圓ノ任意ノ切線ノ上ニ於テ調和列點ヲ定ムルハ), 其ノ一ツノ切點ト其ノ他ノ三ツト交ル點トハ調和列點ヲ作ル.
15. 直線 AB ニ C ニ於テ切シ, 二ノ線分 AC, CB ノ間ノ調和中項ヲ直徑トセル圓ハ AB ヲ直徑トセル圓ニ切ス.

第四編

完全四邊形及完全四角形ノ性質

定義

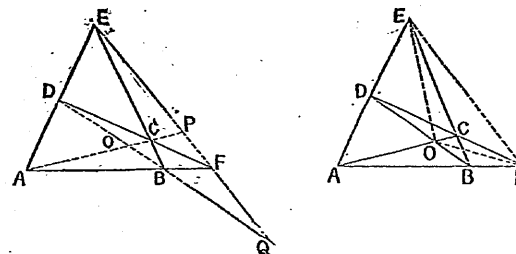
四直線(何レノ三ツモ共點ナラザル)ハ其ノ六ツノ交リト併セテ完全四邊形 (Complete quadrilateral) ト稱ス. 其四直線ヲ四邊形ノ邊, 其六點ヲ頂點ト稱ス. 同シ邊ノ上ニ在ラザル二ツノ頂點ヲ對頂點 (Opposite vertices) ト稱ス. 對頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ對角線 (Diagonal lines) ト稱シ, 對角線ノ作レル三角形ヲ完全四邊形ノ對角三角形 (Diagonal triangle) ト稱ス.

即(圖ニ於テ) AB, BC, CD, DA ハ四邊ナリ; A, B, C, D ,

四點(何レノ三ツモ共線點ナラザル)ハ其ノ六ツノ結ビト併セテ完全四角形 (Complete quadrangle) ト稱ス. 其四點ヲ四角形ノ頂點, 其六直線ヲ邊ト稱ス. 同シ頂點ヲ過ラザル二ツノ邊ヲ對邊 (Opposite sides) ト稱ス. 對邊ノ交ル三點ヲ對角點 (Diagonal points) ト稱シ, 對角點ヲ結ビ付クテ作レル三角形ヲ完全四角形ノ對角三角形 (Diagonal triangle) ト稱ス.

即(圖ニ於テ) A, B, C, D ハ四頂點ナリ; AB, BC, CD, DA ,

E, F ハ六頂點ナリ; EF, AC, BD ハ六邊ナリ; E, O, F ハ三對角點ナリ EOF ハ對角三角形ナリ.



以上ハクレモナ氏ノ命名法ナリ.

一ツノ完全四邊形ハ, 其ノ對角三角形ト併セテ, 七ツノ直線ト九ツノ交リヨリ成ルヲ明ナリ.

一ツノ完全四角形ハ, 其ノ對角三角形ト併セテ, 七ツノ點ト九ツノ結ビヨリ成ルヲ明ナリ.

定理 1 及 2.

完全四邊形ニ於テ, 一雙ノ對頂點ハ對角三角形ノ二頂點ト共ニ調和列點ヲ作ル.

完全四角形ニ於テ, 一雙ノ對邊ハ對角三角形ノ二邊ト共ニ調和直線ヲ作ル.

上ノ圖ヲ用ヰレハ, 三角形 EAF ニ於テ, EB, AP, FD ハ共點線ニシテ, DBQ ハ截線ナリ.

故ニ $AB \cdot FP \cdot ED = BF \cdot PE \cdot DA$,

又 $AB \cdot FQ \cdot ED = -BF \cdot QE \cdot DA$;

$$\therefore PF:QF = -PE:QE;$$

故ニ E, P, F, Q ハ調和列點ヲ作り, OE, OC, OF, OB ハ調和束線ヲ作ル.

同様ニ二ノ三角形 EAC, EDB ヲ考フルハ, AOCP 及 DOBQ が各調和列點ニシテ, ED, EO, EC, EF, 及 FB, FO, FC, FE が各調和束線ナルヲ見ルヲ得.

系. 上ノ圖ニ於ケル四點ノ列及四射線ノ束ハ何レモ皆調和ナリ.

此定理ニ依リテ定規ノミヲ用井テ次ノ作圖題ヲ解スルヲ得:-

作 圖 題

一ノ調和列點ノ三點ヲ
與ヘ第四點ヲ見出スヲ求
ム.

A, C, B ヲ與ヘラレタル點
トセヨ.

A ヲ過ル任意ノ二直線
AP, AQ ヲ引キ, C ヲ過ル任意

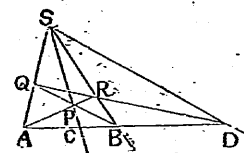
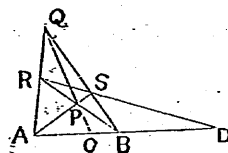
一ノ調和束線ノ三射線
ヲ與ヘ第四線ヲ引クヲ求
ム.

SA, SC, SB ヲ與ヘラレタ
ル射線トセヨ.

SA ノ上ニ任意ノ二點 A,
Q ヲ取り, SC ノ上ニ在ル任

ノ一直線ト夫々 P 及 Q ニ於
テ交ラシメヨ. BP, BQ ヲ結
ビ付ク, AQ, AP ト夫々 R, S
ニ於テ交ラシメヨ. 然ルハ
ハ RS ト AB トノ交點 D ハ
求ムル所ノ點ナル可シ.

意ノ一點 P ト結ビ付ク, SB
ト夫々 R 及 B ニ於テ交ラ
シメヨ. 然ルハ QR ト AB
ノ交點 D ヲ S ニ結ビ付ク
ル直線 SD ハ求ムル所ノ射
線ナル可シ.



双 對 ノ 原 理

完全四邊形及完全四角形ノ定義ハ其ノ一ニ於テ點ト直線, 及頂點ト邊ト云フ語ヲ交換スレハ他ヲ得ルモノナリ. 其ノ斯ノ如クナル理由ハ前者ハ點ニ於テ交ル直線ノ一組ヨリ成ルモノトナシ, 後者ハ直線ヲ以テ結ビ付ケタル點ノ一組ヨリ成ルモノトナシタルニ在リ; 是レ恰モ一ノ曲線ヲ或ハ直線ノ包ト考ヘ或ハ點ノ一組ト考フルト同一ノヲナリ.

調和截斷 (Harmonic section) ノ思想ヨリシテ, 圖形ノ原素

ヲ直線ト爲スカ或ハ點ト爲スカニ從テ定理 1 或ハ 2 ヲ得、
而シテ此ノ二定理ノ一ヨリ他ヲ得ル爲ニハ唯點ト直線
及列ト東ナル語ヲ交換スルヲ以テ足レリトス。

總テ圖形的定理即位置ニ關スル定理ハ之レヨリシテ
上ニ述ヘタル交換及之ト同様ノ交換ヲ行ヒ以テ之ニ對
應スル一ノ他ノ定理ヲ得ヘキモノナリ。即共點線ニ對
スル共線點、二點ヲ結ビ付クル直線ニ對スル二直線ノ交
ル點、調和列點ヲ作ル點ニ對スル調和束線ヲ作ル線ノ如
シ。斯ノ如キ點ト直線トノ對應ヲ雙對ノ原理ト稱ス。

斯ノ如ク對應シタル圖形的定理ノ一ヲ他ノ雙對ト稱ス。
而シテ一ノ圖形的性質ヲ證明シタルトハ其ノ雙對モ亦
眞ナリト知ル可シ。

定 理 3.

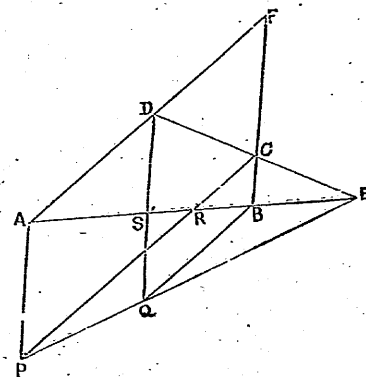
完全四邊形ノ三ノ對角線ノ上ニ對頂點ノ間ニ挿マレ
タル分ノ中點ハ共線點ナリ。

ABECFD ヲ完全四邊形トセヨ。然ルトハ AC, BD, EF ノ
中點ハ共線點ナルヘシ。

平行四邊形 AFPC, BFDQ ヲ完成シ, PQ, DE ヲ結ビ付ケ
ヨ。AE ガ CP, DQ ト夫々 R, S ニ於テ交ルトセヨ。然ル
トハ

$$\frac{EB}{BS} = \frac{EC}{CD} = \frac{ER}{RA}; \quad \therefore \frac{EB}{ER} = \frac{BS}{RA} = \frac{BQ}{RP};$$

故ニ P, Q, E ハ共線點
ナリ; 故ニ FP, FQ, FE
ノ中點ハ FQE ニ平行
ナル一直線ノ上ニ在
リ; 然ルニ此三
中點ハ又 AC, BD, EF ノ中
點ナリ (平行四邊形ノ
對角線ハ各他ヲ二等
分スルヲ以テ)。故ニ
定理ヲ得。



第 四 編 ノ 問 題

1. 定理 1 ノ圖ニ於テ PD, QA, OF ガ共點線ナルヲ證明セヨ。
2. 同圖ニ於テ PB ト OE トノ交點及 PD ト OF トノ交點ガ A 及 Q ト共線點
ナルヲ證明セヨ。
3. 同圖ニ於テ X, Y, Z ヲ夫々 DB, AC, EF ノ中點トセハ, $XO:XQ =$
 $DO:DQ$; Y, Z ニ就テモ同様ノ關係アリ; 又之ニ依リテ X, Y, Z ガ共線點ナ
ルヲ證明セヨ。
4. 同圖ニ於テ三角形 EAB, ECD, FBC, FDA ノ外接圓ガ一點 R ニ於テ相
交リ, $RB \cdot RD = RE \cdot RF$ ナルヲ證明セヨ。
5. 問題 4 ニ於テ總テノ四ノ三角形ハ R 點ニ就テ同一ノシムソノ線ヲ
有シ, 又其ノ垂心ハ共線點ナリ。

第五編

圓ノ性質

定理 1.

C, D が圓ノ一ツノ直徑ノ兩端 A, B 二就テ調和共軛點ニシテ, P が其圓周ノ上ニ在ル一點ナルトハ, (線ノ長, ノミニ

就テ即符號ニ關セズ) $\frac{PC}{PD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

O が圓ノ中心トセヨ, 然ルルハ

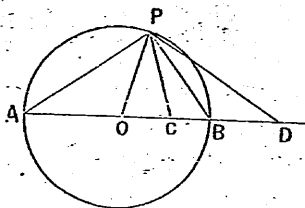
$$OO \cdot OD = OA^2 = OP^2 \quad (\text{第三編定理 3})$$

$$\therefore \frac{OC}{OP} = \frac{OP}{OD};$$

故ニ三角形 OCP, OPD ハ相似ナリ,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{PC}{PD} &= \frac{OC}{OP} = \frac{OP}{OD} = \frac{OC + OP}{OP + OD} = \frac{OP - OC}{OD - OP} \\ &= \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}. \end{aligned}$$

此定理ハ又直ニ第三編定理 8 ヲリ來ル.



系 三角形 PCD ノ底邊ノ分 BC, BD ノ比ガ邊 PC, PD ノ比ニ等シキヲ以テ PB ハ角 CPD ヲ二等分ス; 同様ニ PA ハ CP, PD ノ夾ム外角ヲ二等分ス.

定理 2.

C, D が二ツノ定點ニシテ, P が PC:PD が不變ナル様ナル點ナレハ, P ノ軌跡ハ一般ニ⁽¹⁾圓ナリ, 而シテ特ニ此比ガ 1 ナル場合ニハ軌跡ハ一ツノ直線ナリ.

CD ヲ B 及 A ニ於テ與ヘラレタル比ニ内分及外分セヨ (前定理ノ圖ヲ見ヨ); 然ルルハ

$$\frac{PO}{PD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD};$$

故ニ PB 及 PA ハ PC, PD ノ夾ム内角及外角ヲ二等分スルヲ以テ互ニ垂線ナリ. 故ニ P ハ AB ヲ直徑トセル圓ノ上ニ在リ.

比 PC:PD が 1 ナル時ハ P が CD ヲ直線ニ二等分スル直線ノ上ニ在ルヲ明ナリ.

轉倒法

定義 C, D が與ヘラレタル圓ノ一直徑ノ二端 A, B ニ

⁽¹⁾ 「一般ニ」トハ通常普通ノ場合ニ於テハト云フコトニシテ或ル特別例外ノ場合有ル意ナリ, 即此定理ニ於テハ而シテ以下ハ特別例外ノ場合ナリ.

就テ調和共轭點ナルルハ、 C, D ハ其圓ニ就テ倒點 (Inverse points) ナリト云フ。

倒ト稱スルハ、 O ガ其圓ノ中心ナレハ、 $OC \cdot OD = OA^2$ ニシテ、 OC, OD ガ倒ニ (即逆ニ inversely) 變スルヲ以テナリ。一點ノ倒點ヲ定ムルニハ、其圓ノ中心及其ノ半徑ノ二乗ヲ知ルヲ必要ニシテ且十分ナリ；前者ヲ轉倒ノ中心ト稱シ、後者ヲ常量ト稱ス。

一ノ線或ハ圖形上ノ各點ノ倒點ヲ求ムルハ、其倒點モ亦一ノ線或ハ圖形ヲ作ルヘシ、之ヲ名クテ前者ノ倒形ト稱ス。

是ヨリ倒形ノ重要ナル性質ヲ論シ、然ル後轉倒法ノ有用ナル例ヲ示スヘシ。

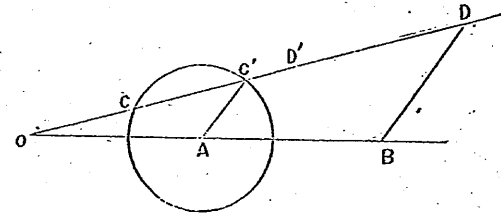
定理 3.

C, D ガ中心 O ナル圓ニ就テ倒點ニシテ、 C ガ一ノ圓ヲ畫クルハ、其ノ倒點 D ハ一般ニ他ノ圓ヲ畫ク；然レモ特ニ C ガ畫ク所ノ圓ガ O ヲ過ル場合ニハ D ハ一ノ直線ヲ畫ク。

C ガ畫ク圓ノ中心ヲ A トシ、直線 OCD ヲ圓ト再ビ C' ニ

於テ交ラシメ

ヨ。 AC' ニ平行ニ DB ヲ引キ OA ト B ニ於テ交ラシメヨ。



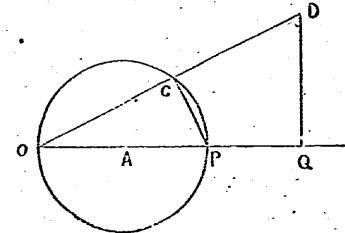
然ルルハ $OC \cdot OD$ ハ常量ナリ、 $OC \cdot OC'$ モ亦然リ；

故ニ $\frac{OD}{OC'}$ ハ常比ナリ、且

$\frac{OB}{OA}$ 及 $\frac{BD}{AC'}$ ニ等シ；

故ニ B ハ定點ニシテ、

BD ハ一定ノ長ナリ；



故ニ D ハ B ヲ中心トセル圓ノ上ニ在リ。

C ガ畫ク所ノ圓ガ O ヲ過ルルハ、其ノ直徑 OP ヲ引キ Q ヲ P ノ倒點トセヨ。然ルルハ $OP \cdot OQ = OC \cdot OD$,

即 $\frac{OP}{OC} = \frac{OD}{OQ}$ ；故ニ D ハ Q ヲ過リ OQ ニ垂線ナル直線ノ上ニ在リ。

附言. 此定理ノ圖ニ於テ中心ガ O ニ在リテ C, D ガ其ニ就テ倒點ナル所ノ圓ハ之ヲ畫カズ；一般ニ轉倒ノ問題ニ於テハ唯 $OC \cdot OD$ ガ R^2 即一ノ定量ニ等シキヲ認ムルヲ以テ足レリトス、而シテ C 及 D ハ O ニ就テ倒點ナ

リト云フ。又 C, D が O の反対側ニ在ルヲ得; 其場合ニ於テハ $OC, OD = -R^2$ ニシテ, 其間ハ虚圓ナリト云フ。

ポアセリエ (Peaucellier) が圓運動ヨリ直線運動ヲ生スル聯節法 (linkage) ヲ發明セルハ定理 3 ノ後ノ部分ヲ用キタルモノニシテ轉倒法ノ原理ニ依ルナリ。

最簡單ナル方法ノ一ハ次ノ如シ;—

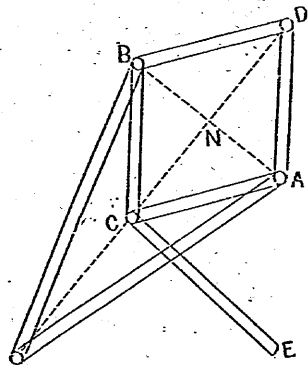
頂點ニ於テ自由ニ動く様ニ聯テタル⁽¹⁾ 菱形 ACBD ヲ取り, 定點 O ヲ中心トシテ廻轉シ得ル相等シキ二ノ棒 AO, BO = A, B ニ於テ之ヲ附着セシム。然ルハ棒ハ如何様ニ廻轉スルモ, O, C, D ハ常ニ共線點ナリ。又對角線 AB, CD ハ各他ヲ直角ニ二等分スルヲ以テ

$$OC \cdot OD = ON^2 - CN^2$$

$$= OB^2 - CB^2$$

$$= \text{常量};$$

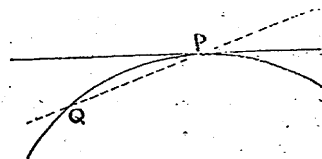
故ニ O 及 D ハ O ニ就テ倒點ナルヲ以テ, 更ニ一ノ棒 CE (E ハ EO = EC ナル様ニ固定ス) ヲ附着シ, C ヲシテ O ヲ過ル圓ヲ畫カシムルハ, D ハ OE ニ垂線ナル一直線ノ上ヲ動く可シ。O



⁽¹⁾ 鐵番ヲ以テ又ハ近頃坊間ニ在ル繩子掛ケノ如ク。

定義. P, Q ハ一ノ曲線上ニ在リテ相近キ二點ナリトシ, Q が無究ニ P ニ近ツキタ

ルハ直線 PQ ノ取ル位置ヲ P 點ニ於テノ曲線ノ切線ト稱ス。



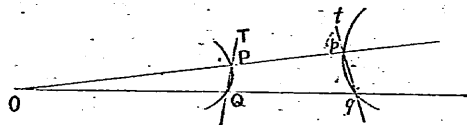
定義. 直線ト曲線トノ爲ス角トハ其ノ交點ニ於テノ曲線ノ切線ト其直線トノ夾ム角ヲ云フ。

定義. 相交ル二ノ曲線ノ爲ス角トハ其ノ交點ニ於テノ切線ガ夾ム角ヲ云フ。

定理 4.

轉倒ノ中心ヲ過ル各直線ガ一ノ曲線及其ノ倒形ト爲ス所ノ角ハ互ニ補角ナリ。

P 及 Q ナ一ノ曲線上ニ在リテ相近キ二點トシ, p 及 q



ヲ倒形曲線上之ニ對スル二點トセヨ。然ルハ

$$OP \cdot Op = OQ \cdot Oq = \text{常量};$$

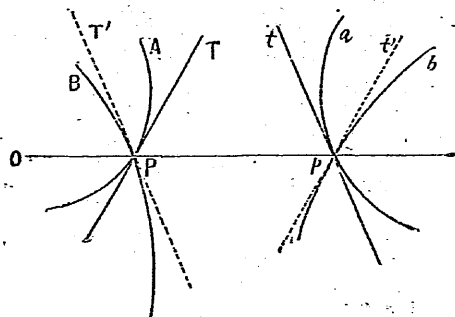
故ニ P, p, q, Q ハ共圓點ニシテ角 QPp 即 OPT ハ Qqp ノ補角ナリ。

今 Q ナシテ P ニ近ツカシムレハ、 q モ p ニ近ツキ、極限ニ於テハ直線 QPT 及 qpt ハ P 及 p ニ於テノ二曲線ノ切線トナリ、 OPT 及 Oqp ハ OPp ガ切線ト爲ス角 OPT 及 Opt トナル。故ニ此二ノ角モ互ニ補角ナリ。

定理 5.

二ノ軌跡ノ爲ス角ハ其ノ倒形ノ爲ス角ニ等シ。

PT 及 PT' ナ其ノ交點 P ニ於テノ曲線 A 及 B ノ切線トセヨ。然ルニ P ノ倒點 p ハ二ノ倒形曲線 a 及 b ノ上ニ在リ、即其ノ交點ナリ； pt , pt' ナ倒形曲線 a 及 b ノ切線トセヨ；



定理 4ニ依テ 角 $OPT = 180^\circ - opt$,

又

$$OPT' = 180^\circ - opt',$$

$$\therefore TPT' = tpt';$$

故ニ曲線 A 及 B ノ爲ス角ハ倒形曲線 a 及 b ノ爲ス角ニ等シ。

系. 二ノ曲線ガ一點ニ於テ相切スルニハ其ノ倒形曲線ハ其點ノ倒點ニ於テ相切ス。

定理 A.⁽³⁾

A, C, B, D カ調和列點ヲ作ルニハ、其ノ直線上ニ在ルニ

點 O ニ就テ其ノ倒點 A', C', B', D' モ調和列點ヲ作ル。

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \quad \text{ナルヲ以テ,} \quad \frac{OC - OA}{OC - OB} = -\frac{OD - OA}{OD - OB};$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{OC'} - \frac{1}{OA'}}{\frac{1}{OC'} - \frac{1}{OB'}} = -\frac{\frac{1}{OD'} - \frac{1}{OA'}}{\frac{1}{OD'} - \frac{1}{OB'}};$$

$$\therefore \frac{OA' - OC'}{OB' - OC'} = -\frac{OA' - OD'}{OB' - OD'};$$

$$\text{即} \quad \frac{C'A'}{C'B'} = -\frac{D'A'}{D'B'}, \quad \text{故ニ} \quad \frac{A'C'}{B'C'} = -\frac{A'D'}{B'D'}.$$

定理 B.

P, p 及 Q, q カ二双ノ倒點, O ガ轉倒ノ中心, R^2 ガ常量

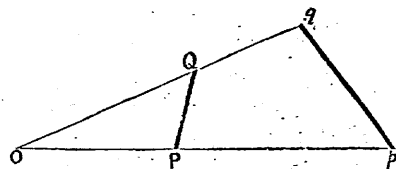
ナレハ、 $pq : PQ = R^2 : OP \cdot OQ$.

⁽³⁾ 此定理及定理 B, C ハ條目中ニ掲ケザルモノナリ、故ニ番外トシテ A, B, C ト記ス。

$OP \cdot Op = R^2 = OQ \cdot Oq$ ナルヲ以テ、二ノ三角形 POQ , qOp = 於テ、角 O ハ共通ニシテ、且 $OP:OQ = Oq:Op$ ナリ;
故ニ二ノ三角形ハ相似

ナリ

$$\begin{aligned}\therefore pq:PQ &= Op:OQ \\ &= OP:Op:OP:OQ \\ &= R^2:OP \cdot OQ\end{aligned}$$



此結果ハ一ノ圖形及ヒ其ノ倒形ニ於ケル相對應スル線ノ長ノ比ヲ與フルヲ以テ重要ナリ.

轉倒法ノ例題

次ニ二題ヲ掲ケテ轉倒法ヲ平面幾何學ニ應用スルノ例ヲ示サン; 此法ハ又引力、電氣ノ數學理論、及其他ノ問題ニモ應用サル、ト多シ.

(1) 「一ノ四邊形(圓ニ內接スル場合ヲ除クノ外)ノ對角線ノ包ム矩形ハ其ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ヨリ小ナリ」ト云フヲ平面幾何學 I, 16ニ依リテ證明セヨ.

ABC ヲ三角形トシ、中心 O ニ就テ A, B, C ノ倒點ヲ a, b, c トシ、 R^2 ヲ常量トセヨ.

然ルニハ $ab = \frac{R^2}{OA \cdot OB} \cdot AB$

$$lc = \frac{R^2}{OB \cdot OC} \cdot BC$$

$$ca = \frac{R^2}{OC \cdot OA} \cdot CA,$$

面シテ

$$\begin{aligned}OA \cdot Oa &= OB \cdot Ob \\ &= OC \cdot Oc = R^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore ab \cdot Oc + bc \cdot Oa &= \frac{R^4 \cdot AB}{OA \cdot OB \cdot OC} + \frac{R^4 \cdot BC}{OA \cdot OB \cdot OC} \\ &= \frac{R^4}{OA \cdot OB \cdot OC} \{AB + BC\};\end{aligned}$$

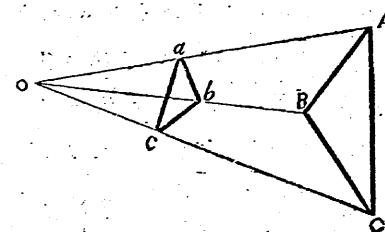
$$\therefore ab \cdot Oc + bc \cdot Oa > \frac{R^4 AC}{OA \cdot OB \cdot OC} \text{ 即 } > \frac{R^2}{OB} \cdot \frac{R^2 \cdot AC}{OA \cdot OC};$$

$$\therefore ab \cdot Oc + bc \cdot Oa > Ob \cdot ac.$$

是レ即四邊形 $Oabc$ ニ就テ此定理ノ證明ナリ.

若シ B カ AC ノ上ニ在レハ $AB + BC = AC$ ニシテ、直線 ABC ノ倒形ハ圓 $Oabc$ トナリ、上ノ不等式ハ等式ニ變ス; 故ニ「圓ニ內接スル四邊形ニ於テハ對角線ノ包ム矩形ハ對邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シ」此結果ヲ通常トレミー(Ptolemy)ノ定理ト稱ス.

(2) 「一ノ三角形ノ九點圓ハ其ノ內接及傍接圓ニ切ス」ト云フヲ(フオイエルバハノ定理)ヲ轉倒法ニ依リテ證明ス.



AR 角ノ二等分線トセヨ;

然ルルハ第二篇ノ記號法ニ從

ヒ, 第三篇定理 6 ニ依リテ

AIR₁ ガ調和列點ナルヲ知

ル; 故ニ平行線ノ理ニ依リテ

DXRX₁ モ調和列點ナリ. 而シ

テ A' ハ XX₁ ノ中點ナリ.

故ニ

$$A'R \cdot A'D = A'X^2 = A'X_1^2.$$

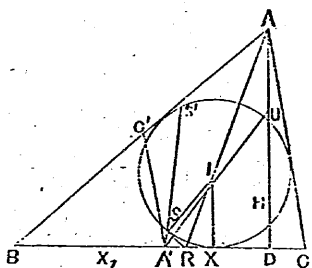
若シ中心 A' ニ就テ常量 A'X² ヲ以テ轉倒スレハ, X 及 X₁ ニ於テ邊 BC ニ切スル内接圓及傍接圓ノ倒形ハ原形ナリ; 而シテ九點圓ハ, R ヲ過リ其ノ直徑 A'U ニ垂直ニシテ BC ト

$$\angle A'UD = \angle A'C'D \quad (\text{同シ形ニ於テ})$$

$$= \angle BCD - \angle BCA' = 2\angle BAD - \angle BAC = \angle C - \angle B$$

ヲ爲ス所ノ直線トナル.

今 R ヨリ内接圓ヘ引クル切線 RS (又傍接圓ニモ切スル) ガ BC ト爲ス角 $= \angle XIS = 2\angle XIR = 2\angle RAD = \angle C - \angle B$ ナルヲ以テ RS ハ即九點圓ノ倒形ニシテ, 内接圓ニ切シ, 及 BC ニ切スル傍接圓ニ切ス. 故ニ九點圓ハ内接圓及傍接圓ニ切ス.



内接圓トノ切點ハ S ノ倒點 S' 即 A'S ガ再ヒ内接圓ト交ル點ナリ. 傍接圓トノ切點モ同様ニ見出スヲ得.

上ノ證明ハ J. P. Taylor 氏ノ發見ニシテ始メテ Quarterly Journal of Mathematics 第八卷ニ載ヒタルモノナリ.

極點及極線

定義. C, D ヲ一ノ圓ノ直徑ノ兩端 A 及 B ニ就テ調和共轭點ニシテ, D ヲ過リ A 或ハ B ニ於テノ切線ニ平行ニ直線 DE ヲ引キルハ, DE ヲ其圓ニ就テ C ノ極線 (Polar) ト稱シ, C ヲ DE ノ極點 (Pole) ト稱ス.

極點ガ圓ノ内ニ在レハ極線ハ外ニ在リ, 極點ガ圓ノ外ニ在レハ極線ハ内ニ在リ; 又 C ガ圓ノ中心 O ニ近ツクハ其ノ極線ハ O ヨリ遠サカリ, C ガ O ヨリ遠サカレハ, 極線ハ之ニ近ツク; O ノ極線ハ無究遠ニ在リ, 而シテ圓周上ニ在ル一點ノ極線ハ其點ニ於テノ切線ナリ.

極點及極線ノ調和性

定理 6.

極點ヲ過ル直線ハ皆其點, 其ノ極線及圓周ニ依リテ調和ニ截ラル.

O ヲ極點, DE ヲ其ノ極線

トシ, O ヲ過ル任意ノ直線ガ圓ト

交ル點ヲ X, Y トシ, 極線ト交

ル點ヲ E トセヨ. C ガ圓ノ内

ニ在リト假定セヨ. 然ルルハ

$$OC \cdot OD = OY^2 = OX^2;$$

故ニ二ノ三角形 COY, YOD ハ O ニ於テ共通ノ角ヲ有シ
且 $OC:OY = OY:OD$ ナルヲ以テ相似形ナリ. 同様ニ二
ノ三角形 COX, XOD モ相似形ナリ.

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \angle ODY &= \angle OYC \quad (\text{相似三角形ニ於テ}) \\ &= \angle OXC \quad (OX = OY \text{ ナルヲ以テ}) \\ &= \angle ODX \quad (\text{相似三角形ニ於テ}); \end{aligned}$$

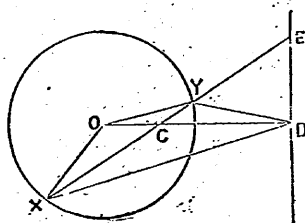
故ニ DC ハ角 XDY ノ二等分線ナリ;

故ニ DC ニ垂線ナル直線 DE ハ DX 及 DY ノ夾ム外角ヲ
二等分ス;

故ニ DX, DC, DY, DE ハ調和束線ヲ作り, X, C, Y, E ハ調和
列點ヲ作ル.

C ガ圓ノ外ニ在ル時モ同様ニ二双ノ相似三角形 $COY,$
 YOD , 及 COX, XOD 有リ;

$$\begin{aligned} \therefore \angle ODX &= \angle OXC \quad (\text{相似三角形ニ於テ}) \\ &= \angle OYX \quad (OX = OY \text{ ナルヲ以テ}) \end{aligned}$$



$$= \angle OYC \text{ ノ補角}$$

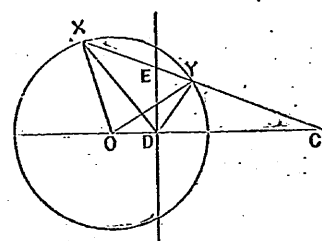
$$= \angle ODY \text{ ノ補角}$$

(相似三角形ニ於テ)

$$= \angle CDY;$$

故ニ $\angle XDE = \angle YDE$ ニシテ前ノ

場合ト同様ノ結果ヲ得.



系. 任意ノ一點 C ヲ過リ一ノ直線ヲ引キ圓ト X 及 Y
ニ於テ交ラシムルルハ, X 及 Y ニ就テ C ノ調和共軛點ノ
軌跡ハ其圓ニ就テ C ノ極線ナリ.

極點及極線ノ相對性

定理 7.

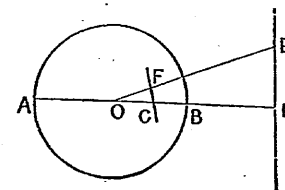
一點 C ノ極線 DE ノ上ニ在ル任意ノ點 E ノ極線ハ C
ヲ過ル.

OE ヲ結ビ付ク之ニ垂線ニ直線 CF ヲ引ク. 然ルルハ
 C, D, E, F ハ共圓點ナルヲ以テ

$$OF \cdot OE = OC \cdot OD = OA^2;$$

故ニ CF ハ E ノ極線ナリ.

系. E' ヲ DE ノ上ニ在ル任意
ノ他ノ一點トスレハ, E' ノ極線

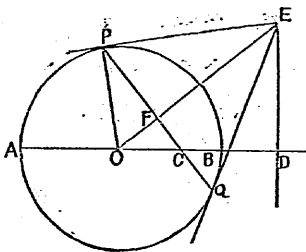


も C を過ル。故に二點 E, E' の極線ノ交點 C ハ直線 EE' ノ極點ナリ。

定理 8.

一ノ圓ニ就テ一點ノ極線ハ其點ヲ過ル弦ノ兩端ニ於テノ切線ノ交點ノ軌跡ナリ。

PCQ を C を過ル任意ノ弦トシ、 P 及 Q ニ於テノ切線ガ E ニ於テ交ルトシ、直線 ED ヲ直線 OC へ垂線ニ引ケ。然ルニ A ハ直線 OE ハ直線 PQ ヲ直角ニ二等分スルヲ以テ



$OP^2 = OF \cdot OE = OC \cdot OD$ (C, D, E, F ハ共圓點ナルヲ以テ);
故に DE ハ C ノ極線ナリ。

系. PQ ハ E ノ極線ナルヲ明ナリ; 故に圓ノ外ニ在ル點ノ極線ハ其點ヨリ引ケル切線ノ切點ヲ結ビ付クル直線ナリ。

定義. 一ノ圓ニ就キ各他ノ極線ノ上ニ在ル様ナル二點ヲ其圓ニ就テ共軛點 (Conjugate points) ナリト云フ; 一ノ圓ニ就テ各他ノ極點ヲ過ル様ナル二直線ヲ其圓ニ就テ共軛直線 (Conjugate lines) ナリト云フ。

定理 C.

一ノ圓ノ二ノ切線ノ交點ヲ過ル任意ノ一雙共軛直線ハ其二切線ト調和束線ヲ作ル。

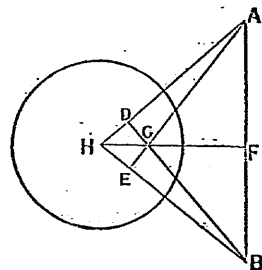
定理 C ニ因リ此四直線ハ切線ノ切點ヲ結ビ付クル直線ノ上ニ調和列點ヲ作ルコト明ナリ; 即此定理ハ極點及極線ノ調和性ヲ異様ニ述ヘタルモノニ過キズ
定義. 各邊ガ一ノ圓ニ就テ之ニ對スル頂點ノ極線ナル様ナル三角形ヲ其圓ニ就テ自共軛 (Self-conjugate) ナリト云フ。

定理 9.

與ヘラレタル三角形ガ其ニ就テ自共軛ナル圓ノ中心ハ三角形ノ垂心ニシテ、其ノ半徑ハ HA ト HD トノ間ノ比例中項ナリ (第二篇ノ記號

法ニ依ル)。

圓ノ中心ハ極點ヲ過リ極線ニ垂線ナル直線ノ上ニ在ルヲ以テ與ヘラレタル三角形 ABC ガ其ニ就テ自共軛ナル圓ノ中心ハ H ナルヲ明ナリ。



又其ノ半徑ノ上ノ正方形ハ

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF = \text{等シキヲ明ナリ.}$$

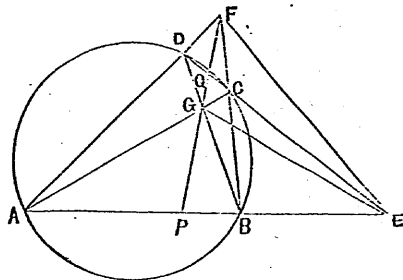
附言. 圓内ニ在ル一點ノ極線ハ全ク圓ノ外ニ在ルヲ以テ, 自共軛三角形ノ頂點ノ一ハ必ズ圓ノ内ニ在リテ他ノ二ハ必ズ圓ノ外ニ在ルコト明ナリ. 又斯ノ如キ圓ガ實ニ成リ立チ得ル爲ニハ垂心ガ三角形ノ外ニ在ルヲ即三角形ガ鈍角三角形ナルヲ必要ナリ. 鋭角三角形ノ場合ニハ此圓ハ虛圓ナリト云フ (定理 3 ノ附言ヲ見ヨ).

四角形ノ極點及極線ノ性質

定理 10.

圓ニ内接スル完全四角形⁽⁴⁾ノ對角三角形ハ其圓ニ就テ自共軛ナリ.

EFG ヲ四角形 ABCD ノ對角三角形トシ, FG ヲ AB, CD ト夾ケ P, Q ニ於テ交ラシメヨ; 然ルルハ F(APBE) ハ調和束線ナリ. (第四編 定理 2);



(4) 圓ニ内接スル完全四角形トハ其ノ四頂點ガ圓ノ上ニ在ルモノヲ云フ.

故ニ P ハ A 及 B ニ就テ E ノ調和共軛點ニシテ E ノ極線ハ P ヲ過ル (定理 6);

又同様ニ Q ヲ過ル;

故ニ FG ハ E ノ極線ナリ.

同様ニ GE ハ F ノ極線ナリ. 故ニ EFG ハ其圓ニ就テ自共軛三角形ナリ.

附言. 此定理ニ依リ定規ノミヲ用非テ一點 E ノ極線ヲ引クヲ得; 即 E ヲ過リ圓ノ二ツノ弦 EBA, ECD ヲ引クルハ, AD 及 BC ノ交點 F ト AC 及 BD ノ交點 G トノ結ビハ求ムル所ノ極線ナリ.

次ニ, 任意ノ直線 EF ノ極點ヲ求ムルニハ其直線上ニ一點 E ヲ取り, E ノ極線ヲ求メ, EF ト F ニ於テ交ラシメ⁽⁵⁾, 弦 EBA ヲ引キ, FA, FB ヲ結ビ付ク, 圓ト D, C ニ於テ交ラシメヨ; 然ルルハ AC 及 BD ノ交點 G ハ求ムル所ノ極點ナリ.

次ニ, E ヨリ圓ニ切線ヲ引クニハ, 上ノ如ク, E ノ極線ヲ見出スヘシ; 然ルルハ此極線ガ圓ト交ル點ヲ E ト結ビ付クル直線ガ求ムル所ノ切線ナリ (定理 8, 系).

(5) 原書ニハ「任意ノ二點 E, F ヲ取り」云々ト有レモ F ガ E ノ極線ノ上ニ在ルヲ必要ナリ.

定理 11.

圓ニ内接スル完全四角形ノ對角三角形ハ其四角形ノ頂點ニ於テ圓ニ切スル四ツノ直線ノ作ル完全四邊形ノ對角三角形ナリ.

E ノ極線 FG (前ノ圖ヲ見ヨ) ハ直線 EBA ノ極點ヲ過ル (定理 7), 即 A 及 B ニ於テノ切線ノ交點ヲ過ル.

同様ニ FG ハ C 及 D ニ於テノ切線ノ交點ヲ過ル; 故ニ FG ハ其ノ各邊ガ A, B, C, D ニ於テ圓ニ切スル完全四邊形ノ對角三角形ノ一邊ナリ; GE, EF モ亦同シ.

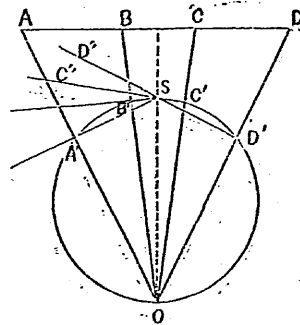
定理 12.

調和列點ヲ作ル四點ノ極線ハ調和束線ヲ作ル, 又逆ニ調和束線ノ射線ノ極點ハ調和列點ヲ作ル.

ABCD ヲ調和列點トシ, O ヲ圓ノ中心トセヨ. 此圓ニ就テ A, B, C, D ノ倒點 A', B', C', D' ハ O ヲ過ル一ツノ圓ノ上ニ在リテ, 其ノ直徑 OS ハ列點 ABCD ノ直線ニ垂線ナリ. SA', SB', SC', SD' ヲ結ビ付ケヨ; 然ルニハ此四直線ハ夫々 OA', OB', OC', OD' ニ垂線ナルヲ以テ A, B, C, D

ノ極線ナリ; 而シテ其ノ夾ム角ハ調和束線ノ四ツノ射線 OA, OB, OC, OD ノ夾ム角ニ等シ; 故ニ此四直線ハ調和束線ヲ作ル.

逆ニ, SA', SB', SC', SD' ガ與ヘラレタル調和束線ノ射線ナレハ, 其ノ極點ハ SO ヲ直徑トセル圓ノ倒形ナル直線 ABCD ノ



上ニ在リ; 而シテ S 及 O ヲ頂點トセル射線ノ夾ム角カ夫々相等シクシテ, 其ノ一ツガ調和束線ヲ作ルヲ以テ他モ亦調和束線ナリ; 故ニ A, B, C, D ハ調和列點ヲ作ル.

第五編ノ問題

1. P, P' 及 Q, Q' ヲ轉倒ノ圓⁽⁶⁾ノ同一ノ直徑上ニ在ルニ双ノ倒點トシ, X ヲ其ノ圓上ノ一點トスレハ, 角 PXQ, P'XQ' ハ相等シ.
2. P, P' ガ中心 C ナル圓ニ就テ倒點ニシテ, X ガ其圓上ノ一點ナレハ, $PX^2 : P'X^2 = PC : P'C$.
3. 一ツノ圓ヲ如何ニ轉倒セハ與ヘラレタル圓トナルヤ.
4. 任意ノ一圓ニ就テノ轉倒ノ中心ノ倒點ハ其圓ノ倒形ナル圓ノ中心ノ

(6) 轉倒ノ圓 (Circle of inversion) トハ P, P' 及 Q, Q' ガ之ニ就テ倒點ナル圓ヲ云フ.

倒點ナリ; 逆ニ、任意ノ一圓ノ中心ノ倒點ハ其ノ倒形ナル圓ニ就テノ極點ノ中心ノ倒點ナリ。

5. A, B, C, D が四ツノ共線點ニシテ、 A', B', C', D' が其ノ倒點ナレハ

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'B' \cdot C'D'}$$

6. 一ツノ點ニ於テ交ル三ツノ圓アリ; 其點ト其三ツノ圓ノ中ノ二ツノ圓ノ他ノ交點トヲ過リ第三ノ圓ト直角ニ交ル三ツノ圓ハ皆一點ニ於テ相交ルヲ極倒法ヲ用テ證明セヨ。

7. 頂點 A ナル調和束線ノ四射線ハ定點 B ヲ過ル任意ノ直線ノ上ニ調和列點ヲ作ル; 此定理ヲ B ナ中心トシテ轉倒セヨ。

8. 圓ノ與ヘラレタル弓形ニ於テノ角ハ不變ナリ; 此定理ヲ轉倒セヨ。

9. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ; 此定理ヲ (i) 其四邊形ノ一ツノ頂點ニ就テ、(ii) 其圓上ノ一點ニ就テ (iii) 其圓ノ外ノ一點ニ就テ轉倒セヨ。

10. メネラウスノ定理ヲ三角形ノ頂點ニ就テ轉倒セヨ。

11. 一ツノ圓ノ三ツノ弦 OA, OB, OC ナ直径トセル圓ガ二ツ宛相交ル三ツノ點ハ共線點ナリ; 此定理ヲ轉倒法ヲ用テ證明セヨ。

12. 三ツノ圓ガ二ツ宛相交ル點ヲ $A, A'; B, B'; C, C'$ トシ、 O ナ任意ノ一點トスレハ、三ツノ圓 OAA', OBB', OCC' ハ他ノ一點ニ於テ相交ル; 此定理ヲ轉倒法ヲ用テ證明セヨ。

13. 定圓ノ上ニ在ル點ノ同心圓ニ就テノ極線ハ常ニ他ノ一ツノ同心圓ニ切ス。

14. 與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル半径ノ上ニ在ル與ヘラレタル點 P ヨリ其半径ノ同シ側ニ在リテ之ト相等シキ角ヲ夾ム二ツノ直線 PA, PB ナ圓周ヘ引ケル直線 AB ハ常ニ一ツノ定點ヲ過ル。

15. 一ツノ圓ノ切線ノ切點ト其切線ガ他ノ任意ノ二切線及其ノ切點ト弦ト交ル點トハ調和列點ヲ作ル。

16. 轉倒ノ中心及任意ノ圓ノ中心ノ間ノ線分ヲ直径トセル圓ノ倒形ハ其圓ノ倒形ナル圓ニ就テ轉倒ノ中心ノ極線ナリ。

17. 一ツノ圓ノ中心ヨリ二點ノ距離ノ比ハ各他ノ(其圓ニ就テノ)極線ヨリノ距離ノ比ニ等シ。

18. 圓ノ任意ノ弦ノ兩端ヲ其ノ極點ヲ過ル一ツノ弦ノ中點ト結ビ付クル二ツノ直線ハ後ノ弦ト相等シキ角ヲ爲ス。

19. 一ツノ三角形ガ其ニ就テ自共轭ナル圓ハ其三角形ノ邊ヲ調和ニ截ル。

20. 三角形 ABC ノ頂點ガ夫々三角形 PQR ノ邊ノ極點ナレハ、 PQR ノ頂點ハ夫々 ABC ノ邊ノ極點ナリ。

21. 二ツノ點ガ一ツノ圓ニ就テ共轭點ナレハ、點ノ距離ノ上ノ正方形ハ其二點ヨリ圓ヘ引ケル切線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

22. 三角形ガ其ニ就テ自共轭ナル圓ニ就テ外接圓ノ倒形ハ九點圓ナリ。

23. A, B ガ夫々二ツノ同心圓ノ上ニ在ル二點ナレハ、 A ヲ過ル圓ニ就テ B ノ極線ヘ B ヨリ引ケル垂線ト B ヲ過ル圓ニ就テ A ノ極線ヘ A ヨリ引ケル垂線トノ比ハ二ツノ圓ノ半径ノ比ニ等シ。

24. 與ヘラレタル點 O ヲ過リ、與ヘラレタル圓ノ二ツノ弦 POP', QOQ' ナ引ケルハ、二ツノ圓 $POQ, P'OQ'$ ノ他ノ交點ノ軌跡ハ一ツノ圓ナリ。(O ニ就テ轉倒セヨ)

25. T ガ圓ノ外或ハ内ニ在ル一點ニシテ、 TU ガ T ノ極線ヘ引ケル垂線、 A 及 B ガ其圓上ノ任意ノ二點ナレハ $AT:BT = AU:BU$ 。

第六編

二以上ノ圓ノ性質

直交圓

定義

二ノ圓が其ノ交點ニ於テノ切線が互ニ垂線ナル様ニ交ルルハ直交圓 (Orthogonal) ナリ或ハ直交スルト云フ。

定理 1.

二ノ圓が直交スレハ、其ノ交點ニ於テ一ノ圓ノ切線ハ他ノ圓ノ中心ヲ過ル。

直徑ハ其ノ端ニ於テノ切線ニ垂線ナルヲ以テ明ナリ。

此定理ハ又次ノ如ク述フルヲ得：一雙ノ直交圓ニ於テ其ノ交點ヲ過ル半徑ハ互ニ垂線ナリ。

系。二ノ圓が直交スレハ其ノ中心ノ間ノ距離ノ上ノ正方形ハ半徑ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。此ノ逆モ亦真ナリ。

定理 2.

二點 C, D が他ノ二點 A, B ニ就テ調和共軛點ナレハ AB 及 CD ヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ直交圓ナリ。

O, O' ヲ此二圓ノ中心

トシ、E, F ヲ其ノ交點ト

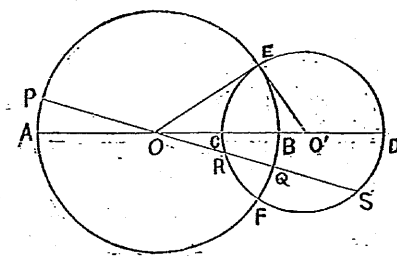
セヨ；然ルルハ

$$OC \cdot OD = OA^2 = OE^2$$

ナルヲ以テ半徑 OE ハ

CD ヲ直徑トセル圓ニ

切ス。故ニ二圓ハ直交ス。



定理 3.

二ノ圓が直交スレハ、一ノ圓ノ直徑ハ皆他ノ圓ニ依リテ調和ニ截ラル。

直徑 POQ が他ノ圓ト R 及 S ニ於テ交ルトセヨ (前ノ圖ヲ見ヨ)。然ルルハ OE ハ此圓ニ切スルヲ以テ

$$OR \cdot OS = OE^2 = OP^2$$

故ニ PRQS ハ調和列點ナリ。

系. P, Q 及 R, S が二双ノ調和共轭點ナレハ二點 R, S ナ過ル圓ハ皆 PQ ナ直徑トセル圓ト直角ニ交ル.

定理 4.

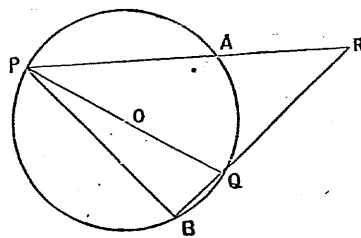
二圓ノ共通ノ弦ノ反對ノ側ニ在ル弓形ニ於テノ角ガ互ニ餘角ナレハ、二圓ハ直交圓ナリ.

二ノ角 EAF, EDF が餘角ナルヲ以テ、 $EOF, EO'F$ ハ互ニ補角ナリ; 故ニ OEO', OFO' ハ互ニ補角ニシテ且相等キヲ以テ各直角ナリ; 故ニ二ノ圓ハ直交圓ナリ.

定理 5.

一圓上ニ在ル二定點ヲ夫々一ノ不定ノ直徑ノ兩端ニ結ビ付ル直線ノ交點ノ軌跡ハ與ヘラレタル二點ヲ過リ與ヘラレタル圓ト直交スル圓ナリ.

A, B ヲ二定點, POQ ヲ任意ノ直徑トシ, PA, QB が R ニ於テ交ルトセヨ. PB ヲ結ビ付ケヨ. 然ルニ PQ ハ直徑ナルヲ以テ PBQ ハ直角ニシテ二角 BPR, BRP ハ互ニ餘角ナリ;



故ニ R ノ軌跡ハ AB ノ上ニ APB ノ餘角ニ等シキ角ヲ含ム圓ナリ; 故ニ與ヘラレタル圓ノ直交圓 (定理 4) ナリ.

如何ナル場合ニ於テ R が此圓ノ與ヘラレタル圓ノ内ニ在ル部分ヲ畫クカヲ考フ可シ.

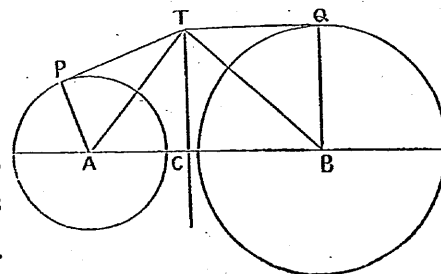
根 軸

定理 6.

二ノ與ヘラレタル圓ヘ引ケル切線ガ相等シキ様ナル點ノ軌跡ハ中心ヲ結ビ付クル直線ニ垂線ナル直線ニシテ之ヲ其ノ上ノ正方形ノ差ガ半徑ノ上ノ正方形ノ差ニ等シキ二ノ線分ニ分ツ.

A, B ヲ二ノ圓ノ中心トシ、二ノ切線 TP, TQ が相等シトセヨ. AP, AT, BQ, BT ヲ結ビ付ケ、 AB へ垂線 TC ヲ引ケ. 然ルニハ

$$BC^2 - AC^2 = BT^2 - AT^2$$



$$\begin{aligned}
 &= BQ^2 + TQ^2 - (AP^2 + TP^2) \\
 &= BQ^2 - AP^2.
 \end{aligned}$$

而シテ $BQ^2 - AC^2 = AB(BC - AC)$ ナルヲ以テ C ハ一ツノ定點ナルヲ明ナリ. 故ニ求ムル所ノ結果ヲ得.

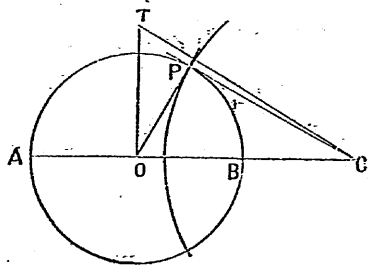
系. ニツノ圓ガ交ルルハ, 其ノ交點ハ此軌跡ノ上ニ在ルヲ明ナリ; 故ニ此軌跡ハニツノ圓ノ共通ノ弦ナリ.

定義. ニツノ圓ヘ引クル切線ガ相等シキ様ナル點ノ軌跡ヲニツノ圓ノ根軸 (Radical axis) ト稱ス.

定理 7.

與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル直徑ノ延長ノ上ニ中心ヲ有シ, 其圓ト直交スル數箇ノ圓ヲ畫クルハ其ノ中ノ任意ノ二ツノ圓ノ根軸ハ與ヘラレタル圓ノ中心ヲ過リ與ヘラレタル直徑ニ垂線ナル直線ナリ.

與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル直徑 AOB ノ上ノ一點 C チ一ツノ圓ノ中心トシ, P チ此二圓ノ一ツノ交點トシ, T チ O チ過リ AB ニ垂線ナル直線上ノ一點トセヨ.



然ルルハ T ヨリ中心 C ナル圓ヘ引クル切線ノ上ノ正
方形ハ

$$= CT^2 - CP^2 = OT^2 + OC^2 - CP^2 = OT^2 + OP^2 = AT^2$$

ニシテ C ノ位置ニ依リテ變スルヲナシ; 故ニ OT ハ斯ノ如キ圓ノ各双ノ根軸ナリ.

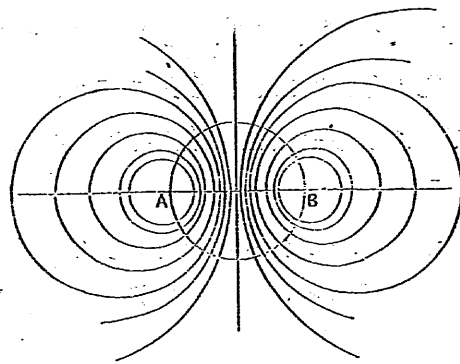
系. OT ハ全ク與ヘラレタル圓ノ直交圓ノ外ニ在ルヲ以テ, 此等ノ圓ハ相交ラサルヲ明ナリ.

定義. 何レノ二圓ヲ取ルモ同シ根軸ヲ有スル様ナル一組ノ圓ヲ共軸圓 (Coaxial) ト稱ス.

定理 7 ニ於テ相交ラザル一組ノ共軸圓ヲ畫ク方法ヲ示セリ. 其ノ圖ニ於テ $OC^2 - CP^2 = OP^2 = OB^2 =$ 常量ナルヲ以テ OC ハ決シ

テ OB ヨリ小ナルヲナク, C ガ B ニ近ツクニ從テ半徑 CP ハ漸次減小シ C ガ B ト合スル時零トナル; 又 C ガ B ヨリ遠サカ

ルニ從テ半徑 CP ハ漸次増大シ, C ガ無究遠ニ至ル時無究



大ナル; 斯クノ如クニシテ一列ノ間ヲ得; 圓ノ大サハ B ニ於ケル點⁽¹⁾ヨリ漸次増大シ遂ニ無窮大ノ半徑ヲ有スル圓ト成リ根軸 OT ト合ス而シテ各圓ハ全ク其ノ次ノ圓ノ内ニ在リ. B 點ヲ此列ノ限點 (Limiting point)ト稱ス; 此組ハ明ニ根軸ニ就テ對稱ニシテ直徑 AOB ノ他端 A ハ他ノ限點ナリ.

相交ル一組ノ共軸圓ニ於テハ圓ハ皆同シ共通ノ弦ヲ有シ, 限點ハ存在セズ(或ハ寧ロ限點ハ虛ナリト云フヲ通常トス); 何トナレハ此組ノ最小圓ハ共通ノ弦ヲ直徑トスル圓ナルヲ以テナリ.

定理 8.

一組ノ共軸圓ノ中任意ノ二ニ共通ナル切線ヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ二ノ中心ヲ結ビ付クル直線ト限點ニ於テ交ル; 此二點ハ此組ノ何レノ圓ニ就テモ各他ノ倒點ナリ.

二ノ圓ノ共通切線ガ其ノ根軸ト T ニ於テ交ルトスレハ(定理 7ノ圖), T ハ其切線ノ中點ナルヲ以テ之ヲ直徑

(1) 中心ガ B ニ在ル圓ハ半徑ガ零ニシテ即一點トナル; 之ヲ圓ノ無窮小ノ限トス.

トセル圓ノ中心ナリ. 又前定理ニ於ケル如ク, 此圓ノ半徑ノ上ノ正方形 $= OT^2 + OB^2 = TB^2$ ナルヲ以テ, 此圓ハ B ヲ過リ又 A ヲ過ル, 即此組ノ二限點ヲ過ル. 又 $CA \cdot CB = CP^2$ ナルヲ以テ A, B ハ C ヲ中心トセル圓ニ就テ互ニ倒點ナリ. 此組ノ何レノ圓ニ就テモ亦同シ.

定理 9.

三ノ圓ノ根軸ハ共點線ナリ.

A, B, C ヲ三ノ圓トシ, A 及 B ノ根軸ガ A 及 C ノ根軸ト T ニ於テ交ルトセヨ; 然ルルハ T ヨリ B 及 C ヘ引ケル切線ハ各 T ヨリ A ヘ引ケル切線ニ等シヲ以テ相等シ; 故ニ T ハ B 及 C ノ根軸ノ上ニ在リ.

定義. 三ノ圓ノ三ノ根軸ガ相交ル點ヲ此三ノ圓ノ根心 (Radical centre)ト稱ス.

定理 10.

一ノ與ヘラレタル圓ト一組ノ共軸圓ノ各トノ根軸ハ共點線ナリ.

O ヲ與ヘラレタル圓トシ, A, B, C 等ヲ共軸圓トシ, 共軸圓ノ根軸ガ O 及 A ノ根軸ト交ル點ヲ T トセヨ; 然ルル

然ルレハ N ハ OH ノ中點ナルヲ以テ (第二編, 定理 27, 系)

$$PH^2 + PO^2 = 2PN^2 + \frac{1}{2}OH^2;$$

$$\text{即} \quad HA \cdot HD + R^2 = 2PN^2 + \frac{1}{2}(R^2 + 2HA \cdot HD)$$

(第五編, 定理 9; 及第二編, 定理 31 = 依リ,
線ノ向キヲモ考ヘテ);

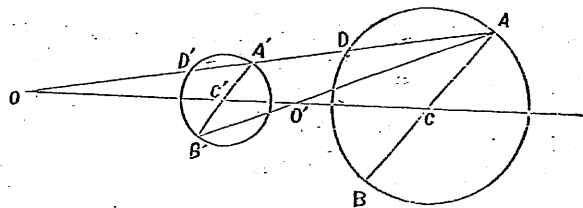
$$\therefore \frac{1}{2}R^2 = 2PN^2 \quad \text{即} \quad PN^2 = \frac{1}{4}R^2;$$

故ニ P ハ九點圓ノ上ニ在リ (第二編, 定理 27, 系).

相似ノ中心

定理 14.

二ノ與ヘラレタル圓ノ二ノ平行直徑ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ二ノ定點ニ於テ相交リ, 其點ニ於テ二ノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ヲ其ノ半徑ノ比ニ内分及外分ス.



$ACB, A'C'B'$ ヲ二ノ圓ノ平行直徑トシ, AA' 及 AB' ガ中

心ノ結ビ CC' ト O, O' ニ於テ交ルトセヨ. 然ルレハ一ツノ三角形 $ACO, A'C'O$ ハ相似ナルヲ以テ

$$CO : C'O = CA : C'A';$$

$$\text{同様ニ} \quad CO' : C'O' = CA : C'B'.$$

同様ニシテ BB', BA' ガ夫々 O, O' ヲ過ルヲ證明スルヲ得; 他ノ任意ノ平行直徑ニ就テモ亦同シ.

定義. 斯ノ如キ二ノ定點ヲ二ノ圓ノ相似ノ内心及外心 (Internal and external centres of similitude) ト稱ス.

定理 15.

二ノ圓ノ共通切線ハ相似ノ中心ノ何レカーツヲ過ル.

何トナレハ, 共通切線ノ切點ヲ過ル兩圓ノ直徑ハ之ニ垂線ナルヲ以テ互ニ平行ナレハナリ.

定理 16.

二ノ圓ト交リ其ノ相似ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ハ圓ニ依テ二ツ宛平行半徑ノ端ニ在ル四ツノ點ニ於テ截ラル; 而シテ一雙ノ平行半徑ノ間ニ在ル其直線ノ分ハ相似ノ中心ニ於テ半徑ノ比ニ分タル.

相似ノ中心 O ヲ過リ直線 $OD'A'DA$ ヲ引ケ (前ノ圖ヲ見ヨ);
然ルニハ二ツノ三角形 $OCA, OC'A'$ ニ於テ

$$OC:CA = OC':C'A'$$

ニシテ, O ニ於テノ角ガ共通ナルヲ以テ, 二ツノ角 $OAC, OA'C'$ ハ相等キカ或ハ互ニ補角ナリ;

相等キ場合ニハ $CA, C'A'$ ハ互ニ平行ニシテ又

$$OA:OA' = CA:C'A'.$$

定理 17.

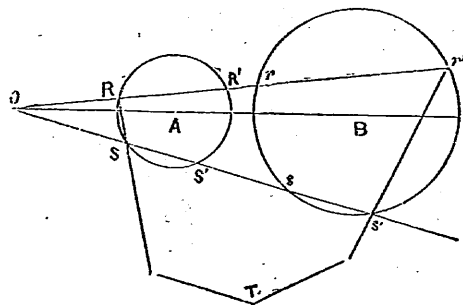
二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲ過ル二ツノ直線ガ一ツノ圓ト R, R', S, S' ニ於テ交リ, 他ノ圓ト r, r', s, s' ニ於テ交ルニハ,
四双ノ弦 $RS, rs; R'S', r's'; R'S, r's'; R'S', r's'$ ハ平行ニシテ, 他ノ
四双ノ弦 $RS, r's'; R'S', rs; RS', r's'; R'S, rs'$ ハ二ツノ圓ノ根軸ノ
上ニ於テ交ル.

$$OR:Or = OS:Os$$

(定理 16)

ナルヲ以テ二ツ
ノ三角形 ORS
及 Ors ハ相似ニ
シテ, RS ハ rs ニ

平行ナリ; 他ノ双ニ就テモ同様ナリ.



次ニ, 上ノ結果ニ依リ

$$OR \cdot Os = Or \cdot OS;$$

又

$$Os \cdot Os' = Or \cdot Or';$$

故ニ

$$OR:Os' = OS:Or';$$

即

$$OR \cdot Or' = OS \cdot Os';$$

故ニ R, S, r', s' ハ共圓點ナリ.

故ニ RS ガ $r's'$ ト T ニ於テ交レハ $TR \cdot TS = Tr' \cdot Ts'$;

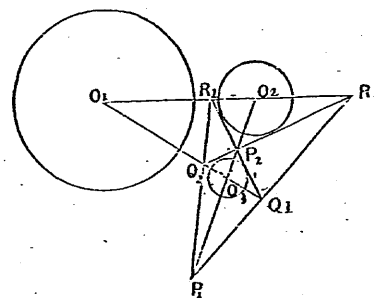
故ニ T ハ二ツノ圓ノ根軸ノ上ニ在リ. 他ノ双ニ就テモ亦同シ.

定理 18.

三ツノ圓ノ相似ノ中心ハ一ツノ完全四邊形ノ六ツノ頂點ニ
シテ三ツノ圓ノ中心ハ其ノ對角三角形ノ頂點ナリ.

O_1, O_2, O_3 ヲ三ツノ圓ノ中
心, r_1, r_2, r_3 ヲ其ノ半径;

P_1, P_2 ヲ二ツノ圓 O_2, O_3 ノ相
似ノ外心及內心; Q_1, Q_2 ヲ
二ツノ圓 O_3, O_1 ノ相似ノ外
心及內心; R_1, R_2 ヲ二ツノ
圓 O_1, O_2 ノ相似ノ外心及
內心トセヨ;



然ルハ $P_1, Q_1, R_1; P_2, Q_2, R_2; P_3, Q_3, R_3$ が夫々共線點ナルヲ證明スルヲ要ス.

$$\text{今} \quad \frac{O_2P_1}{O_3P_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{O_3Q_1}{O_1Q_1} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{O_1R_1}{O_2R_1} = \frac{r_1}{r_2};$$

$$\therefore O_2P_1 \cdot O_3Q_1 \cdot O_1R_1 = O_3P_1 \cdot O_1Q_1 \cdot O_2R_1 = -P_1O_3 \cdot Q_1O_1 \cdot R_1O_2;$$

故ニ P_1, Q_1, R_1 ハ共線點ナリ (第五編定理 8);

他ノ點ニ就テモ亦同様ナリ.

定義. 三ノ圓ノ六ノ相似ノ中心ヲ過ル四ノ直線ヲ相似ノ軸 (Axis of similitude) ト稱ス. 二ノ圓ノ相似ノ中心ヲ結ビ付クル直線ヲ直徑トシテ書キタル圓ヲ相似ノ圓 (Circle of similitude) ト稱ス.

定理 19.

與ヘラレタル三ノ圓ノ三ノ相似ノ圓ハ共軸圓ナリ.

前定理ノ記號ヲ用非, A, B ヲ P_1P_2 及 Q_1Q_2 ヲ直徑トシテ書キタル相似ノ圓ノ交點トセヨ; 然ルハ O_2, O_3 ハ P_1, P_2 ニ就テ調和共軛點ナルヲ以テ

$$\begin{aligned} AO_2 : AO_3 &= P_1O_2 : P_1O_3 \\ &= r_2 : r_3 \quad (\text{第五編定理 1}); \end{aligned}$$

同様ニ

$$AO_3 : AO_1 = r_3 : r_1;$$

$$\text{故ニ} \quad AO_2 : AO_1 = r_2 : r_1;$$

故ニ A ハ R_1R_2 ノ上ニ書キタル相似ノ圓ノ上ニ在リ
(第五編定理 2).

第六編ノ問題

1. ニツノ圓ガ P ニ於テ直角ニ交ルルハ, P ナ共通直徑ノ端ト結ビ付クル直線ハ其直徑ニ垂線ナル直徑ノ端ヲ過ル.
2. P, P' 及 Q, Q' ナ二ツノ圓ニ就テ二双ノ對點トスレハ, P, P', Q, Q' ナ過ル圓ハ等圓ノ圓ト直角ニ交ル.
3. 一ツノ圓ニ就テノ二ツノ共軛點ノ結ビテ直徑トセル圓ハ其圓ト直交ス.
4. 三角形ガ其ニ就テ自共軛ナル圓ハ其三角形ノ邊ヲ直徑トセル圓ト直交ス.
5. H ナ三角形 ABC ノ垂心トスレハ, AB 及 CH ナ直徑トセル圓ハ直交ス.
6. A 及 B ナ中心トシ C ニ於テ直交スル二圓アリ; 直線 BPQ ガ圓 A ト P, Q ニ於テ交リ, CP, CQ ガ圓 B ト夫々 R, S ニ於テ交レハ RS ハ BQ ニ垂線ナリ.
7. E ハ圓外ノ一點, F ハ E ノ極線上ノ一點ナレハ, E 及 F ナ中心トシ其圓ト直角ニ交ルニツノ圓ハ直交ス.
8. A 及 B ハ中心 C ナル定圓ノ上ニ在ルニツノ定點, QCR ハ任意ノ直徑ナレハ, ニツノ圓 ACQ 及 BCR ノ交點ハ定圓ト A 及 B ニ於テ直交スル圓ノ上ニ在リ.
9. AD, BE, CF ガ三角形 ABC ノ高ニシテ, H ガ其ノ垂心ナレハ A, B, C ナ中心トシ半徑ノ二乗ガ夫々 $AH \cdot AD, BH \cdot BE, CH \cdot CF$ ニ等シキ圓ハ直交ス.
10. 與ヘラレタル半徑ヲ以テ與ヘラレタルニツノ圓ト直交スル圓ヲ畫ケ.
11. ニツノ與ヘラレタル點 P 及 Q ヨリノ切線ガニツノ與ヘラレタル長ニ等シキ様ナル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

12. 各全ク他ノ外ニ在ル二圓ノ四ツノ共通切線ノ中點が共線點ナルヲ證明セヨ.
13. 共轭圓ノ一ツヘ其ノ限點ヨリ引ケル切線ハ根軸ニ依リテ二等分セラル.
14. 一ツノ直線ハ其ノ倒形ナル圓及轉倒ノ圓ノ根軸ナリ.
15. 二圓ノ交點及轉倒ノ中心ヲ過ル圓ノ倒形ハ二圓ノ倒形圓ノ根軸ナリ.
16. 任意ノ一點ヨリ二ツノ圓ヘ引ケル切線ノ上ノ正方形ノ差ハ其ノ中心ノ結ビト其點ヨリ根軸ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ノ二倍ニ等シ.
17. 共線點 O_1, O_2, O_3 ナ中心トシ、半徑が夫々 r_1, r_2, r_3 ニ等シキ三ツノ圓ハ $r_1^2 \cdot O_2 O_3 + r_2^2 \cdot O_3 O_1 + r_3^2 \cdot O_1 O_2 + O_2 O_3 \cdot O_3 O_1 \cdot O_1 O_2 = 0$ ナレハ共轭ナルヲ證明セヨ.
18. A, B, C が三ツノ共轭圓ノ中心、 PR, PS, PT が任意ノ一點 P ヨリ之ヘ引ケル切線ナレハ $BO \cdot PR^2 + CA \cdot PS^2 + AB \cdot PT^2 = 0$
19. 二ツノ圓ヘ之ト共轭ナル一ツノ圓ノ上ノ任意ノ一點ヨリ引ケル切線ノ上ノ正方形ノ比ハ二ツノ圓ノ中心ト第三圓ノ中心トノ距離ノ比ニ等シ.
20. 二ツノ定圓ニ直交スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.
21. 任意ノ一直線が二ツノ相交ラサル圓ト夫々 P, S 及 Q, R ニ於テ交ルルハ、 PQ, RS ハ限點ニ於テ相等シキ角ニ對ス.
22. D, E, F が三角形 ABC ノ高サノ足ニシテ、 BC, EF が X ニ於テ交リ、 CA, FD が Y ニ於テ、 AB, DE が Z ニ於テ交レハ、 X, Y, Z ハ外接圓及九點圓ノ根軸ノ上ニ在リ.
23. X, Y, Z ハ夫々三角形ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ在リテ、共線點ナルルハ、 AX, BY, CZ ナ直径トセル圓ハ共轭ナリ.
24. 四邊形ノ對角線ナ直径トセル圓ハ共轭ナリ.
25. 三角形ノ三邊ナ直径トセル三ツノ圓ノ根心ハ其ノ垂心ナリ.
26. 一ツノ與ヘラレタル點及直線が一組ノ圓ノ何ニ就テモ極點及極線ナルルハ、此組ハ共轭ナリ.
27. 三ツノ圓ガ之ニ於テ相等シキ角ニ對スル様ナル點ハ二ツ有リ、而シテ其ノ結ビハ三圓ノ根心ヲ過ル.

28. 相交ル一組ノ共轭圓ヲ其ノ交點ヲ中心トシテ轉倒スルルハ倒形ハ一組ノ共線點ナリ.
29. 相交ラザル一組ノ共轭圓ヲ其ノ一ツノ限點ヲ中心トシテ轉倒スルルハ其ノ倒形ハ他ノ限點ヲ中心トセル一組ノ同心圓ナリ.
30. 同心圓ノ總テノ半徑ハ之ト直角ニ交ル: 此定理ヲ轉倒セヨ.
31. 各他ノ倒形ナル二ツノ圓ト轉倒ノ圓ハ共轭ナリ.
32. T ハ相交ラザル二圓ノ根軸上ノ一點ナリ、其ノ中心ノ結ビガ二圓ト夫々 A, B 及 C, D ニ於テ交ル: TA, TB が第一ノ圓ト夫々 P, p ニ於テ交リ、 TC, TD が第二ノ圓ト夫々 Q, q ニ於テ交レハ、 T, q, Q, P, p ハ共圓點ナリ. 之ヲ證明セヨ.
33. 二ツノ定圓ガ A ニ於テ切ス; P, P' ハ各一圓ノ上ニ在リテ角 PAP' ハ直角ナリ: PP' ガ一ツノ定マレル點ヲ過ルヲ證明セヨ.
34. 二ツノ圓ニ於テ平行弦ヲ其ノ比が半徑ノ比ニ等シキ様ニ引ク; 然ルルハ其ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ相似ノ中心ヲ過ルヲ證明セヨ.
35. 二ツノ圓ガ切スルルハ平行直径ノ相對應スル端ハ切點ト共線ナリ.
36. 二ツノ圓ガ A ニ於テ外切ス、 S ハ相似ノ外心、 SCB ハ一ツノ共通切線ナリ; $SA^2 = SB \cdot SC$ ナルヲ證明セヨ.
37. A ハ中心 C, C' ナル二ツノ圓ノ相似ノ內心ナリ、一ツノ共通ノ外切線(相似ノ外心ヲ過ルモノ)ガ圓ニ夫々 D 及 D' ニ於テ切ス、 AN ハ DD' ニ垂線ナリ: CD' 及 $C'D$ が AN ノ中點ニ於テ交ルヲ證明セヨ.
38. 二ツノ與ヘラレタル圓ガ一ツノ點ヲ過ル任意ノ直線ノ上ニ截リ取ル弦ノ比が常比ニ等シキ様ナル點ヲ見出スト得ルヲ證明セヨ.
39. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ノ二極點ハ其中心ト共線ナリ.
40. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲ過リ一ツノ圓ニ就テ共轭ナル二直線ハ又他ニ就テモ共轭ナリ.
41. 二ツノ圓ノ相似ノ圓ヘ之ト共轭ナリ.

42. 三角形ノ垂心ハ九點圓及外接圓ノ一ノ相似ノ中心ナリ、之ヲ證明セ.
又他ノ相似ノ中心ヲ見出セ.

43. ニツノ圓ノ相似ノ圓ノ上ノ任意ノ一點ヨリ之ヘ引ケル切線ノ長サノ比ハ常比ナリ.

44. 中心ガ夫々 O, O' ニシテ、半徑ガ夫々 R, R' ナルニツノ圓ノ相似ノ圓ノ中心ヲ G トスレバ、
 $OG:O'G = R^2:R'^2$.

45. ニツノ定圓ニ切スル任意ノ圓ノ切點ヲ結ビ付クル直線ハ二定圓ノ一ノ相似ノ中心ヲ過ル.

46. ニツノ圓ノ共通ノ切線 TT' ト割線 $PQpq$ ガ同一ノ相似ノ中心ヲ過リ、
 P, p 及 Q, q ガ相對應スル點ナルハ $TT'^2 = Pp \cdot Qq$.

47. 一組ノ共轭圓ガ實ノ限點 L, L' ナリ；其ノ中心ヲ含ム直線上ノ一點 E ナ中心トシ、半徑ガ EL 及 EL' ノ比例中項ニ等シキ圓ヲ轉倒ノ圓トシテ之ヲ轉倒スルハ各圓ノ倒形ハ其組中ノ他ノ圓ニシテ、 E ナ過ル圓ノ倒形ハ根軸ナリ、又此圓ハ他ノ倒形ナル圓ノ各双ノ相似ノ圓ナリ、

第七編

幾何學の極大及極小

定義及説明

直線、角或ハ面積ノ如キ幾何學の量ガ或ル條件ニ從テ變化スル時其ノ取ルヘキ最大值ヲ極大 (Maximum) ト稱シ、最小値ヲ極小 (Minimum) ト稱ス。⁽¹⁾

考フル所ノ量ガ連續性 (Continuous) 變化ヲ爲スル、即其ノ値ハ漸々ニ變化シ此際更ニ斷絶スルコトナク相次クルハ、極大或ハ極小値ノ兩側ニ於テ相等シキ値アリ；極大ノ場合ニ於テハ共ニ其ノ極大値ヨリ小ニシテ、極小ノ場合ニハ共ニ其ノ極小値ヨリ小ナリ。

(1) 極大及極小ハ次ノ如ク定義スル可トス：

直線、角或ハ面積ノ如キ幾何學の量ガ或ル條件ニ從テ連續性變化ヲ爲スニ當リテ、其ノ一ツノ値ガ之ニ隣接スル前後ノ値ヨリ大ナルハ之ヲ其量ノ極大値ト稱ス；之ニ反シテ一ツノ値ガ之ニ隣接スル前後ノ値ヨリ小ナルハ之ヲ其量ノ極小値ト稱ス。一ツノ量ノ取り得ヘキ最大ノ値ヲ絕對極大ト名ク、最小ノ値ヲ絕對極小ト名クルコトアリ。本書ニ於テハ此二者ヲ區別セズシテ之ヲ極大或ハ極小ト呼フヲ以テ讀者之ニ注意スルコト必要ナリ。

例へハ量が一ツノ曲線上ノ點ヨ

リ一ツノ直線ヘ引ケル垂線ノ長ヲ

レハ、圖ニ於テ見ル如ク、曲線ガ

直線 AB ニ對シテ凹形ヲ爲ス

場合ニ於テハ、垂線 PM ハ曲線ノ P ニ於テノ切線ガ AB ニ

平行ナルト最大值ヲ取ル、而シテ PM ノ此位置ノ兩側ニ於

テ之ニ近ク其ノ長ガ相等シクシテ共ニ極大値ヨリ較小

ナル位置在リ；同様ニ、曲線ガ直線

ニ對シテ凸形ヲ爲スハ、垂線 PM

ハ曲線ノ P ニ於テノ切線ガ AB ニ

平行ナルト最小値ヲ取ル而シテ之

ニ近ク其ノ兩側ニ於テ垂線ノ長ガ相等シクシテ共ニ極

小値ヨリ少シク大ナル位置在リ。

一般ニ、M ヲ以テ量ヲ表ハシ、 M_A ヲ以テ其ノ極大値ヲ

表ハセハ、M ガ漸次増加スルト將ニ M_A ニ達セントスル

ニ先テ M' ナル値ヲ過ルトスレハ、 M_A ニ達シテヨリ

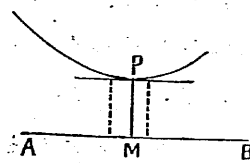
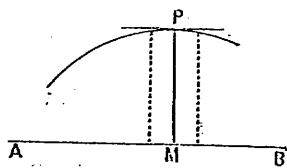
後 M ハ連續的ニ減小シ再ヒ M' ナル値ヲ過ルヘシ；斯

ノ如ク極大値 M_A ノ兩側ニ於テ相等シキ値 M' アリテ、

M' ヲ漸次 M_A ニ近ツクレハ此二ツハ終ニ M_A ト合ス可シ。

極小値ニ就テモ同様ナリ。

此事ヲ或ハ極大、極小ハ定常ノ値 (Stationary values) ナリ、



ト云フ；何トナレハ、變量ガ其ノ極大或ハ極小値ニ近ク其ノ兩側ニ於テ相等シキ値ヲ取ルヲ以テ、極大或ハ極小ノ附近ニ於テハ其ノ値ガ定常ナルヲ以テナリ。

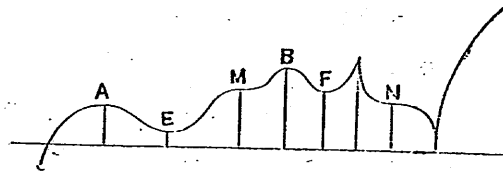
定常ノ原理ハ極大、極小ノ問題ヲ解クニ當リテ數々之ヲ用ヰルモノナリ；即量ノ二ツノ位置ヲ相接シテ且相等シキ値ヲ有スル様ニ取ルヲ得ハ、圖形ノ部分ノ相等シキヲ依リ、二ツノ位置ヲ合セシメテ極大、極小ノ眞位置ヲ發見スルヲ得。

然レモ茲ニ注意ス可キハ一ツノ變量ノ定常値ガ必ズシモ極大或ハ極小値ナラザルヲナリ；例へハ與ヘラレタル曲線ヨリ與ヘラレタル直線ヘノ最大或ハ最小垂線ヲ見出ス問題ニ於テ、切線ガ與ヘラレタル直線ニ平行ナル様ナル曲線上ノ點ヨリ引ケル垂線ガ求ムル所ノモノナルヲ示セリ；然レモ若シ其平行切線ガ其點ニ於テ曲線ヲ截ルハ其垂線ハ定常ノ値ヲ有スルニモ拘ラス、極大或ハ極小ナラザルヲ次ノ圖ニ示スガ如シ (圖中ニハ他ノ例外ヲモ表ハス。)⁽²⁾

(2) 圖中 M 及 N 點ヨリノ垂線ハ極大或ハ極小ナラズ。

一ツノ極大(或ハ極小)ガ必ズシモ絶對的極大(或ハ極小)ナラザルヲ圖ニ於テ見ルヘシ；例へハ A, B ハ共ニ極大値ヲ與ヘ E, F ハ共ニ極小値ヲ與フトモ、F ニ於テノ極小値ハ却テ A ニ於テノ極大値ヨリ大ナリ。

極大,極小ヲ充
分ニ論究スル
コハ微分學ノ
助力ヲ要スル
ヲ以テ本書ノ
範圍外ナリ.



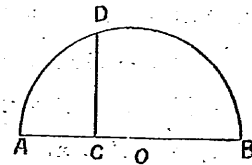
定理 1.

一ノ與ヘラレタル有限直線ノ二ノ分ガ相等シキ時其
二ノ分ノ包ム矩形ハ極大ニシテ,其ノ上ノ正方形ノ和ハ
極小ナリ.

ABヲ與ヘラレタル直線, Cヲ其ノ上ノ一點トセヨ:
ABヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, CD
ヲ ABニ垂直ニ引ケ.

然ルルハ 矩形 $AC \cdot CB = CD^2$
ナルヲ以テ, Cガ圓ノ中心ニ在ル
時,即二ノ分ガ相等シキ時,矩形ハ極大ナリ.

又 $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot CB$ ナリ,
故ニ $AC^2 + CB^2$ ハ矩形 $AC \cdot CB$ ガ極大ナル時極小
ナリ.



定理 2.

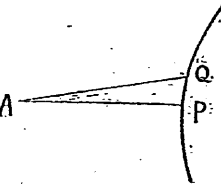
一ノ與ヘラレタル點ヨリ一ノ圓ヘ引ケル直線ノ中,其
點ヲ過ル法線⁽¹⁾ハ極大或ハ極小ナリ.

此定理ハユークリッド III, 7 及 8. ニ於テ證明セルモノ
ニシテ,圓周ノ凸分ヘ引ケルモノ極小ニシテ,凹分ヘ引ケ
ルモノ極大ナリ.

次ノ證明ハ連續ニ凸或ハ凹ナル任意ノ曲線ニ應用ス
ルヲ得.

APヲAヨリ引ケル極小線トシ, AQヲ其次ノ位置ト
セヨ.⁽²⁾

然ルルハ極限ニ於テハ $AP = AQ$ ナ
ルヲ以テ三角形 APQ ハ二等邊ナリ.
而シテ角 PAQ ハ窮リ無ク小ナルヲ以テ A
テ二ノ角 APQ, AQR ハ極限ニ於テ
各直角ナリ. 而シテ PQ ハ極限ニ於



(1) 一ノ曲線リ一ノ點ニ於テノ法線トハ其點ヲ過リ其點ニ於テノ切線
ニ垂線ナル直線ナリ.

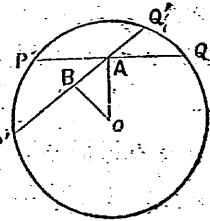
(2) AP, AQヲ極小線ノ兩側ニ在リテ之ニ隣接スル相等シキ二線トシ, 此
二線ヲ互ニ相近ツカシメ極限ニ於テ其ノ相合シタル位置ヲ極小線トスル
方了解ニ便ナルヘシ.

テ P ニ於テノ切線ノ方向ナルヲ以テ AP ハ P ニ於テノ法線ナリ。同様ニ曲線ガ A ノ方ニ凹形ヲ爲スルハ法線 AP ハ極大ナルヘシ。

定理 3.

一、ノ圓ト其ノ内ニ在ル一點トヲ與フルルハ其點ニ於テ二等分サル、弦ハ (1) 極小ニシテ、(2) 極小ノ面積ヲ截リ取ル。

A ナヲ與ヘラレタル點トシ、 PQ ナ其點ニ於テ二等分サル、弦トシ、 $P'Q'$ ナ A ナ過ル他ノ任意ノ弦トセヨ。 A ナ中心 O ト結ビ付クヨ。然ルルハ $P'O$ ハ PQ ニ垂線ナリ。 OB ナ $P'Q'$ ニ垂線ニ引ク。



然ルルハ角 OAB ハ直角 OBA ヨリ小ナルヲ以テ OB ハ OA ヨリ小ナリ；而シテ中心ニ近キ弦ハ遠キモノヨリ大ナリ；故ニ $P'Q'$ ハ PQ ヨリ大ナリ；故ニ PQ ハ A ナ過ル極小弦ナリ。又中心ヨリ遠キ弦ハ小ナル弓形ヲ截リ取ルヲ明ナリ、即弓形 $PQ'Q$ ハ極小ナリ；勿論弓形 $PP'Q$ ハ半圓ヨリ大ニシテ極大ナリ。

定理 4.

二直線及其ノ夾ム角ノ内ニ在ル一點ヲ與フルルハ、其點ヲ過リ其二直線上ニ兩端ヲ有スル直線ガ其二直線ト共ニ作ル三角形ノ中、其點ニ於テ二等分サル、直線ノ作ル三角形ガ極小ナリ。

AB, AC ナ二直線トシ、 O ナ其ノ夾ム角ノ内ニ在ル點トセヨ； POQ ガ AB, AC ト共ニ作ル三角形ガ極小ナリトセヨ。⁽¹⁾

O ナ過リ POQ ニ極メテ近ク直線 $P'OQ'$ ナ引ク。然ルルハ極限ニ於テ、

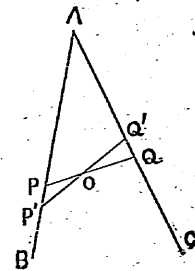
$$\text{三角形 } PAQ = P'AQ';$$

$$\therefore \text{三角形 } POP' = QOQ';$$

$$\therefore \text{矩形 } OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ';$$

$$\text{極限ニ於テハ } OP^2 = OQ^2,$$

$$\text{即 } OP = OQ.$$



⁽¹⁾ $APQ, AP'Q'$ ナ極小三角形ノ位置ノ兩側ニ在リテ之ニ隣接スル相等シキ二ノ三角形トシ、此二ノ位置ヲ相近クカシメ極限ニ於テ其ノ相合シタル位置ヲ極小三角形トスル方ニ了解ニ便ナルヘシ。

以下ノ諸定理ニ於テモ同様ノ事有リト雖一々註セズ。

定理 5.

三角形ノ二邊ノ長ヲ與フル時ハ其ガ直角ヲ夾ム時其ノ面積極大ナリ。

AB ナ與ヘラレタル邊ノ一トシ之ヲ固定シタリトセヨ。

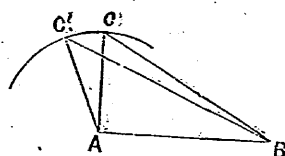
然ルニハ AB ノ上ニ他ノ一邊

ガ AC = 等シキ様ニ畫キタル三

角形ノ中、最大ノ高サヲ有スルモ

ノガ最大ナリ；即 AC ナ高トシ角

CAB ガ直角ナル三角形ガ最大ナリ。



定理 6.

同ノ底邊ヲ有スル三角形ノ中、二等邊三角形ハ

(1) 面積ヲ與フル時ハ極小ノ周ヲ有シ；

(2) 周ヲ與フル時ハ極大ノ面積ヲ有ス。

(1) AB ナ與ヘラレタル底邊トセヨ；然ルニハ AB ノ上ニ畫キタル等積ノ三角形ノ頂點ハ皆 AB ニ平行ナル直線 CD ノ上ニ在リ。

直線 BE ナ CD へ垂線ニ引キ、之ヲ E マテ延長シ $EF = BE$ トセヨ。

AF ナ結ビ付ク其ガ CD ト交ル點ヲ P トシ、CD 上ニ任意ノ一點 Q ナ取り、QA、QB、QF ナ結ビ付クヨ；

然ルニハ $BP = FP$, $BQ = FQ$ ナルヲ明ナリ；

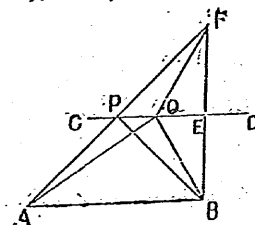
又 $AF < AQ + QF$ ；

即 $AP + PB < AQ + QB$ ，

即三角形 APB ハ極小ノ周ヲ有ス；

而シテ $AP = PF = PB$ ナルヲ以テ

此三角形ハ二等邊ナリ。



(2) AB ナ底邊トシ與ヘラレタル周ヲ有スル所ノ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ A、B ナ焦點トセル橢圓ニシテ、極大ノ三角形ハ短徑ノ端ヲ其ノ頂點トナスヲ以テ二等邊ナルヲ明ナリ。

或ハ次ノ如ク、(2) ナ (1) ヨリ推究スルヲ得：— APB ナ極大面積ノ三角形トシ、AQB ナ之ニ隣ル位置トセヨ；然ルニハ面積 $APB = AQB$ 。又 $AP + PB = AQ + QB$ 。然ルニ此二者ハ面積ヲ與ヘテ最小周ノ三角形ヲ定ムル時ニ用ナル要件ト全ク同一ナルヲ以テ、(1) ニ依リテ三角形 APB ガ二等邊ナルヲ知ル。

定理 7.

總テノ三角形ノ中、正三角形ハ

(1) 面積ヲ與フル時、極小ノ周ヲ有シ;

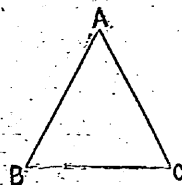
(2) 周ヲ與フル時極大ノ面積ヲ有ス.

(1) 一邊 BC ヲ固定シタリトセヨ. 然ルニ定理 6 ニ依リテ, $AB = AC$ ナル時、周ハ極小ナリ.

次ニ AB ヲ固定シタリトセハ $AC = CB$ ナル可シ.

故ニ正三角形ハ極小周ヲ有ス.

(2) 同様ニ證明スルヲ得.



定理 8.

同數ノ邊ヲ有スル多角形ノ中、等邊多角形ハ

(1) 面積ヲ與フル時、極小ノ周ヲ有シ;

(2) 周ヲ與フル時、極大ノ面積ヲ有ス.

(1) 定理 7 ニ於ケル如ク、一ツヲ除クノ外總テノ頂點ヲ固定シタリトセヨ. 然ルニ其多角形ノ周ハ其頂點ノ兩傍ニ在ル二邊ガ相等シキ時極小ナリ. 同様ニ相隣ル二邊ガ皆相等シキヲ必要ナリ; 即其多角形ガ等邊多角形ナルヲ必要ナリ.

(2) 同様ニ證明スルヲ得.

定理 9.

與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル二ツノ切線ガ他ノ一ツノ切線ヨリ截リ取ル分ハ、其ガ切點ニ於テ二等分サル、時、一ツノ極小ナリ; 而シテ與ヘラレタル圓ガ此三切線ノ作ル三角形ニ傍接スル時ハ三角形ハ一ツノ極大ニシテ、内接スル時ハ一ツノ極小ナリ.

AE, AG ヲ與ヘラレタル二ツノ切線トシ, BPC ヲ極大(或ハ極小)三角形 ABC ヲ作ル所ノ P ニ於テノ切線トシ; DQE ヲ之ニ極メテ近キ切線トシ, 此二ツノ切線ガ T ニ於テ交ルトセヨ.

然ルニハ、極限ニ於テ

三角形 $ADE = ABC$

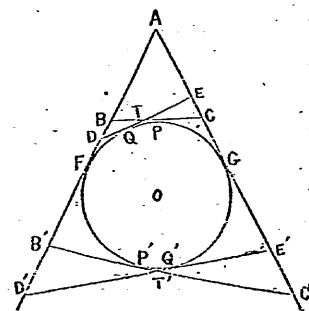
$\therefore \quad \angle BTD = \angle CTE;$

$\therefore \quad \text{矩形 } TB \cdot TD = TC \cdot TE.$

然ルニ Q ガ進ミテ遂ニ P ト合スル時ハ T モ亦之ト合スルヲ以テ、極限ニ於テ

$PB^2 = PC^2$, 即 $PB = PC.$

同一ノ方法ヲ用井テ, A ヨリ遠キ側ニ於テ圓ノ引ケル切



線 $B'C'$ = 就テ同シ結果ヲ得. 而シテ三角形 ABC ハ一ノ極大ニシテ, 三角形 $A'B'C'$ ハ一ノ極小ナルヲ明ナリ.⁽⁹⁾

又三角形 ABC = 就テ第二編ノ記號法ヲ用非レハ

$$\Delta = r_1(s - a) \quad (\text{第二編定理 13})$$

即 $r_1 a = r_1 s - \Delta$.

而シテ $s = AF = AG$ (第二編定理 12) ナルヲ以テ s ハ一ノ常量ナリ; r_1 モ亦然リ; 故ニ Δ ガ一ノ極大ナル時 a ハ一ノ極小ナリ.

同様ニ, 三角形 $AB'C'$ = 就テ, Δ' ヲ其ノ面積, s' ヲ其ノ半周トシ, $B'C' = a'$ トスレハ,

$$\Delta' = r_1 s' = r_1(s' - a' + a);$$

$$\therefore r_1 a' = \Delta' - r_1(s' - a');$$

而シテ $s' - a' = AF$ ナルヲ以テ, Δ' ガ一ノ極小ナル時 a' ハ一ノ極小ナリ.

定理 10.

一ノ圓ニ外接スル同數ノ邊ノ多角形ノ中, 正多角形ハ周並ニ面積共ニ極小ナリ.

⁽⁹⁾ 何トナレハ切線 DE ガ AF 或ハ AG ニ極メテ近キ位置ヲ取レハ三角形 ADE ハ非常ニ小トナリ, 又切線 $D'E'$ ガ AF 或ハ AG ニ平行ノ位置ニ極メテ接近スレハ三角形 ADE' ハ非常ニ大ナルヲ以テナリ.

多角形ノ一邊 BC ヲ除クノ外總テシ邊ヲ固定シタリトセヨ. (前ノ圖ヲ見ヨ). 然ルニハ定面積 $OFAG$ ハ面積 $OEBG$ 及三角形 ABC ヲ成ル;

故ニ ABC ガ一ノ極大ナル時即 BC ガ P = 於テ二等分サルハ時 $OEBG$ ハ一ノ極小ナリ; 而シテ同時ニ BC モ, 又從テ $EBCG$ モ一ノ極小ナリ.

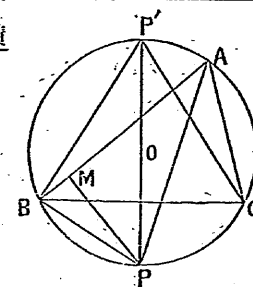
同様ニ多角形ノ面積或ハ周ヲ一ノ極小ナラシムル爲ニハ各邊ガ皆其ノ切點ニ於テ二等分サルハ必要ナリ. 而シテ斯ノ如キ場合ニ於テハ各邊ハ皆相等シク, 且圓ノ中心ニ於テ其ノ上ニ立ツ所ノ角モ相等シク, 即其多角形ハ正多角形ナルヲ明ナリ.

定理 11.

一ノ圓ニ内接シ與ヘラレタル弦ヲ底邊トセル三角形ノ中, 二等邊三角形ハ周並ニ面積

共ニ一ノ極大ナリ.

第二編ノ記號法ヲ用非レハ, 二等邊三角形 $P'BC$ ハ其ノ高, g 任意ノ他ノ三角形 ABC ヲ大ナルヲ以テ三角形 ABC ヲ大ナルヲ明ナリ.



AB へ垂線 $\perp$ PM を引ク。然ルハ二ノ三角形 APM, P'PB は相似ニシテ、直径 $P'P > AP$ ナルヲ以テ $P'B > AM$ ナリ。

然ルニ $2AM = AB + CA$ (第二編定理 17);

故ニ P'BC は極大ノ周ヲ有ス。

定理 12.

同シ底邊ヲ有スル二ノ凸多角形アリテ、其ノ一ノ頂點ハ皆他ノ多角形ノ邊ノ上ニ在ルカ或ハ其ノ内ニ在ルトハ、後ノ多角形ノ周ハ前ノ多角形ノ周ヨリ大ナリ。

若シ一ノ多角形ノ頂點ガ皆他ノ多角形ノ邊ノ上ニ在レハ、三角形ノ二ノ邊ハ合セテ他ノ一ノ邊ヨリ大ナリナル定理ニ依リテ此定理ノ真ナルヲ明ナリ。之ト「三角形ノ一ノ邊ノ兩端ヨリ三角形ノ内ノ一ノ點へ直線ヲ引クハ此二ノ直線ハ合セテ三角形ノ他ノ二ノ邊ヨリ小ナリ」ナル定理トヲ併セテ總テノ場合ニ於テ此定理ヲ證明スルヲ得。

定理 13.

一ノ圓ニ内接スル同數ノ邊ノ多角形ノ中、正多角形ハ周並ニ面積共ニ極大ナリ。

定理 8 及 10 ニ於テ用井タル方法ニ依リ定理 11 ヨリ直ニ推究スルヲ得。

定理 14.

與ヘラレタル長ノ四ノ直線ヲ以テ作リタル四邊形ノ中、圓ニ内接スルヲ得ルモノガ極大ナリ。

ABCD ヲ極大面積ノ位置トシ、AB ヲ固定シタル時之ト極メテ近キ位置ヲ $ABC'D'$ トセヨ。AD 及 BC ガ O ニ於テ交ルトセヨ。

然ルハ $AD = AD'$ ナルヲ以テ、極限ニ於テ角 ADD' ハ直角ナリ;

故ニ、極限ニ於テ、 ODD' モ亦直角ニシテ、 $OD = OD'$ ナリ;

同様ニ $OC = OC'$ (極限ニ於テ)。

而シテ $CD = C'D'$;

$\therefore$ 角 $DOC = D'OC'$;

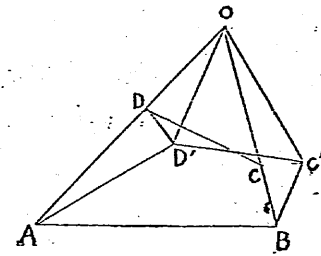
而シテ三角形 $OCD = OC'D'$;

$\therefore$ 角 $DOD' = 角COC'$ 。

又極限ニ於テ

面積 $ABCD = 面積ABC'D'$;

$\therefore$ 三角形 $OAB = 面積OC'BAD'$ 。



共通ノ部分 $OBAD'$ ヲ引キ去レハ、三角形 OAD' = 三角形 OBC' ナリ;

然ルニ、三角形ノ角 AOD' ハ他ノ三角形ノ角 BOC' = 等シ;

$$\therefore OA \cdot OD' = OB \cdot OC';$$

故ニ極限ニ於テ $OA \cdot OD = OB \cdot OC$;

故ニ A, B, C, D ハ共圓點ナリ.

系 1. 與ヘラレタル長ヲ有スル與ヘラレタル數ク直線ヲ以テ作ツタル多角形ノ中、之ニ外接スル圓ヲ畫シテ得ルモノガ極大ナリ.

何トナレハ、上ノ定理ニ依リ、相隣ル四ツノ頂點ハ皆共圓點ナリ、而シテ三ツノ點ガ一ノ圓ヲ定ムルヲ以テ、總テノ頂點ガ同一ノ圓ノ上ニ在ルヲ必要ナレハナリ.

系 2. 若シ邊ノ數ガ無究大トナリ、各邊ノ長ガ無究ニ減小スレハ、極大多角形ハ終ニ其ノ外接圓ト合スヘシ. 故ニ、一ノ圓ノ面積ハ同シ周ヲ有スル任意ノ他ノ閉チタル圖形ノ面積ヨリ大ナリ.

定 理 15.

定理 14 ニ於テノ直線ノ相隣ラザル二、ガ交ルキハ其ノ

作ルニ、ノ三角形ノ面積ノ差ハ頂點ガ共圓點ナル時一ツノ

極小ナリ.

AB, BC, CD, DA ヲ二ツノ三角形 AOB, COD ノ面積ノ差ガ

極小ナルキ四ツノ與ヘラレタル直

線ノ位置トセヨ; $AB, BC, C'D', D'A$

ヲ之ニ極メテ近キ位置トセヨ.

然ルキハ、定理 14 ニ於ケル如ク、

三角形 $COD = C'OD'$,

角 $COC' = DOD'$ ナルヲ證明スルヲ得.

故ニ角 $BOC' = AOD'$.

又三角形 $AOB - \text{三角形 } COD = ABC - ADC$

$$= ABC' - AD'C' \text{ (極限ニ於テ)}$$

$$= ABO + AOC' + C'OB - (AOD' + AOC' + C'OD');$$

而シテ $COD = C'OD'$ ナルヲ以テ、

$$0 = C'OB - AOD',$$

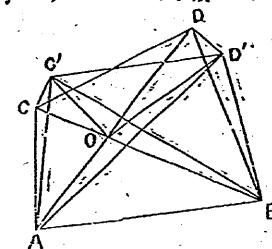
即 三角形 $AOD' = C'OB$;

然ルニ 角 $AOD' = C'OB$;

$$\therefore AO \cdot OD' = BO \cdot OC',$$

極限ニ於テ $AO \cdot OD = BO \cdot OC$;

故ニ A, B, C, D ハ共圓點ナリ.



此位置が極大ヲ與ヘズシテ極小ヲ與フルハ、 G が AD ノ上ニ在ル場合ヲ考フレハ明ナリ。

定理 16.

一ツノ三角形ノ三頂點ヨリ一點ノ距離ノ上ノ正方形ノ和ハ其點が重心ナル時極小ナリ。

P ヲ任意ノ一點トシ、之ヲ重心 G ト結ビ付ク、 Aa, Bb, Cc , $A'a'$ ヲ PG へ垂線ニ引ク。

然ルルハ

$$AP^2 = AG^2 + PG^2 + 2PG \cdot Ga$$

$$BP^2 = BG^2 + PG^2 - 2PG \cdot bG$$

$$CP^2 = CG^2 + PG^2 + 2PG \cdot Gc;$$

然ルニ $AG = 2GA'$ ナルヲ以テ、

$$Ga = 2a'G;$$

$$Gb = -a'G + a'b$$

$$Gc = -a'G + a'c;$$

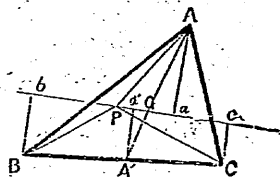
而シテ $BA' = A'C$ ナルヲ以テ

$$a'b = -a'c;$$

$$\therefore Ga + Gb + Gc = 0;$$

$$\therefore AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2 \quad \text{ニシテ、}$$

P が G ト合スル時極小ナリ。



定理 17.

一ツノ三角形ノ三邊ヨリ一點ノ距離ノ上ノ正方形ノ和ハ其點が類似重心ナル時一ツノ極小ナリ。

S ヲ邊 BC ヨリ一ツノ定マレル距離ニ在ル點トシ、 SL, SM, SN ヲ夫々三邊 BC, CA, AB へ垂線ニ引ク。

然ルルハ

$$(b^2 + c^2)(SM^2 + SN^2) = (b \cdot SM + c \cdot SN)^2 + (c \cdot SM - b \cdot SN)^2;$$

而シテ $a \cdot SL + b \cdot SM + c \cdot SN = 2\Delta$ ニシテ

且 SL が常量ナルヲ以テ、

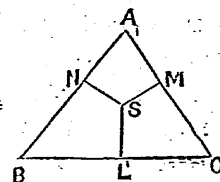
$SM^2 + SN^2$ ハ $c \cdot SM - b \cdot SN = 0$ ナル時

極小ナリ。

故ニ S ハ類似中線 AK ノ上ニ在リ

(第二編、定理 36).

故ニ類似重心 K ヨリ三邊へ引ケル垂線ノ上ノ正方形ノ和ハ他ヨリ小ナリ。



第七編ノ問題

1. ニツノ圓ノ間ノ極小距離ハ其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ノ上ニ在ルナリ。
2. 直線形ノ一邊ヲ除クノ外線ヲノ邊ヲ與フルルハ、其圓形が其一邊ヲ直徑トセル圓ニ内接スル様ナル時其ノ面積極大ナリ。

3. 同一ノ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ中、二邊相等シキモノノ周ガ極大ナリ。
4. 一ツノ與ヘラレタル直線ノ上ニ、與ヘラレタル二點ヨリノ距離ノ上ノ正
方形ノ和ガ極小ナル様ナル點ヲ見出セ。
5. A及Bハ與ヘラレタル直線ノ同シ側ニ在ル與ヘラレタル二點ナリ；其
直線ノ上ニ、ABガ極大ノ角ニ對スル様ナル點ヲ見出セ。
6. A及Bハ與ヘラレタル圓ノ外ニ在ル與ヘラレタル二點ナリ；其圓ノ上
ニ於テ、ABガ極大及極小ノ角ニ對スル様ナル點ヲ見出セ。
7. 一ツノ三角形ニ内接スル平行四邊形ノ中、其ノ一邊ノ中點チ一ツノ頂點
トモルモノガ極大ナリ。
8. ABハ一ツノ圓ノ弦、Pハ其圓ノ上ノ一點ナリ；PガABガ截リ取ル優弧
或ハ劣弧ヲ二等分スル時 $AP^2 + BP^2$ ガ極大或ハ極小ナルヲ證明セヨ。
9. A及Bハ與ヘラレタル直線XYノ同シ側ニ在ル二ツノ定點、PハXYノ上
ノ一點ナリ；APトBPトノ差ハA、B及Pガ共線點ナル時極大ニシテ、其ノ和
ハXYガAPBノ外角ヲ二等分スル時極小ナルヲ證明セヨ。
10. A及Bハ與ヘラレタル直線XYノ反對ノ側ニ在ル二ツノ定點、PハXYノ
上ノ一點ナリ；AP及BPノ和ハA、B、Pガ共線點ナル時極小ニシテ、其ノ差ハ
XYガ角APBヲ二等分スル時極大ナルヲ證明セヨ。
11. 與ヘラレタル三角形ニ内接スル極小周ノ三角形ヲ畫ケ。
12. 圓ニ内接スル四邊形Pノ對角線ノ交點ヨリ四邊ヘ引ケル垂線ノ脚ヲ
結ビ付クレハ更ニ四邊形Qヲ得；QガPニ内接スル極小周ノ四邊形ナルヲ
證明セヨ。
13. A及Bハ一ツノ圓ノ弧ノ同シ側ニ在ル二ツノ定點、Pハ其弧ノ上ノ一點
ナリ；Pヲ過ル半徑ガ角APBヲ二等分スル時、弧ガABニ向テ凸形ヲ爲スカ
或ハ凹形ヲ爲スカニ從テ、 $AP + BP$ ハ極小或ハ極大ナリ。
14. 與ヘラレタル三角形ニ於テ各角ガ二直角ノ三分ノ二ヨリ小ナル作ハ
三ツノ頂點ヨリノ距離ノ和ガ極小ナル點ハ三邊ガ之ニ於テ相等シキ角ニ對
スル様ナル點ナリ。

15. ニツノ圓ノ交點ノ一ヲ過ル直線ノ中、其二圓ノ間ニ在ル分ガ極大ニシ
テ又之ヲ底邊トシ他ノ交點ヲ頂點トセル三角形ガ極大ナル様ナル直線ハ
共通弦ニ垂線ナリ。
16. 一ツノ定點ヲ過ル直線ノ中、其點トニツノ與ヘラレタル直線トノ間ニ反
對ノ方向ニ在ルニツノ分ガ極小ノ矩形ヲ包ム様ナル直線ハ其ニツノ直線ト相
等シキ角ヲ爲ス。
17. ニツノ圓ノ交點ノ一ヲ過ル直線ノ中、其點トニツノ圓トノ間ニ反對ノ方
向ニ在ルニツノ分ガ極大ノ矩形ヲ包ム様ナル直線ハ其ニツノ圓ト相等シキ角
ヲ爲ス。
18. A及Bハ一ツノ圓ノ上ニ在ルニツノ定點、PQハ一定ノ弦ナリ；圓周ノ
上ニCA、CBガPQノ上ニ極大ノ分ヲ截リ取ル様ナル點Cヲ見出セ。
19. 三角形ヲ最短ノ直線ニテ二等分セヨ。
20. 四邊形ノ邊ノ長ヲ與フル時如何ナル場合ニ於テ對角線ノ包ム矩形
ガ極大ナリヤ。
21. A及Bハ二ツノ定點、PハA及Bヲ過ラザル定直線ノ上ノ一點ナリ；此
PA:PBガ極大或ハ極小ナル様ニPノ位置ヲ定メヨ。
22. 一ツノ曲線ノ動弦ABガ一ツノ曲線ヲ包ミ之ニCニ於テ切ス；ABガ極
大或ハ極小ナル時A、B、Cニ於テノ法線ガ共點線ナルヲ證明セヨ。

第八編

複比「インヴァーシヨン」及相反對極⁽¹⁾

定義

一組ノ共線點ヲ列點 (Range) ト稱シ、其點ヲ含ム直線ヲ列點ノ基線 (Base) ト稱シ、其各點ヲ列點ノ點或ハ元素 (Point, Element) ト稱ス。一組ノ共點線ヲ束線 (Pencil) ト稱シ、其ノ交點ヲ束線ノ頂點或ハ焦點 (Vertex, Focus) ト稱シ、其各直線ヲ束線ノ射線或ハ元素 ト稱ス (Ray, Element)。四點 A, B, C, D ヨリ成ル列點ニ於テ比 $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ ヲ此列點ノ複比或ハ非調和比 (Cross Ratio, ⁽²⁾ Anharmonic Ratio) ト稱シ、 $(ABCD)$ ヲ以テ之ヲ表ハス；此定義ニ於テ二點 A, B ハ共軛點ナリトス。

附言。複比 $(ABCD)$ ノ定義ハ記者ニ依リテ異リ、最モ行

⁽¹⁾ 附録ヲ見ヨ。

⁽²⁾ 獨逸ニテハ之ヲ Doppel Verhältniss ト稱ス；是ノ余輩ノ此比ヲ複比ト譯シタル以所ナリ。

⁽³⁾ 條目ニハ之ヲ $(\bar{A}BCD)$ ト記スト然今原書ニ從フ。

ハルハモノハ $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$ 即 $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$ ナリ。此ニ用井タルモノハクレモナ (Cremona) ノ定義ニシテ、其ノ利益ハ A 及 B ヲ共軛點トスルヲ及調和列點及束線ノ編ニ於テ用井タル記號法ト容易ニ一致セシム可キヲ是ナリ。若シ $(ABCD) = -1$ ナレハ ACBD⁽³⁾ ガ調和列點ナルヲ明ナリ。

四ノ文字 A, B, C, D ノ中任意ノ二ヲ交換シ又他ノ二ヲ交換スレハ、複比ノ價ハ變スルヲナシ；即

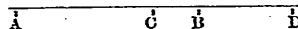
$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA);$$

之ヲ證明セントモハ此等ノ複比ヲ次ノ如ク記スルヲ以テ足レリトス：

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{DB \cdot CA}{CB \cdot DA}.$$

四ノ文字 A, B, C, D ノ排列法二十四アルヲ以テ、此四點ニ就テ二十四ノ複比アリ；然レモ此ノ中四、宛相等シキヲ以テ異ル比ハ六アルノミニシテ其ノ中三、他ノ三ノ反比ナリ。

⁽³⁾ 列點 ACBD ト云ハズシテ此場合ニ於テモクレモナニ從テ列點 ABCD ト云フ方可ナラン。然レモ本文ニ於テハ原書ニ從フ。



定理 1.

複比 $(ABCD) = \lambda$ トスレハ、其四點ヲ以テ作ル他ノ五ノ
比ハ

$$\frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

ナリ.

定義ニ依リ.

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda;$$

$$\text{又 } (ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{\lambda}$$

ナルヲ明ナリ.

$$\begin{aligned} \text{今 } (ACBD) &= \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{(AC - BC)(BD - BC)}{CB \cdot AD} \\ &= \frac{AC \cdot BD - BC(BD - BC + AC)}{CB \cdot AD} \end{aligned}$$

$$= -\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} - \frac{BC \cdot AD}{CB \cdot AD} = 1 - \lambda;$$

$$\therefore (ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \lambda,$$

$$\text{而シテ } (ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

$$\text{又 } (ADBC) = \frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} = -\left(\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}\right) \times \left(\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}\right)$$

$$= -(ACBD) \times (ABDC) = -\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda};$$

$$\therefore (ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DAOB) = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

$$\text{而シテ } (ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

$$\text{系. } P (= \lambda), Q \left(= \frac{1}{1-\lambda}\right), R \left(= \frac{\lambda-1}{\lambda}\right), \text{ 及其ノ反數ヲ}$$

$$\text{以テ六ノ複比ヲ表ハセハ } P \cdot Q \cdot R = -1,$$

$$Q + \frac{1}{R} = R + \frac{1}{P} = P + \frac{1}{Q} = 1.$$

定理 2.

S ヲ列點 ABCD 外ノ一點トシ, C ヲ過リ SD ニ平行ニ

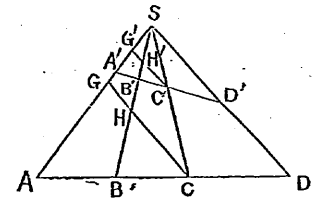
引ケル直線ガ SA, SB ト夫々 G, H ニ於テ交ルトセハ

$$GC : HC = (ABCD) \text{ ナリ.}$$

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{GC}{SD} \cdot \frac{SD}{HC}$$

(相似三角形ニヨリテ)

$$= \frac{GC}{HC}.$$



定理 3.

前定理ノ圖ニ於テ任意ノ他ノ截線ガ SA, SB, SC, SD ト

夫々 A', B', C', D' は於テ交ルトセハ複比 $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

直線 $C'H'G'$ ナ直線 CHG 或ハ SD ニ平行ニ引ケ.

然ルニハ $(A'B'C'D') = \frac{G'C'}{H'C'} = \frac{GC}{HG} = (ABCD)$.

附言. 四射線 SA, SB, SC, SD ヨリ成ル束線ヲ截ル任意ノ直線上ノ列點ノ複比ヲ此束線ノ複比ト稱ス. 此束線ノ複比ヲ表ハスニ $S(ABCD)$ ナ用ナル.

定理 4.

等角束線ノ複比ハ相等シ.

一ツノ束線ヲ他ノ上ニ重テ頂點及相對應スル二ツノ射線ヲ合セシムルニハ他ノ射線モ皆夫々相合スルヲ以テ明ナリ.

系. A, B, C, D ナ一ツノ圓ノ上ノ四ツノ定點トシ, P ナ其ノ上ノ任意ノ一點トスレハ, 三ツノ角 APB, BPC, CPD ガ不變ナルヲ以テ複比 $P(ABCD)$ ハ不變ナリ.

定義. 二ツノ列點或ハ束線ノ複比ガ相等シキ時ハ之ヲ等複比 (Equi-cross, Equi-anharmonic) ナリト云フ. 斯ノ如キ列點或ハ束線ヲ等寫 (Homographic) ナリト稱スルヲ有リ, 然レモ之ヲ用ナルハ多クハ列點或ハ束線ノ元素ガ四ツヨ

リ多クシテ, 其ノ一ツノ任意ノ四元素ガ之ニ對應スル他ノ四元素ト相等シキ複比ヲ有スル時ナリ.⁽⁹⁾

定理 5.

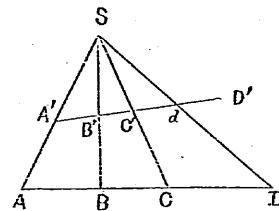
二ツノ等複比列點ヲ相對應スル三双ノ元素ヲ結ビ付クル三直線ガ共點線ナル様ニ置ク時ハ, 第四双ヲ結ビ付クル直線モ亦之ト共點線ナリ.

$ABCD, A'B'C'D'$ ガ二ツノ列點ニシテ AA', BB', CC' ガ S ニ於テ交ルトセヨ. SD ナ結ビ付ク, 其ガ $A'B'C'$ ト交ル點ヲ d トセヨ. 然ルニハ二直線ガ一ツ

ノ束線ヲ截ルヲ以テ

$$(A'B'C'd) = (ABCD) = (A'B'C'D');$$

故ニ d 及 D' ハ相合シ, S, D', d ハ共點線ナリ.



系. 二ツノ等複比列點ニ於テ, 相對應スル一雙ノ元素ガ合スル時ハ, 他ノ相對應スル元素ヲ結ビ付クル直線ハ共點線ナリ.

⁽⁹⁾ 等寫 (homographic) ノ稱ハ佛蘭西人 シャール (Chasles) 初メテ之ヲ用ニタルモノナリ. 現今ハ通常之ヲ射影的 (projective) ト稱ス.

定理 6.

二つの等複比束線ヲ、相對應スル三双ノ射線ノ三交點ガ一直線上ニ在ル様ニ置ク時ハ、第四双ノ交點モ亦其直線上ニ在リ。

S 及 S' ヲ頂點トシ三交點ヲ含ム直線 ABC ガ第四双ノ射線ト交ル點ヲ D 及 D' トセ

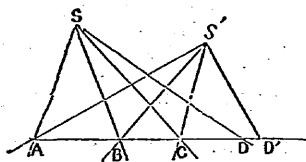
ヨ。

然ルルハ

$$\begin{aligned} (ABCD) &= S(ABCD) \\ &= S'(ABCD) \\ &= (ABCD'); \end{aligned}$$

故ニ D 及 D' ハ相合シ、四つの交點ハ共線點ナリ。

系. 二つの等複比束線ニ於テ相對應スル一雙ノ射線ガ合スル時ハ他ノ相對應スル元素ノ交點ハ共線點ナリ。



定理 7.

一つの圓錐曲線上ノ四つの定點ヲ過リ頂點ガ其圓錐曲線上ニ在ル束線ハ皆等複比ナリ。

焦點 S = 對スル準線^⑤ガ束線

P(ABCD) ヲ截ル點ヲ A', B', C', D'

トセヨ。然ルルハ A'S ハ SA 及

SP ノ夾ム外角ヲ二等分ス;

∴ 角 A'SP = $\frac{1}{2}$ (ASP ノ補角),

同様ニ 角 B'SP = $\frac{1}{2}$ (BSP ノ補角);

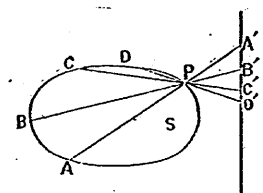
故ニ 角 A'SB' = $\frac{1}{2}$ ASB ニシテ不變ナリ。

同様ニ二つの角 BSC' 及 CSD' モ不變ナルヲ以テ

P(ABCD) = P(A'B'C'D') = S(A'B'C'D') ニシテ、即不變ナリ。

系. Q ガ其圓錐曲線ノ上ニ在ラザル點ナレハ複比 Q(ABCD) ハ P(ABCD) ニ等シキヲ有ル能ハズ。何トナレハ、QA ガ直線 BC 及其曲線ト夫々 A'' 及 R ニ於テ交ルトセハ、Q(ABCD) = R(ABCD) ナル爲ニハ A'', B, C, D ガ共線點ナルヲ必要ニシテ(定理 6 系)、是レ不合理ナレハナリ。

故ニ四つの定點ト其點ノ結ヒガ一定ノ複比ヲ有スル様ナル點ノ軌跡ハ一つの圓錐曲線ナリ。何トナレハ、其四つの定點ト斯ノ如キ一點トヲ過ル圓錐曲線ヲ畫クトハ、*此曲線



⑤ 以下畧シテ S 準線ト云フ。

*原註. 此證明ハ「五つの與ヘラレタル點ヲ過リテ一つの圓錐曲線ヲ畫クヲ得」ト云フ事ヲ假定シ得ルニ非レハ不充分ナリ。而シテ此事ハ幾何學的圓錐曲線論(即解折幾何學ニ依ラザル圓錐曲線論)ノ書中ニ求メ其證明ヲ見ズ。

⑥ 近世幾何學ノ射影法ニ據レハ充分ナル證明アリ。

上ノ點ハ皆要件ニ適シ、其ノ上ニアラザル點ハ要件ニ適
セザレハナリ。

定理 8.

列點ノ基線ガ一ノ圓錐曲線ニ切シ、其點ガ其ノ四ノ定
切線ノ上ニ在ルハ、斯ノ如キ列點ハ皆等複比ナリ。

P = 於テノ切線ガ A, B, C, D =

於テノ四ノ定切線ヲ截ル點ヲ

A', B', C', D' トセヨ。然ルハ

角 A'SP = $\frac{1}{2}$ PSA, 角 B'SP = $\frac{1}{2}$ PSB;

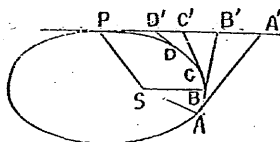
故ニ 角 A'SB' = $\frac{1}{2}$ ASB = シテ不變ナリ。

同様ニ二ノ角 B'SC' 及 C'SD' モ不變ナルヲ以テ、

(A'B'C'D') = S (A'B'C'D') = シテ不變ナリ。

系. 圓錐曲線ニ切セザル任意ノ直線ガ此四ノ定切線ト
交リテ列點 A'B'C'D' ヲ作ルハ、(A'B'C'D') = (A'B'C'D')
ナル爲ニハ此曲線ノ三ノ切線 B'B'', C'C'', D'D'' ガ共點
線ナルヲ必要ナリ (定理 5, 系), 而シテ是レ決シテ有ル能
ハズ。

故ニ四ノ定直線ト交リテ一定ノ複比ノ列點ヲ作ル直
線ハ一定ノ圓錐曲線ニ切ス。何トナレハ、此四ノ定直線及



一ノ斯ノ如キ直線*ニ切スル圓錐曲線ヲ畫クハ其ノ切
線ハ與ヘラレタル要件ニ適シ他ノ直線ハ要件ニ適セザ
ルヲ以テナリ。

調和列點ニ就テノ附言

調和列點ノ定義ニ依リ (ABCD) = -1 ナル時ハ、ACBD
ガ調和列點ナルヲ明ナリ。而シテ (ABCD) = -1 ナル時
ハ、(ABDC) = $\frac{1}{(ABCD)}$ = -1 ナルヲ以テ、(ABDC) = (ABCD)
ナリ。

即 ACBD ガ調和列點ナル時ハ二點 C 及 D (或ハ A 及 B)
ヲ交換スルモ列點ノ複比ノ値ハ變スルヲ無シ。

逆ニ、(ABCD) = (ABDC) ナル時ハ

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)}; \therefore (ABCD) = \pm 1;$$

*原註. 定理 7 ノ系ニ於ケル如ク此證明モ「五ノ與ヘラレタル直線ニ切
スル圓錐曲線ヲ畫クヲ得」ト云フ事ヲ假定シ得ルニ非ザレハ不充分ナリ。
此系及前ノ系ニ於テ「與ヘラレタル點ノ三ツガ共點線ナラズ」「與ヘラレタル
直線ノ三ツガ共點線ナラズ」ト云フ諸易キ要件ヲ明示スルヲハ不必要トシテ
明言セザリシ。定理 7 及 8 ノ此證明ハ故「ヒー、ダブルユー、ホーン」君 (B.W.
Horne, Fellow of St. John's College, Cambridge) ノ發見ニシテ始メテ「クオーター
リー、ジョーナル、オブ、マセマチックス」(Quarterly Journal of Mathematics) 第
四卷 278 頁ニ載セタリ。

而シテ $(ABCD) = +1$ ナル時ハ其四點ノ中何レカ相合スル
カ或ハ無究遠ニ在ル事必要ナルハ容易ニ見ルヘシ;

故ニ $(ABCD) = -1$ ニシテ列點ハ調和的ナリ.

斯ノ如ク調和列點 $ACBD$ ノ特標ハ二双ノ點 C, D 及 A, B
ガ各別ニ交換スルヲ得ルニ在リ,

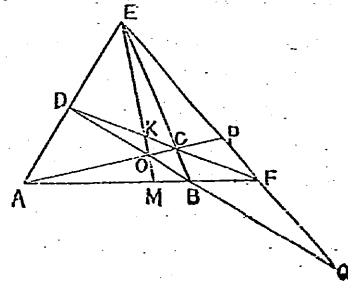
即 $(ABCD) = (ABDC)$ 又 $= (BACD)$

今證明シタル要件ノ用例トシテ次ノ定理ヲ取ラゾ:
完全四邊形ニ於テ一ノ對角線ハ他ノ二ノ對角線ニ依
リテ調和的ニ截ラル.

A, B, C, D, E, F ヲ四邊形ノ頂點トシ, OPQ ヲ其ノ對角三
角形トセヨ. EO ヲ結ビ付ク, CD, BA ト夫々 K, M ニ於テ
交ルトセヨ. 然ルルハ

$$\begin{aligned} (ABMF) &= O(ABMF) \\ &= (CDKF) \quad (CDKF \text{ ハ同シ東線ノ他ノ截線ナルヲ以テ}) \\ &= E(CDKF) \\ &= E(BAMF) = (BAMF); \end{aligned}$$

即二點 A, B ヲ交換スルモ
複比 $(ABMF)$ ニ變化ヲ來
スヲ無シ; 故ニ列點 $AMBF$
及上ニ記セル總テノ東線



ハ皆調和的ニシテ, $AOCF, DOBQ$, 及 $PEQF$ ハ皆此等ノ東
線ノ上ニ在ル列點ナリ.

「インヴォリューション」

定義. 數双ノ共線點 $A, A'; B, B'; C, C'$, 等カ同シ直線上
ノ一點 O ニ就テ $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots\dots\dots$ ナ
ル様ニ在ルルハ此等ノ點ハ「インヴォリューション」 (Involution)
ヲ爲スト云フ.

O 點ヲ「インヴォリューション」ノ中心ト稱シ, A 及 A', B 及 $B',$
 C 及 C' , 等ヲ共軛點ト稱ス.

二點 E, F ガ O ノ兩側ニ於テ列點ノ基線上ニ在リテ,

$$OE^2 = OF^2 = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \dots\dots\dots$$

ナルルハ, 此二點ヲ「インヴォリューション」ノ複點 (Double points)
ト稱ス.

列點外ノ一點 S ヨリ $A, A'; B, B'; C, C'$, 等ヘ直線ヲ引ク
ルハ, 此等ノ直線ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス東線ヲ作ル
而シテ SE, SF ヲ此東線ノ複線 (Double rays) ト稱ス.

附言. 複點及複線ハ「インヴォリューション」ノ共軛點ガ中
心ノ同シ側ニ在ル時ノミ實ナリ.

定理 9.

一ツノ「イソヴォリューション」ノ二ツノ複點及一雙ノ共轭點
ハ調和列點ヲ作ル.

O が EF ノ中點ニシテ且

$$OE^2 = OF^2 = OA \cdot OA';$$

故ニ EAFA' ハ調和列點ナリ (第三編定理 3).

定理 10.

「イソヴォリューション」ヲ爲ス點或ハ射線ノ一組ニ於テ任意
ノ四點或ハ四射線ノ複比ハ之ニ共轭ナルモノ、複比ニ
等シ.

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OD \cdot OD' = OF^2 \text{ トセヨ.}$$

中心 O, 半徑 OF ヲ以テ圓ヲ畫キ, 其ノ上ノ一點 S ヲ

「イソヴォリューション」

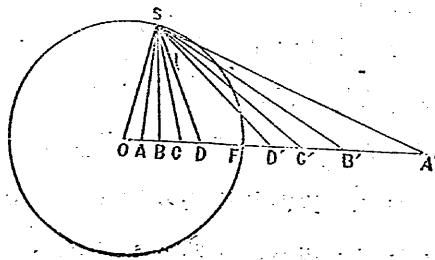
ヲ爲ス點ヲ過ル東

線ノ頂點トセヨ;

然ルニハ

$$OA \cdot OA' = OS^2$$

ナルヲ以テ, 二ツノ三



角形 SOA 及 A'OS ハ相似ナリ;

$$\therefore \text{角 } ASO = SA'O.$$

$$\text{同様ニ} \quad BSO = SB'O;$$

$$\therefore \text{角 } ASB = A'SB'.$$

$$\text{同様ニ} \quad BSC = B'SC',$$

$$CSD = C'SD';$$

故ニ二ツノ東線 S(ABCD), S(A'B'C'D') ハ等角ニシテ, 從テ又
等複比ナリ (定理 4).

複點ガ虛點ニシテ共轭點ガ O ノ兩側ニ在ル場合ニハ,
Sヲ半徑ノ二乗ガ $OA \cdot OA'$ 等ニ等シキ圓ノ上ニ取リテ,⁽⁶⁾
同様ノ作圖ヲ得.

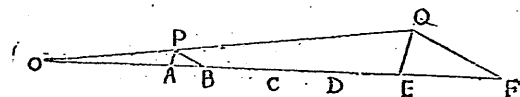
定理 10 ノ逆ヲ次ノ如ク述フルヲ得:—

六ツノ共線點有リテ其ノ中四點ノ複比ガ他ノ四點ノ複
比ニ等シキトハ, (但其中ノ二點ダケハ二組ニ共通ニシテ
互ニ共轭ナルカ或ハ共轭ナラザルカ何レニシテモ兩組ニ
於テ同一ノ關係ヲ有スルモノトス) 此六ツノ點ハ「イソヴォ
リューション」ヲ爲ス.

ABCDEF ヲ (ACBD) = (FDEC) ナル様ナル六ツノ點トセヨ.

(6) 此場合ニハ S ヲ角 SOA ガ直角ナル様ニ取ルコトヲ要ス.

AP 及 EQ ヲ平行ニ引キ, BP 及 FQ ヲ平行ニ引キ, QP が六ノ點ヲ含ム直線ト O ニ於テ交ルトセヨ. 然ルルハ



$$OA:OE = OP:OQ = OB:OF;$$

$$\therefore OA \cdot OF = OE \cdot OB = k^2 \text{ トセヨ};$$

$$\text{又 } \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{FE \cdot DC}{DE \cdot FC},$$

$$\text{即 } \frac{OB - OA}{(OB - OC)(OD - OA)} = \frac{OF - OE}{(OE - OD)(OC - OF)};$$

$$\therefore \frac{k^2(OF - OE)}{OE \cdot OF(OB - OC)(OD - OA)} = \frac{OF - OE}{(OE - OD)(OC - OF)};$$

$$\therefore k^2(OC \cdot OE - OC \cdot OD - OF \cdot OE + OF \cdot OD) = OE \cdot OF(OD \cdot OB - OA \cdot OB - OC \cdot OD + OC \cdot OA);$$

$$\therefore OE \cdot OF(k^2 - OC \cdot OD) + k^2 \cdot OC \cdot OD - OE \cdot OF \cdot OA \cdot OB = 0;$$

$$\therefore OE \cdot OF(k^2 - OC \cdot OD) + k^2(OC \cdot OD - k^2) = 0;$$

$$\therefore (k^2 - OC \cdot OD)(OE \cdot OF - k^2) = 0;$$

然ルニ E ト A 或ハ F ト B が相合スルニ非ザレハ $k^2 = OE \cdot OF$ ナルヲ能ハズ; 故ニ $k^2 = OC \cdot OD$ ナリ;

故ニ C 及 D ハ二双ノ共軛點 A, F 及 B, E ヲ以テ定メタル⁽⁹⁾「イソヴォリューション」ノ共軛點ナリ.

(9) 二双ノ共軛點が「イソヴォリューション」ヲ定ムルコトハ之ヲ證明スルヲ得

此逆定理ノ用例ヲ次ニ示サン:—

完全四角形ノ邊ハ任意ノ截線ヲ「イソヴォリューション」ヲ爲

ス六ツノ點ニ於テ截ル.

一ツノ截線ガ四角形 ABCD ノ邊ヲ六ツノ點 L, M, N, N', M', L'ニ於テ截ルトセヨ.

二邊 AC 及 BD ガ交ル

點ヲ O トセヨ. AN 及

ON ヲ結ビ付ケヨ.

然ルルハ

$$C(LMNN') = C(DBNO)$$

$$= A(DBNO)$$

$$= A(M'L'NN')$$

$$= A(L'M'N'N');$$

$$\therefore (LMNN') = (L'M'N'N');$$

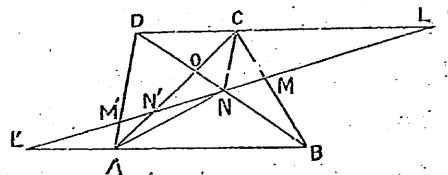
故ニ此六ツノ點ハ「イソヴォリューション」ヲ爲ス.

定理 11.

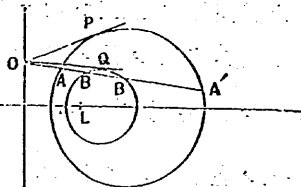
一ツノ直線ハ任意ノ共軸圓ニ依リテ「イソヴォリューション」ニ

截ラル, 而シテ其ノ根軸ト其直線トノ交點ガ此「イソヴォリュ-

ーション」ノ中心ナリ.



截線 $OABB'A'$ が一雙ノ
圓ヲ A, A' 及 B, B' ニ於テ
截リ其ノ根軸ヲ O ニ於テ
截ルトセヨ。 OP, OQ ヲ O
ヨリ二ツノ圓ヘ引ケル切線



トセヨ。 L ヲ此組ノ一ツノ限點トセヨ。然ルニハ

$OP = OQ = OL$; 然ルニ $OP^2 = OA \cdot OA', OQ^2 = OB \cdot OB'$;
故ニ $OP^2 = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OL^2 = \text{常量}$;

故ニ A, A', B, B' ハ中心 O ナル「イソツォリュージョン」ヲ爲ス
點ナリ。

共軸圓ガ皆同シ二點 X 及 Y ニ於テ交ルニハ

$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \dots = OX \cdot OY = \text{常量}$;

斯ノ如ク交點ハ又「イソツォリュージョン」ヲ爲ス點ナリ、但此
場合ニ於テハ複點ハ虚點ナリ。

定理 A.

一ツノ圓ニ就テ共軛ナル數雙ノ點ガ一直線上ニ在ルト
ハ此諸點ハ「イソツォリュージョン」ヲ爲シ、此直線ガ其圓ヲ切
ル點ガ其ノ複點ナリ; 又一ツノ圓ニ就テ共軛ナル數直線
ガ共點線ナルニハ此諸線ハ「イソツォリュージョン」ヲ爲シ、二
ノ切線ガ其ノ複線ナリ。

此定理ハ極點及極線ノ調和性ニ依リテ明ナリ(第五編
定理 6 及 C ヲ見ヨ)。

定理 12.

「イソツォリュージョン」ヲ爲ス東線ノ二雙ノ共軛射線ガ互
ニ垂線ナレハ各雙ノ共軛射線ガ皆互ニ垂線ナリ。

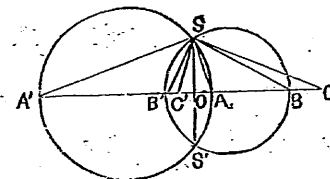
SA, SA' 及 SB, SB' ヲ互ニ

垂線ナル二雙ノ共軛線トセ

ヨ。

一ツノ截線ガ此諸線ヲ A' ,

B', A, B ニ於テ截ルトセヨ。



AA', BB' ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケハ、二ツノ角 ASA', BSB' ガ共
ニ直角ナルヲ以テ、此二圓ハ S ヲ過リ再ヒ S' ニ於テ出會フ可シ。

然ルニハ SS' ハ圓ノ根軸ナルヲ以テ、其ガ截線ト交ル
點ヲ O トスレハ、 O ハ「イソツォリュージョン」ノ中心ニシテ
 $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = -OS^2$ ナリ。

又此截線ガ他ノ一雙ノ共軛線ト C 及 C' ニ於テ交ルト
スレハ、 $OC \cdot OC' = -OS^2$ 即 $OC : OS = OS : C'O$

ニシテ、 O ニ於テノ角ガ直角ナルヲ以テ、二ツノ三角形 COS ,
 SOC' ハ相似ニシテ 角 $CSO = SC'O = (OSC' \text{ノ餘角})$,

故ニ SC, SC' ハ互ニ垂線ナリ。

系 同一ノ頂點ヲ有スル直角ノ邊ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス; 何トナレハ、其諸線チ一ノ截線ニ依リテ截ルルハ互ニ直角ナル一雙ノ直線ハ其截線ノ上ニ頂點ヲ過ル圓ノ直徑ヲ掃ムヲ明ナリ; 而シテ斯ノ如キ圓ハ共軸圓ニシテ其截線上ニ中心ヲ有シ共ニ東線ノ頂點ヲ過ルヲ以テナリ.

相反對極

定義. 與ヘラレタル一ノ圓 (中心 S , 半径 k) ニ就テ一ノ圖形 Σ ノ各直線ノ極點及各點ノ極線ヲ作ルルハ更ニ一ノ圖形 Σ' ヲ得; 而シテ此二圖形 Σ, Σ' ノ關係ハ互ニ交換スルヲ得.⁽¹⁰⁾ 二ノ圖形 Σ, Σ' ノ各ヲ他ノ相反對極⁽¹¹⁾ (Polar reciprocal) ト稱シ; 二者ノ幾何學的性質ハ互ニ相關聯ス. 例ヘハ、一ノ圖形ノ二點ヲ結ビ付クル直線ハ他ノ圖形ノ二直線ノ交ル點ニ對應シ (第五編定理 7); 共線點ハ共點線ニ對應シ; 平行直線ハ S ト共線ナル點ニ對應シ; 二直線ノ夾ム角ハ二點ノ S ニ於テ對スル角 (或ハ其ノ補角) ニ對應スルガ如シ.

⁽¹⁰⁾ 是レ一部分ハ極點及極線ノ定理ニ由リテ推知スヘク又一部分ハ以下ノ諸定理ニ由リテ證明スルナリ

⁽¹¹⁾ 或ハ單ニ對極ト稱スヘシ.

與ヘラレタル圓ヲ補助圓 (Auxiliary circle) ト稱ス.

定理 13.

三角形ハ自ラ其ノ相反對極形ナルヲ得 (第五編定理 9).

定理 14.

列點ノ對極ハ同シ複比ヲ有スル東線ナリ; 逆ニ、東線ノ對極ハ同シ複比ヲ有スル列點ナリ.

$ABCD$ ヲ列點トシ, SO

ヲ之ヘ垂線ニ引キ, O' ヲ

補助圓ニ就テ其ノ極點ト

セヨ. 然ルルハ A, B, C, D

ノ極線ハ O' ヲ過リ, 二ノ東

線 $O'(A'B'C'D')$ 及 $S(ABCD)$

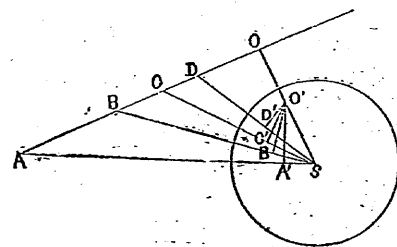
ハ等角ナリ, 故ニ又等複比ナリ.

此ノ逆モ亦同様ニ證明スルヲ得.

定義. 一ノ直線ガ常ニ與ヘラレタル曲線ニ切線ナル様ニ動クルハ其曲線ヲ此動線ノ包ミ (Envelope) ト稱ス.

定理 15.

Σ ガ一ノ曲線ナレハ Σ' モ亦一ノ曲線ナリ; Σ ノ上ノ



各點ニハ Σ' ノ切線ガ之ニ對應シ; Σ ノ各切線ニハ Σ' ノ上ノ點ガ之ニ對應ス.

Σ ヲ動點ノ軌跡ト考フレハ, Σ' ハ動線ノ包ミナリ即一ノ曲線ナリ; 而シテ Σ ヲ畫ク所ノ點ノ各位置ニ對シテ, Σ' ヲ包ム處ノ直點ノ一ノ位置即 Σ' ノ一ノ切線アリ.

又 P, Q ヲ Σ ノ上ノ二點トシ, 之ニ對應スル Σ' ノ二切線ガ R ニ於テ交ルトスレハ R ハ補助圓ニ就テ直線 PQ ノ極點ナリ (第五編定理 5. 系), 即圖形 Σ' ニ於テノ R ハ圖形 Σ ニ於テノ PQ ニ對應ス.

今 Q ヲ P ニ近ツカシメ終ニ相合セシムレハ PQ ハ曲線 Σ ノ P ニ於テノ切線ト成リ, 之ニ對應スル Σ' ノ切線ハ終ニ相合シ, 其ノ交點 R ハ曲線 Σ' ノ上ニ在ル可シ. 故ニ曲線 Σ ノ切線ハ曲線 Σ' ノ上ノ點ニ對應ス.

定理 16.

Σ ガ一ノ圓 (中心 O , 半徑 r) ナレハ, Σ' ハ一ノ圓錐曲線ニシテ, S ハ其ノ焦點, SO/r ガ其ノ外心率, k^2/r ガ其ノ半通徑ニシテ, 其ノ橫軸ハ SO ノ方向ニ在リ. 中心 O ニハ S 準線ガ之ニ對應シ; S ヲ過ル直徑ノ兩端ニ於テノ切線ニハ二ノ頂點ガ之ニ對應シ; S ヨリ引ケル E, E' ニ

於テノ切線ニハ無究遠ノ二點 ω, ω' ($S\omega, S\omega'$ ハ夫々 SE, SE' ニ垂線ナリ) ガ之ニ對應シ; 二切點 E, E' ニハ漸近線ガ之ニ對應シ; 弦 EE' ニハ中心ガ之ニ對應シ; SE, SE' ヲ二等分スル直線 FF' ニハ他ノ焦點 S' ガ之ニ對應ス.

此圖ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取リ, P ニ於テ圓ノ切線 TPY ヲ引キ, SY ナ之ニ垂線ニ引ク. SY ノ上ニ P' ヲ $SP' \cdot SY = k^2$ ナル様ニ取レ; 然ルハ P' ハ補助圓ニ就テ TPY ノ極點ニシテ, P' ノ軌跡ガ即要スル所ノ對極形ナリ. SO ヲ結ビ付ク, 圓ト D 及 D' 點ニ於テ, PT ト T ニ於テ交ルトセヨ. SO ノ上ニ一點 O' ヲ

$SO \cdot SO' = k^2$ ナル様ニ取レ. $P'N$

及 $O'M$ ヲ SO' ニ垂線ニ引キ,

PM ヲ $O'M$ ニ垂線ニ引ク.

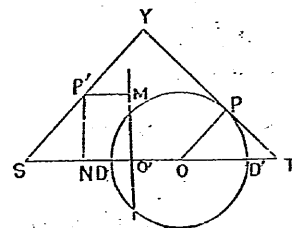
然ルハ

$$SP' = \frac{k^2}{SY} = \frac{k^2 \cdot OT}{ST \cdot OP},$$

$$\text{又 } PM = SO' - SN = SO' - \frac{SP' \cdot SY}{ST} = \frac{k^2}{SO} - \frac{k^2}{ST} = \frac{k^2 \cdot OT}{SO \cdot ST};$$

$$\therefore SP' : PM = SO : OP.$$

而シテ $O'M$ ハ定マレル直線ナルヲ以テ, P' ノ軌跡ハ一ノ圓錐曲線ニシテ, S ガ其ノ焦點, SO/r ガ其ノ外心率, O' ノ



對極線が其ノ準線ナリ。此曲線ハ、SO がより小ナルカ、或ハ之ニ等シキカ、或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ、即 S が圓ノ内ニ在ルカ、或ハ其ノ上ニ在ルカ、或ハ其ノ外ニ在ルカニ從テ、楕圓或ハ拋物線或ハ双曲線ナリ。

$$\text{半通徑} = SO' \times \text{外心率} = k^2/r.$$

SO ハ此圓錐曲線ノ横軸ノ方向ニシテ其ノ頂點ハ S ヲ過ル直径ノ兩端 D 及 D' ニ於テノ圓ノ切線ノ對極ナリ。

SE, SE' ハ補助圓ノ中心 S ヲ過ルヲ以テ其圓ニ就テ其ノ極點ハ夫々 SE, SE' ニ垂線ナル方向 Sω, Sω' ニ於テ無究遠ニ在リ。二點 E 及 E' ノ對極ハ無究遠ノ二點 ω, ω' ニ於テノ曲線ノ切線、即曲線ノ漸近線ナリ。又二ノ漸近線ハ圓錐曲線ノ中心ニ於テ交ルヲ以テ、此中心 C ハ圓ノ弦 EE' ノ對極ナルヲ明ナリ；

故ニ EE' が SO ト G ニ於テ交ル

トセハ、SC · SG = k² ナリ。又 FHF'

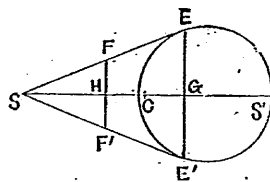
ヲ SE 及 SE' ヲ二等分シ SO ト H

ニ於テ交ル直線トスレハ、FF' ノ

對極ハ SO ノ上ノ點 S' ニシテ

$$SS' = \frac{k^2}{SH} = \frac{2k^2}{SG} = 2SC \text{ ナリ；}$$

故ニ S' ハ曲線ノ他ノ焦點ナリ。



系 二ノ漸近線ハ SE 及 SE' ニ垂線ナルヲ以テ其ノ夾ム角ハ S ヨリ圓ニ引ケル二ノ切線 SE, SE' ノ夾ム角ノ補角ナリ。

定理 17. (パスカル Pascal ノ定理)

圓錐曲線ニ内接セル六角形ノ三双ノ對邊が相交ル三ノ點ハ共線點ナリ。

ABCDEF ヲ六角形トシ； FA,

DC が P ニ於テ、AB, ED が Q ニ

於テ、BC, FE が R ニ於テ交ル

トセヨ。 AB, DC ノ交點ヲ G ト

シ、FA, CB ノ交點ヲ H トセヨ。

然ルルハ

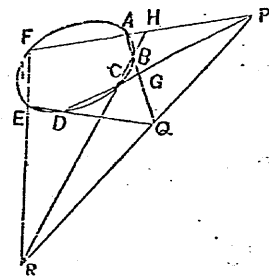
$$P(ABCQ) = (ABGQ)$$

$$= D(ABCE) = F(ABCE) \quad (\text{定理 7})$$

$$= (HBCR) = P(ABCR);$$

故ニ PQ, PR ハ同一ノ直線ナリ。

附言. PQR ハ之ヲ一ノパスカル線ト稱ス、而シテ六角形ノ頂點ヲ之ト異ナレル順序ニ取リテ之ヲ結ビ付ケテ同様ニ他ノパスカル線ヲ得；斯ノ如キ線ノ數ヲ求ムルニハ六ノ文字 ABCDEF ノ順序ヲ換ヘ而カモ圖ニ於ケルト



同シ双ノ文字ヲ結ヒ付ケタリトセヨ。⁽¹⁹⁾ 六ノ文字中一、
ヲ常ニ同一ノ點ニ固着セシムルニ他ノ文字ノ排列法ノ
數總テ 120 アリ、其ノ中二、宛反對ニ順環セル順序ノモノ
アリテ、斯ノ如キ双ハ同一ノバスカル線ヲ生スルヲ以テ、
バスカル線ノ數ハ 60 ナリ。

又六ノ頂點ハ 15 ノ結ヒヲ有シ、15 ノ直線ハ 105 點ニ
於テ相交ル；而シテ其ノ中 10 宛ハ六ノ頂點ト合スルヲ
以テ、15 ノ結ヒハ元ノ六點ノ他ニ 45 點ニ於テ交ル。故
ニ上ノ定理ハ次ノ如ク述フル方更ニ完全ナリ。

圓錐曲線上ノ六點ノ十五ノ結ヒハ三、宛六十ノ直線上
ニ在ル四十五ノ點ニ於テ交ル。

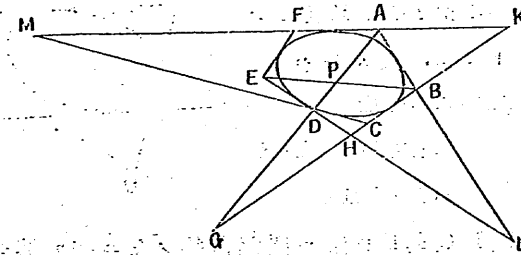
定理 18. (ブリアンションノ Brianchon ノ定理)

圓錐曲線ニ外接スル六角形ノ三双ノ對頂點ノ三ノ結
ヒハ共點線ナリ。

ABCDEF ヲ六角形トシ、二ノ對角線 AD, BE ガ P ニ於
テ交ルトセヨ。BC ガ AD, ED, FA ト夫々 G, H, K ニ於テ

⁽¹⁹⁾ 本書ニ於テハ圖形ヲ變メズシテ唯之ニ附與スル文字ノ配置法ヲ變メ
ルノ法ヲ取レリ。然レモ總テノ文字ヲ固定セシメ六ノ點ヲ種々ニ結ヒ付
グテ以テ種々ノ六角形ヲ作ル方便利ナリトス。

交ルトセヨ。AB, ED ノ交點ヲ L トシ、AF, CD ノ交點ヲ
M トセヨ。然ルキハ



$$\begin{aligned} (APDG) &= B(APDG) = (LEDH) \\ &= (AFMK) \quad (\text{定理 8}) \\ &= C(AFDG); \end{aligned}$$

故ニ射線 CF ハ P ヲ過ル。

附言。バスカルノ定理及ブリアンションノ定理ハ各他
ノ對極ナリ。而シテ後ノ定理ハ次ノ如ク述フル方完全
ナリ。圓錐曲線ノ六ノ切線ノ交ル十五ノ點ハ三、宛六十
ノ點ニ於テ相交ル四十五ノ直線ノ上ニ在リ。

定理 19.

二ノ三角形ガ圓錐曲線ニ外接スレハ其ノ六ノ頂點ハ
他ノ圓錐曲線ノ上ニ在リ；又逆ニ、六ノ頂點ガ一ノ圓錐
曲線ノ上ニ在レハ六ノ邊ハ他ノ圓錐曲線ニ切ス。

ABC, DEF ヲ二ツノ三角形トシ;

AC, AB が EF ト G 及 H ニ於テ

交リ; DE, DF が BC ト K 及 L ニ

於テ交ルトセヨ. 然ルキハ

$$\begin{aligned} A(BCFE) &= (HGEF) \\ &= (BCLK) \quad (\text{定理 8}) \\ &= D(BCLF). \end{aligned}$$

故ニ D ハ A, B, C, E, F ヲ過ル圓錐曲線ノ上ニ在リ (定理 7, 系).

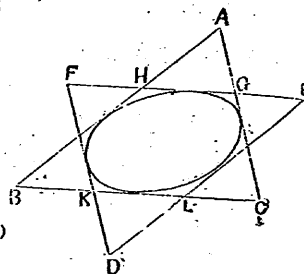
又 A, B, C, D, E, F が一ツノ圓錐曲線ノ上ニ在レハ

$$\begin{aligned} (BCLK) &= D(BCFE) \\ &= A(BCFE) \quad (\text{定理 7}) \\ &= (HGEF). \end{aligned}$$

是レ即逆定理ヲ證明スルモノナリ (定理 8, 系).

系. 二ツノ圓錐曲線有リテ一個ノ三角形ヲ其ノ一ツニ内接シ他ニ外接スル様ニ畫キ得レハ斯ノ如キ三角形ハ幾個ニテモ畫クヲ得.

ABC ヲ一ツノ圓錐曲線ニ外接シ他ニ内接スル三角形トセヨ. 第一ノ曲線ニ切線 EF ヲ引キ其ノ第二ノ曲線ト及 F ニ於テ交ルトセヨ; E 及 F ヨリ他ノ切線ヲ引キ D ニ於テ相交ルトセヨ. 然ルキハ定理ニ依リテ D ハ A, B, C, E, F ヲ過ル圓錐曲線ノ上ニ在リ.



定理 20.

二ツノ三角形が一ツノ圓ニ就テ各自共軛ナルキハ、其ノ邊ハ一ツノ圓錐曲線ニ切シ、其ノ頂點ハ一ツノ圓錐曲線ノ上ニ在リ.

ABC, DEF が一ツノ圓ニ就テ各自共軛ナリトセヨ.

BC が DE, DE ト夫々 G 及 H ニ於テ交リ, EF が AC, AB ト夫々 K 及 L ニ於テ交ルトセヨ.

然ルキハ B, G, H, C ノ極線ハ同一ノ

複比ヲ有スル束線ヲ作ルヲ以テ

(定理 14).

$$(BGHC) = A(CEFB) = (KEFL) = (LFEK).$$

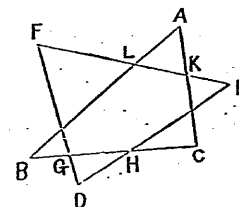
故ニ EF ハ BC, CA, AB, FD, DE ニ切ス

ル圓錐曲線ノ切線ナリ (定理 8, 系); 故ニ A, B, C, D, E, F ハ一ツノ圓錐曲線ノ上ニ在リ (定理 19).

附言. 次ノ編ニ於テ見ル如ク極點及極線ノ性質ハ射影的ナルヲ以テ此定理ハ二ツノ三角形が一ツノ圓錐曲線ニ就テ各自共軛ナル時モ亦真ナリ.

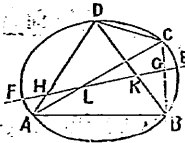
定理 21.

一ツノ圓錐曲線及之ニ内接スル一ツノ完全四角形ノ三双



ノ對邊ハ任意ノ截線ヲ「イソヴォリュメーション」ヲ爲ス四双ノ點ニ於テ截ル。

ABCD ヲ完全四角形トシ、任意ノ截線ガ曲線ト E, F ニ於テ、BC ト G ニ於テ、AD ト H ニ於テ、BD ト K ニ於テ、AC ト L ニ於テ交ルトセヨ。然ルルハ



$$(EGKF) = B(ECDF) = A(EGDF) \quad (\text{定理 7})$$

$$= (ELHF) = (FHLE).$$

故ニ定理 10 ノ逆ニ依リテ、E, F, G, H, K, L ハ「イソヴォリュメーション」ヲ爲ス三双ノ點ナリ。截線ガ AB 及 CD ト交ル一雙ノ點ニ就テモ亦同シ。

定理 22.

圓錐曲線上ノ一ツノ定點ヨリ引クル直交弦ノ兩端ヲ結ビ付クル直線ハ皆其定點ニ於テノ法線ノ上ニ於テ相交ル。

PA, PB 及 PC, PD ヲ二雙ノ直交弦トシ、PN ヲ P ニ於テノ法線トセヨ。AB, BC ガ PN ト夫々 E 及 F ニ於テ交ルトセヨ。然ルルハ

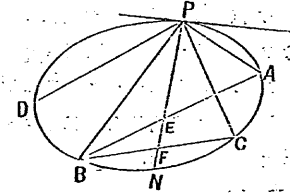
$$(PEFN) = B(PACN) = P(PACN) \quad (\text{定理 7})$$

$$= P(NBDP) \quad (\text{相對應スル射線ガ互ニ垂線ナルヲ以テ})$$

$$= C(NBDP) \quad (\text{定理 7})$$

$$= C(PDBN).$$

而シテ最後ノ束線ヲ法線 PN ニ依リテ截リタリトセハ、CD ガ E ヲ過ルヲ明ナリ。



第八編 ノ 問題

1. $(ABCD) = (ABCD')$ ナルルハ $(ABCC') = (ABDD')$ ナルヲ證明セヨ。
2. 六ツノ點ノ中何レカ四ツヲ他ノ二ツト結ビ付クル直線ガ二ツノ等複比束線ヲ爲スルハ、何レノ四ツヲ他ノ二ツト結ビ付クル直線モ亦二ツノ等複比束線ヲ爲ス。
3. 六ツノ直線ノ中何レカ四ツガ他ノ二ツト交リテ二ツノ等複比列點ヲ爲スルハ何レノ四ツガ他ノ二ツト交ルモ亦二ツノ等複比列點ヲ爲ス。
4. A, B, C ガ一ツノ直線上ニ在リ、D, E, F ガ他ノ直線上ニ在ルルハ AB 及 BD, BF 及 CE, AF 及 CD ガ交ル三ツノ點ハ共線點ナリ。
5. ニツノ列點ノ中各三點ヲ與フルル(相對スル點ノ結ビガ共線點ナラズトス)一ツノ列點ニ於テ任意ニ第四點ヲ定メテ得タル複比ト同一ノ複比ヲ有スル様ニ他ノ列點ノ第四點ヲ定メヨ。
6. 三角形 ABC ノ邊 AB ヲ X ニ於テ二等分シ、AX ヲ Y ニ於テ二等分シ、CA ヲ Y' ニ於テ二等分シ、CY' ヲ X' ニ於テ二等分スルルハ、XX', YY', BC ガ共線點ナルヲ證明セヨ。
7. 一ツノ定點ヲ過ル動線ガ與ヘラレタル三角形ノ三邊ト交ル所ノ三點ト

(*) PP 線トハ即切線ナリ

共ニ一定ノ複比ノ列點ヲ作ル様ナル點ノ軌跡ハ其三角形ニ外接シ定點ヲ過ル所ノ圓錐曲線ナリ。

8. S ハ三角形 ABC ノ外接圓ノ上ノ一點ナリ；夫々 SA, SB, SC ニ垂線ナル三ツノ直線 SL, SM, SN ガ夫々 BC, CA, AB ト L, M, N ニ於テ交ル。 L, M, N ト分心ガ共線點ナルヲ證明セヨ。

9. ASB, CSD ハ一ツノ圓錐曲線ノ焦點 S ナ過リ互ニ垂線ナル二ツノ弦ナリ； A, B, C, D ナ其曲線上ノ任意ノ一點ト結ビ付クル四ツノ直線ガ調和束線ヲ爲スヲ證明セヨ。

10. 「インヴォリューション」ヲ爲ス列點ノ共轭點ノ二双ヲ與ヘテ其ノ中心ヲ求ム。

11. 四ツノ共線點ヲ與フルキハ三組ノ「インヴォリューション」ヲ定ムルヲ證明セヨ；又其ノ中任意ノ「インヴォリューション」ノ複點ガ任意ノ他ノ「インヴォリューション」ノ複點ニ就テ調和共轭點ナルヲ證明セヨ。

12. A, A' 及 B, B' ガ「インヴォリューション」ヲ爲ス列點ノ二双ノ共轭點ニシテ E, F ガ其ノ複點ナル時ハ $AB, A'B'$ ガ EF ナ直径トセル圓ノ上ノ各點ニ於テ相等シキ角ニ對スルヲ證明セヨ。

13. 一ツノ定點ヲ過リ與ヘラレタル直線ノ上ニ中心ヲ有スル諸圓ガ其直線ヲ「インヴォリューション」ヲ爲ス點ニ於テ截ルヲ證明セヨ。

14. 任意ノ一點ヲ完全四邊形ノ六ツノ頂點ト結ビ付クル直線ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス。

15. 一ツノ圓(或ハ圓錐曲線)及之ニ内接セル一ツノ四邊形ノ二双ノ對邊ノ任意ノ直線ノ上ニ「インヴォリューション」ヲ爲ス六ツノ點ヲ定ム。

16. 三角形ノ三邊及一宛其ノ頂點ヲ過ル三ツノ共線點ハ任意ノ直線ノ上ニ「インヴォリューション」ヲ爲ス六ツノ點ヲ定ム。

17. 三角形ノ三頂點及一宛其ノ邊ノ上ニ在ル三ツノ共線點ヲ任意ノ一點ト結ビ付クル六ツノ直線ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス。

18. 三角形ノ三邊ガ任意ノ直線ト交ル三點及其直線ノ上ニ投スル三ツノ頂點ノ射影ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス。

19. 三角形ノ頂點ヲ任意ノ一點ト結ビ付クル直線及其點ヲ過リ三邊ニ平行ナル直線ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス。

20. 三ツノ圓ノ根心ヲ過ル直線ハ皆其圓ト「インヴォリューション」ヲ爲ス六ツノ點ニ於テ交ル。

相反對極法ヲ用井テ次ノ諸定理ヲ每双各他ヨリ推究セヨ：—

21. 圓ノ一點ニ於テノ切線ハ其點ニ對シテ圓錐曲線上ノ一點及其點ニ於テノ切線ト準線トノ交點ハ焦點ニ於テ直角ニ對ス。

22. 圓ノ二ツノ切線ハ其ノ切觸弦ト相等シキ角ヲ爲ス。圓錐曲線ノ二ツノ切線ハ焦點ニ於テ相等シキ角ニ對ス。

23. 圓ニ就テ一點ノ極線ハ其點ヲ中心ト結ビ付クル直線ニ垂線ナリ。一點及(圓錐曲線ニ就テノ)其ノ極線ガ準線ト交ル點ハ焦點ニ於テ直角ニ對ス。

24. 如何ニシテ共轭圓ト共焦點圓錐曲線ヲ相反對極ナラシムルヲ得ルヤ。

次ノ諸定理ガ每双互ニ相反對極ナルヲ證明セヨ。

25. 二ツノ圓ノ共通切線ハ各限點ニ於テ直角ニ對ス。共焦點圓錐曲線ハ互ニ直交ス。

26. 一ツノ直線ガ二ツノ圓ト交ルキハ其ノ二ツノ圓ノ内ニ在ル二ツノ分ハ各限點ニ於テ相等シキ角ニ對ス。一點ヨリ二ツノ共焦點圓錐曲線ヘ引ケル切線ハ相等シキ角ヲ爲ス。

27. 共轭圓ニ就テ一ツノ定點ノ極線ハ一ツノ他ノ定點ヲ過ル面シテ此ニ點ハ各限點ニ於テ直角ニ對ス。共焦點圓錐曲線ニ就テ一ツノ定直線ノ極點ハ與ヘラレタル直線ニ垂線ナル一ツノ他ノ定直線ノ上ニ在リ。

28. 二ツノ相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル右中心圓錐曲線ガ其ノ中心ノ間ニ於テ一ツノ共通焦點ヲ有スルキハ其ノ相反對極線ヲ二ツノ圓錐曲線ト同シ中心(但互ニ交換シタル)ノ二ツノ圓トナスヲ得。

29. O 點ニ就テ次ノ定理ノ對極ヲ得ヨ: 一ツノ與ヘラレタル圓ノ弦ガ其圓ノ上ノ一定點 O ニ於テ一定ノ角ニ對スル様ニ動クモ其ノ包ミバ同シ中心ノ圓ナリ.

30. フォイエルバハノ定理ヲ, 第一ニ, 垂心ニ就テ, 第二ニ, 任意ノ一點ニ就テ相反セヨ.

31. 與ヘラレタル五點ヲ過ル圓錐曲線ノ此等ノ點ニ於テノ切線ヲ定規ノミヲ用井テ出見スヲ求ム.

32. 與ヘラレタル五ツノ直線ノ包ミナル圓錐曲線ガ此五線ニ切スル點ヲ定規ノミヲ用井テ出見スヲ求ム.

33. TP, TQ, PQ ハ圓錐曲線ノ三ツノ切線ニシテ T ハ一ツノ同シ焦點及準線ヲ有スル他ノ圓錐曲線ノ上ニ在リ; PQ ガ共通焦點ニ於テ不變ノ角ニ對スルヲ證明セヨ.

34. SP, SQ ハ圓錐曲線ノ二ツノ切線ナリ; Q ヲ過ル一ツノ直線ガ曲線及 SP ト夫々 D, A ニ於テ交リ, B ニ於テノ切線ガ SP ト C ニ於テ交ル; $SACP$ ガ調和列點ナルヲ證明セヨ.

35. 共通ノ焦點及一ツノ共通ノ切線ヲ有スル一列ノ拋物線有リ, 又其共通ノ切線ニ平行ニシテ此等ノ拋物線ト交ル一定直線有リ; 其ノ交點ニ於テノ切線ノ包ミガ一ツノ圓錐曲線ナルヲ證明セヨ.

36. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂線ナル時ハ其ノ邊ガ一定ノ圓錐曲線ニ切スルヲ相反對極法ヲ用井テ證明セヨ.

第九編

射影

定義

二ツノ平面ノ上ニ各一ツノ圖形及兩平面外ニ一定點有リテ, 其定點チ一ツノ圖形ノ任意ノ一點ト結ビ付クル直線ガ他ノ圖形ノ一點ヲ過ルモハ, 此二ツノ圖形ハ各他ノ中心射影或ハ圓錐射影 (Central or Conical projection) ナリト云フ.

其定點ヲ射影ノ中心或ハ頂點 (Centre or Vertex) ト稱シ, 二ツノ平面ノ交リヲ射影ノ軸 (Axis) ト稱ス.

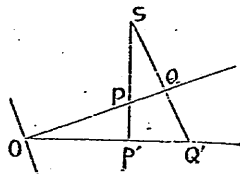
射影ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ガ二ツノ平面ト交ル二點ヲ對應點 (Corresponding points) ト稱ス.

射影ノ中心ガ無究遠ニ在ルモハ射影ハ平行射影 (Parallel projection) ト成ル.

定理 1.

一ツノ直線ノ射影ハ之ト射影ノ軸ノ上ニ於テ交ル一ツノ直線ナリ.

射影ノ中心 S 及與ヘラレタル直線 OPQ ヲ含ム平面ガ
任意ノ他ノ平面ヲ截ル所ノ直線
ハ與ヘラレタル直線ト同一ノ點 O
ニ於テ射影ノ軸ト交ル所ノ直線
 $OP'Q'$ ニシテ, OPQ ノ上ノ任意ノ點
 P ノ射影 P' ヲ含ム; 即此二ノ直線ハ各他ノ射影ナリ.

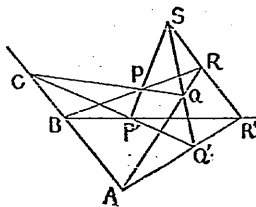


系. 二點ヲ結ビ付クル直線ノ射影ハ其ノ對應點ヲ結ビ
付クル直線ナリ; 二ノ直線ノ交リノ射影ハ其ノ對應線ノ
交リナリ; 又一ノ曲線ノ一點ニ於テノ切線ノ射影ハ其
ノ對應曲線ノ對應點ニ於テノ切線ナリ.

定理 2.

二ノ平面上ニ各一ノ圖形有リテ, 相對應スル直線ガ皆相
交ル(軸ノ上ニ於テ)トハ, 對應點ヲ結ビ付クル直線ハ皆共
點線ナリ.

ABC ヲ二ノ平面ノ交ル直線ト
シ, $QR, Q'R'$ ガ A ニ於テ, $RP, R'P'$
ガ B ニ於テ, $PQ, P'Q'$ ガ C ニ於テ
交ルトヒヨ: 然ルトハ三ノ平面
 AQR', BRP', CPQ' ハ一點 S ニ於テ



交ル; 而シテ此點 S ハ三ノ直線 PP', QQ', RR' ノ中二ニ
依リテ定メラル、ヲ以テ, 直線 ABC 上ニ在ル三點 A, B, C
ノ中二ノ位置ニ關係ヲ有スルモ他ノ一ノ位置ニ關係ス
ルヲ無シ; 故ニ二ノ直線 PP', QQ' ヲ以テ S ヲ定ムルトヒ
ハ, 任意ノ他ノ雙對應點ヲ結ビ付クル直線 RR' モ亦 S ヲ
過ル.

定義. 射影ノ中心ヲ過リ一ノ圖形ノ平面ニ平行ニ引
ケル平面ガ他ノ平面ト交ル直線ヲ消去線 (Vanishing line)
ト稱ス; 此線ハ之ヲ第一ノ平面ノ無究遠ニ在ル直線ニ對
應スルモノト視做スヲ得.

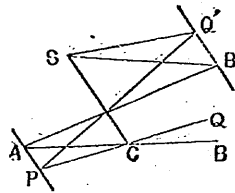
一ノ圖形ノ一ノ直線ガ其平面上ニ在ル消去線ト交ル
點ハ之ヲ其ノ消去點 (Vanishing point) ト稱シ, 他ノ圖形ニ
於テ之ニ對應スル直線ノ上ノ無究遠ニ在ル點ニ對應ス.

定理 3.

一ノ圖形ノ任意ノ直線ハ他ノ圖形ニ於テ之ニ對應ス
ル直線ノ消去點ヲ射影ノ中心ト結ビ付クル直線ニ平行
ナリ.

PQ ガ一ノ圖形ノ直線ニシテ軸ト P ニ於テ交ルトシ,

他ノ圖形ノ之ニ對應スル直線 PQ' が消去線ト Q' ニ於テ交ルトセヨ; 然ルルハ平面 $SPQQ'$ が二ツノ平行平面ト二ツノ直線 SQ', PQ ニ於テ交ルヲ以テ SQ', PQ ハ互ニ平行ナリ.



定理 4.

一ツノ圖形ニ於テ任意ノ二直線ノ夾ム角ハ他ノ圖形ニ於テ之ニ對應スル直線ノ消去點が中心ニ於テ對スル角ニ等シ.

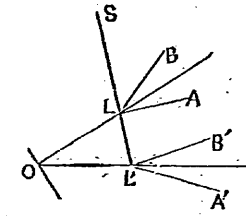
定理 3 ノ圖ニ於テ, AB, AB' ヲ他ノ一雙ノ對應線トシ AB が PQ ト C ニ於テ交ルトセヨ, 然ルルハ PQ, SQ' ハ互ニ平行ニシテ, AB, SB' モ亦互ニ平行ナリ; 故ニ角 BCQ ハ角 $B'SQ'$ ニ等シ.

定理 5.

射影ノ中心ヲ過リ射影ノ軸ニ垂直ナル平面ニ於テ二ノ圖形ノ平面ト相等シキ角ヲ爲ス直線ヲ引クルハ, 其ノ定ムル二ツノ對應點ノ中一ツヲ過ル任意ノ一雙ノ直線 (一,

ノ圖形ニ於テ) ノ夾ム角ハ之ニ對應スル二直線ノ夾ム角ニ等シ.

L 及 L' ヲ斯ノ如キ二ツノ對應點トシ, O ヲ S ヲ過リ軸ニ垂直ナル平面が軸ト交ル點トセヨ. 然ルルハ二ツノ角 $OLL', OL/L$ ハ相等シキヲ以テ $OL=OL'$; 故ニ一ツノ平面が軸ヲ旋リテ回轉シ他ノ平面ト合スルルハ L 及 L' ハ相合シ L 及 L' ヲ過ル對應直線ハ相合スヘシ; 故ニ L 及 L' ヲ過ル二雙ノ對應線ハ相等シキ角ヲ夾ム.



系及定義. 各平面ニ於テ斯ノ如キ二點有リ; 之ヲ稱シテ 限點 (Limiting points) ト云フ.

定理 6.

一ツノ圖形ニ於テノ平行直線ハ他ノ圖形ニ於テ消去線上ニ相交ル直線ニ對應ス.

平行直線ノ交點ハ無窮遠ニ在リ; 故ニ之ニ對應スル直線ノ交點ハ消去線上ニ在リ.

定理 7.

四元素ノ列點或ハ束線ノ射影ハ等復比ノ列點或ハ束

線ナリ、又「イソゾリューション」ヲ爲ス列點或ハ東線ノ射影ハ「イソゾリューション」ヲ爲ス列點或ハ東線ナリ。

ABCD, A'B'C'D' ヲ對應列點ト

セヨ。

然ルトハ AA', BB', CC', DD' ガ頂

點Sニ於テ相交ル；故ニ、各列點

ノ複比ハ東線 S(ABCD) ノ複比

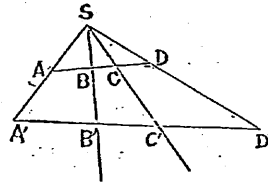
ニ等シキヲ以テ相等シ；又此事ハ ABCD, A'B'C'D' ガ各平面ニ於テ一雙ノ對應東線ノ截線ナリトスルモ亦真ナルヲ

以テ、一ツノ東線ノ射影ハ等複比ノ東線ナリ；又任意ノ四元素ノ複比カ斯ノ如ク射影スル爲ニ變スルヲ無キヲ以テ「イソゾリューション」ヲ爲ス列點或ハ東線ノ射影ハ亦「イソゾリューション」ヲ爲ス列點或ハ東線ナリ。

系。調和列點或ハ東線ノ射影ハ調和列點或ハ東線ナリ。

定理 8.

一ツノ圖形ノ任意ノ二角ヲ與ヘラレタル大ノ角ニ射影シ、同時ニ其圖形ノ一ツノ直線ヲ無究遠ノ直線ニ射影スルヲ得。



二ツノ角ヲ夾ム直線が無究遠ニ射影セントスル一ツノ直線ト夫々 A, B 及 C, D ニ於テ交ルトセヨ；此直線ヲ含ム任意ノ平面ヲ引キ、其ノ上ニ AB 及 CD ヲ弦トシ夫々與ヘラレタル二ツノ角(前ノ二ツノ角ノ射影トナル可キ)ニ等シキ角ヲ含ム二ツノ弓形ヲ畫ク；此二ツノ弓形ヲ含ム平面ニ平行ナル平面ヲ射影ノ平面トシ弓形ノ交點ヲ射影ノ中心トシテ射影セハ求ムル所ノ射影ヲ得。

系。任意ノ四邊形ハ之ヲ任意ノ形及大ノ平行四邊形ニ射影スルヲ得。

A, B, C, D, E, F ヲ四邊形ノ六ツ

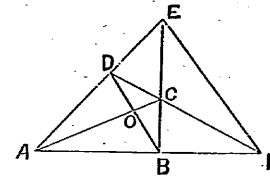
ノ頂點トセヨ。對角線 EF ノ射

影が無究遠ニ在ル様ニ射影セヨ、

然ルトハ其四邊形ノ射影ハ平行

四邊形ナリ。同時ニ二ツノ角 A

及 O ヲ求ムル所ノ平行四邊形ノ之ニ對應スル角ニ射影セヨ；之ニ依リテ平行四邊形ノ形定マル、而シテ中心ヨリ適當ノ距離ニ射影ノ平面ヲ取リテ求ムル所ノ大ヲ得ヘシ。



定理 9.

一ツノ圓ハ之ヲ任意ノ外心率及大ヲ有スル圓錐曲線ニ射影スルヲ得。

第八編, 定理 4 系ニ依リ, P が圓ノ上ノ動點, A, B, C, D が其ノ上ノ定點ナレハ複比 $P(ABCD)$ ハ不變ナリ; 故ニ定理 7 = 依リ此圓ノ射影ハ四ノ定點 (A, B, C, D ノ射影) が其ニ於テ一定ノ複比ヲ含ム様ナル點ノ軌跡ニシテ, 即第八編, 定理 7, 系ニ依リ, 其四ノ定點ヲ過ル一ノ圓錐曲線ナリ.

今射影ノ圓錐ガ直圓錐ナル場合ノミヲ考フルモ其截面形即圓錐曲線ノ外心率ハ漸近線ノ夾ム角ガ圓錐ノ頂角ニ等シキ双曲線ノ外心率ヨリ大ナラザル任意ノ値ヲ取ルヲ得, 而シテ此圓錐ノ頂角ハ二直角ヨリ小ナル任意ノ大ヲ有スルヲ得ルヲ以テ射影ハ任意ノ外心率ヲ有スルヲ得. 又大ハ平行ナル諸截面ヲ取リテ任意ニ之ヲ變シ其ノ中適當ノモノ撰ムヲ得.

系. 此圓錐曲線ハ消去線ガ圓ト交ルカ或ハ之ニ切スルカ或ハ之ト交ラザルカニ從テ双曲線或ハ拋物線或ハ楕圓ナリ. 消去線ガ圓ト A 及 B ニ於テ交ルハ射影ハ之ニ對應スル二點 A' 及 B' ヲ無究遠ニ有ス, 而シテ無究遠ニ於テノ二ノ實切線ハ SA, SB ニ平行ナリ; 即其曲線ハ双曲線ナリ. 消去線ガ圓ニ切スル時ハ射影ハ無究遠ニ一點ヲ有シ消去線ニ對應スル無究遠ノ直線ガ其點ニ於テノ切線ナリ; 即其曲線ハ拋物線ナリ. 消去線ガ圓ト交ラザル

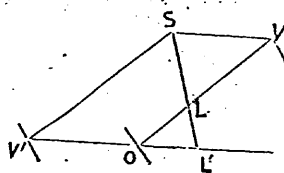
時ハ射影ハ無究遠ニ於テ實點ヲ有スルヲ無シ; 即其曲線ハ楕圓ナリ.

附言. 極點及極線ノ定義, 及第五編ノ定理 6-8, 10-12, 及第八編, 定理 A = 於テ論シタル性質等ハ皆射影スルヲ得ルヲ以テ之ヲ任意ノ圓錐曲線ニ適用スルヲ得. 又對極ノ原理ヲ擴張シテ一定ノ圓ニ代フルニ一定ノ圓錐曲線ヲ以テスレハ, 一ノ圖形 Σ ノ直線及點ノ其曲線ニ就テノ極點及極線ハ Σ ト相互ノ關係アル第二ノ圖形 Σ' ヲ作ル可シ. 此二ノ圖形 Σ 及 Σ' ハ此圓錐曲線ニ就テ各他ノ對極ナリト稱ス. 第八編, 定理 14 及 15 = 圓錐曲線ニ就テ亦眞ナリ, 而シテ此二定理及第八編, 定理 7 及 8 = 依リ, 一定ノ圓錐曲線 S = 就テ任意ノ圓錐曲線 Σ ノ對極ハ亦一ノ圓錐曲線 Σ' ナルヲ明ナリ. 以上述フル所ニ依リ雙對ノ原理ハ圓錐曲線ニ就テ完成セリ.

定 理 10.

一ノ圖形ノ平面ガ射影ノ軸ヲ旋リテ回轉スル時ハ,
二ノ圖形ハ常ニ各他ノ射影ナリ, 而シテ射影ノ中心ノ軌跡ハ一ノ圓ナリ; 二ノ平面ガ合スル時ハ射影ノ中心ハ一ノ限點ト合ス.

二つの図形ハ常ニ各他ノ射影ナリ; 何トナレハ, 對應直線ガ常ニ軸ノ上ニ於テ相交ルヲ以テ, 對應點ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ共點線ナレハナリ.



Sヲ過リ軸ニ垂直ナル平面ハ二つの消去線ト V, V'ニ於テ交リ, 軸ト Oニ於テ交ル, 而シテ SVOV'ハ一ノ平行四邊形ナリ. OV'ガ軸ヲ旋リテ回轉スルハ, SVOV'ハ常ニ平行四邊形ナリ; 而シテ OV及OV' (即VS)ハ不變ノ長ナルヲ以テ, SハVヲ中心トセル圓ヲ畫ク; 又 L, L'ヲ限點トスレハ角 VSL=OLL'=OLL'=VLS; 故ニ VS=VLニシテ, 二つの平面ガ相合スル時 SハLト合ス.

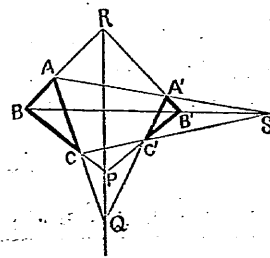
定義. 斯ノ如ク二つの平面ガ相合シタル時ハ二つの図形ハ平面配景或ハ相應 (Plane perspective or homology) ニ在リト云フ; 軸及中心ハ之ヲ配景或ハ相應ノ軸及中心ト稱ス.

定理 11.

二つの三角形ノ相對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ガ共點線ナルハ相對應スル邊ノ交點ハ共線點ナリ; 又逆

ニ, 二つの三角形ノ相對應スル邊ノ交點ハ共線點ナル時ハ相對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ共點線ナリ.

ABC, A'B'C'ガ夫々二つの平面ノ上ニ在リテ, 其ノ平面ガ直線 PQRニ於テ交リ, AA', BB', CC'ガ一點Sニ於テ交ルトスレハ, 三双ノ直線 BC及B'C', CA及C'A', AB及A'B'ハ直線PQRノ上ニ於テ夫々相交ルヲ明ナリ; 而シテ此事ハ二つの平面ガ回轉シテ PQRSト同一ノ平面ニ來ル時モ猶真ナリ. 逆定理ハ定理2ヲ用井テ同様ニ之ヲ證明スルヲ得.



附言. 此定理ハ通常次ノ如ク之ヲ述フ:

共極三角形 (Co-polar) ハ共軸 (Co-axial) ナリ; 逆ニ, 共軸三角形ハ共極ナリ.

次ニ他ノ證明ヲ附ス.

B'A'Rハ三角形ABSノ截線ナルヲ以テ,

$$BB' \cdot SA' \cdot AR = -B'S \cdot A'A \cdot RB;$$

又 B'C'Pハ三角形BCSノ截線ナルヲ以テ,

$$B'S \cdot C'C \cdot PB = -SC' \cdot CP \cdot BB';$$

又 A'C'Qハ三角形ACSノ截線ナルヲ以テ

$$A'A \cdot QC \cdot C'S = -AQ \cdot CC' \cdot SA';$$

此三ツヲ相乘スレハ

$$AR \cdot BP \cdot CQ = -RB \cdot PC \cdot QA;$$

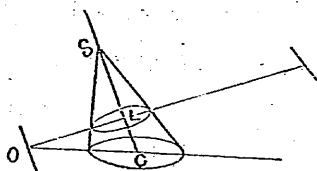
故ニ P, Q, R ハ共線點ナリ.

此ノ逆ハ, AA', CC' ガ S ニ於テ交ルトシ, B, B', S ガ共線點ナルヲ證明スルヲ要ス; 而シテ此事ハ本定理ヨリ來ルモノナリ; 何トナレハ, 二ツノ三角形 RAA', PCC' ノ相對應スル頂點ヲ結ヒ付クル直線ガ共點線 (Q ニ於テ) ナルヲ以テ相對應スル邊ノ交點 B, B', S ガ共線點ナレハナリ.

定理 12.

配景ノ中心ヲ中心トセル圓ノ配景圖形ハ一ツノ圓錐曲線ニシテ配景ノ中心ヲ焦點トシ, 自己ノ消去線ヲ準線トス.

C ヲ圓ノ中心トシ, CO ガ圓ノ平面及任意ノ他ノ平面ノ交リニ垂線ナリトセヨ; 第二ノ平面ニ於テ OL ガ二ツノ平面ノ交リニ垂線ニシテ其ノ長ガ OC ニ等シトセヨ. CL ヲ結ヒ付ケヨ. 然ルニハ CL ノ上ノ任意ノ一點 S ヲ射影ノ中心トスレハ此圓ノ射



影ハ一ツノ圓錐曲線ニシテ C, L ハ二ツノ平面上ノ限點ナリ; 故ニ, C ヲ過リ此圓ニ就テ共軛ナル直線ノ射影ハ L ヲ過リ圓錐曲線ニ就テ共軛ニシテ相互ニ垂線ナル直線ナリ; 今一點ヲ過ル共軛線ガ互ニ垂線ナル様ナル點ハ焦點ニ限ルヲ以テ, L ハ此圓錐曲線ノ焦點ナリ, 而シテ其ノ極線ハ準線ナリ; 然ルニ此極線ハ圓ニ就テ C ノ極線ノ射影ナリ, 則無窮遠ニ在ル直線ノ射影ナリ; 故ニ準線ハ其ノ消去線ナリ. 今圓ノ平面ガ二ツノ平面ノ交リヲ旋リテ回轉シ遂ニ二ツノ平面ガ相合スルトセハ, C, L, S ハ相合シ, 求ムル所ノ結果ヲ得.

虚點及虚直線ニ就テノ附言

一ツノ直線ガ圓或ハ圓錐曲線ト交ル時ハ其ノ交點ハ二ツアリ而シテ唯二ツニ限ルヲ以テ近世幾何學ニ於テハ通常一ツノ圓或ハ圓錐曲線ノ平面上ニ在ル各直線ハ之ト二ツノ點ニ於テ交リ, 其二點ハ實點 (相異ル) ナルカ, 或ハ相合スル (實點ナル) カ, 或ハ虚點ナリト云ヒ, 又斯ク言フヲ以テ便宜ナリトス; 即切線ハ相合シタル二點ニ於テ之ト交リ, 全ク之ト出會ハザル直線ハ二ツノ虚點ニ於テ之ト交ルト云フ. 拋物線ノ直径或ハ双曲線ノ漸近線ニ平行ナル直線ガ再ヒ曲線ト交ル點ハ無窮遠ニ在リ又双曲線

ノ漸近線ハ各無究遠ニ在ル二點ニ於テ之ト出會フ;之ト同様ニ又橢圓ハ虛漸近線ヲ有スト云フヲ得ヘシ. 本書中ノ數多ノ定理ハ虛點及虛直線ノ思想ヲ容レテ之ヲ擴張スルヲ得: 例ヘハ(第五編, 定理 8, 系ヲ見ヨ)一點ノ極線ハ常ニ之ヲ其點ヨリ引グル切線ノ切觸ノ弦ト考フルヲ得, 但其切線ハ實線(相異ル)ナルカ, 或ハ相合スル(實線ナル)カ, 或ハ虛線ナリ. 又(第六編, 定理 6, 系ヲ見ヨ)二ノ圓ハ實點或ハ虛點ニテ於テ交ルモ其ノ根軸ハ常ニ其ノ共通弦ナリ. 又「イソプセリューション」ヲ爲ス列點或ハ束線ノ共軛點或ハ共軛線ガ中心ノ兩側ニ在ル時ハ複點或ハ複線ハ虛ナリ. 更ニ, 虛點及虛線ヲ實點及實線ニ射影スルコトヲ許セハ射影ノ原理ノ效果及能力ハ増加スルヲ極メテ大ナリ. 次ノ二三項ノ事ニ注意スルヲ必要ナリ:

虛點ハ必ズ二宛起ルヲ, 即各虛點ニハ必ズ之ニ對應シ其ノ共軛ト稱ス可キ虛點有ルヲ是ナリ. 一雙ノ共軛虛點ヲ結ビ付クル直線ハ實線ニシテ, 此ノ他ニハ虛點ヲ過ル實線アルヲ無シ.

同一ノ平面ニ在ル二ノ圓錐曲線ハ四點ニ於テ相交リ, 其點ハ皆實點ナルカ, 或ハ二ハ實點ニシテ二ハ虛點ナルカ, 或ハ皆虛點ナリ; 第一ノ場合ニ於テハ六ノ共通弦皆

實線ニシテ他ノ二ノ場合ニ於テハ二弦ノミ實線ニシテ他ノ四ハ皆虛線ナリ.

相交ル二ノ圓ニ於テハ, 第二ノ實共通弦ハ無究遠ノ直線ナリ(下ノ定理 13ヲ見ヨ). 同一ノ平面上ノ二ノ圓ガ相交ラザル時ハ二ノ實共通弦ハ根軸及無究遠ノ直線ナリ, 而シテ同心圓ノ場合ニ於テハ此二線相合ス(下ノ定理 15ヲ見ヨ).

定 理 13.

一ノ平面上ノ圓ハ皆無究遠ノ直線上ノ二ノ定マレル

虛點ヲ過ル.

P, Q ヲ互ニ直角ナル方向ニ在ル無究遠ノ二點トセヨ; 然ルニハ P, Q ハ其平面上ノ任意ノ圓ニ就テ共軛點ナリ. 中心 O ナル圓ガ無究遠ノ直線ヲ虛點 ϕ, ϕ' ニ於テ截ルトセヨ; 然ルニハ ϕ, ϕ' ハ P, Q ノ調和共軛點ナラザル可カラズ(第五編, 定理 6). 同様ニ R, S ガ互ニ直角ナル方向ニ無究遠ニ在ル他ノ一雙ノ點ナレハ, ϕ, ϕ' ハ亦 R, S ノ調和共軛點ナリ. 故ニ ϕ, ϕ' ハ其平面上ニ回轉スル直角ノ二邊ガ無究遠ノ直線上ニ於テ定ムル「イソプセリューション」ノ複點ナリ. 即 ϕ, ϕ' ハ一定ノ點ニシテ其平面上ノ圓ハ皆之ヲ過ル.

系. 任意ノ直角 POQ ハ二ノ直線 $O\phi, O\phi'$ ニ依リテ調和的ニ分タル.

定義. 任意ノ平面上ノ斯ノ如キ二點ヲ無究遠ノ圓點或ハフォコイド (Circular points at infinity, or Focoids) ト稱ス. (後ノ名稱ハドクトル シー. テー. ロル Dr. C. Taylor 初メテ之ヲ用ヰタリ. Taylor's Ancient and Modern Geometry of Conics p. 308 ヲ見ヨ.)

定理 14.

二ノ無究遠ノ圓點ヲ過ル圓錐曲線ハ皆圓ナリ.

C ヲ圓錐曲線ノ中心, ϕ, ϕ' ヲ二ノ無究遠ノ圓點トセヨ; 然ルニ ϕ, ϕ' ハ C ノ極線ナリ, 即 C ヨリ曲線ヘ引クル切線ノ切觸ノ弦ナリ. 然ルニ CP, CQ ヲ互ニ直角ナル任意ノ二直線トセハ, P, Q (無究遠ノ直線上ノ) ハ ϕ, ϕ' ノ調和共軛點ナリ; 故ニ CP, CQ ハ圓錐曲線ノ共軛徑ナリ, 而シテ共軛徑ガ互ニ垂線ナル圓錐曲線ハ圓ニ限ル.

定理 15.

同心圓ハ二ノ無究遠ノ圓點ニ於テ相切ス.

C ヲ中心, ϕ, ϕ' ヲ二ノ無究遠ノ圓點トセヨ; 然ルニ ϕ, ϕ' ハ C ノ極線ナリ, 即 C ヨリ中心 C ナル任意ノ圓ヘ引クル切線ノ切觸弦ナリ. 故ニ $C\phi, C\phi'$ ハ C ヲ中心トセル各圓ニ切ス, 即總テノ同心圓ハ無究遠ノ圓點 ϕ, ϕ' ニ於テ相切ス.

定理 16.

共軸圓ハ四ノ定點ヲ過ル圓錐曲線ニ射影スルヲ得; 又同心圓ハ二ノ定點ニ於テ互ニ相切スル圓錐曲線ニ射影スルヲ得.

共軸圓ハ皆四ノ定點ヲ過ル, 即其ノ根軸ト交ル二點及二ノ無究遠ノ圓點是ナリ; 故ニ此圓ノ射影ハ四ノ定點ヲ過ル圓錐曲線ナリ.

同心圓ハ皆二ノ無究遠ノ圓點ニ於テ相切ス, 故ニ其ノ射影ハ無究遠ノ圓點ノ射影ナル二定點ニ於テ相切スル圓錐曲線ナリ.

定理 17.

圓錐曲線ハ皆之ヲ一ノ四邊形ニ内接スルモノト考フルヲ得; 其四邊形ノ六ノ頂點ハ二ノ實焦點, 二ノ虛焦點及二ノ無究遠ノ圓點ナリ.

S, S' が焦點 ϕ, ϕ' が無究遠ノ圓點トヒヨ; 然ルルハ S ヲ過リ其曲線ニ就テ共轭ナル双直線ハ皆互ニ垂線ナルヲ以テ、斯ノ如キ直線ハ「インヴォリューション」ニ在ル束線ヲ作り、就中 $S\phi, S\phi'$ ハ複線ナリ、即此二直線ハ圓錐曲線ノ切線ナリ。(第八編定理A). $S'\phi, S'\phi'$ ニ就テモ亦同シ。斯ノ如クニシテ作レル四邊形ノ他ノ二頂點 Σ, Σ' ハ必ズ虚點ニシテ、之ヲ虚焦點 (Imaginary foci) ト稱ス。此四邊形ノ對角三角形ノ邊ハ $SS', \Sigma\Sigma'$ 及無究遠ノ直線ニシテ皆實線ナリ。 $SS', \Sigma\Sigma'$ ノ交點ハ無究遠ノ直線ノ極點ナルヲ以テ圓錐曲線ノ中心ナリ而シテ $\Sigma\Sigma'$ ハ横軸 SS' ノ共轭線ナルヲ以テ、共轭軸ナラザルヲ得ズ。

第九編ノ問題

1. 如何ナル場合ニ於テ圓ノ射影が圓ナリヤ。
2. 與ヘラレタル三角形ヲ正三角形ニ射影スル方法ヲ求ム。
3. 圓錐曲線が三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 $a, a'; b, b'; c, c'$ ニ於テ交ルルハ
 $Ab, Ab', Bc, Bc', Ca, Ca' = Ac, Ac', Ba, Ba', Cb, Cb'$
 ナルヲ證明セヨ。(カルノー Carnot ノ定理) [曲線ヲ圓ニ射影スヘシ]
4. 圓錐曲線上ノ四點ヲ其ノ上ノ任意ノ一點ト結ヒ付クル直線が調和束線ナルルハ其ノ一雙ノ共轭點ニ於テノ切線ノ交點ハ他ノ一雙ヲ結ヒ付クル弦ノ上ニ在リ。[圓ニ射影ス可シ]
5. 圓錐曲線ノ四ツノ切線が任意ノ他ノ一切線ヲ調和的ニ截ルキハ一雙ノ共轭切線ノ切點ハ他ノ一雙ノ交點ヲ過ル。[圓ニ射影ス可シ]

6. 一ツノ圓形ノ邊が夫々他ノ圓形ノ邊ニ平行ナル時ハ對應頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ共點線ナリ。
7. ニツノ圓が配景ニ在ルルハ配景ノ軸ノ位置ヲ求ム。
8. ニツノ三角形が二ツ宛配景ニ在リテ配景ノ軸が共通ナルルハ三ツノ配景ノ中心ハ共點點ナリ。
9. ニツノ三角形が二ツ宛配景ニ在リテ配景ノ中心が共通ナルルハ三ツノ配景ノ軸ハ共點線ナリ。
10. 一ツノ圓(或ハ圓錐曲線)ニ就テ各他ノ相反對極ナルニツノ三角形ハ配景ニ在リ。
11. $ABCD$ ハ圓錐曲線ニ内接スル四邊形ナリ; CA 及 DB ノ交點, CB 及 AD ノ交點、及 C 及 D ニ於テノ切線ノ交點が共點點ナルヲ證明セヨ。
12. ABC ハ圓錐曲線ニ内接スル三角形ナリ; A, B, C ニ於テノ切線が夫々對邊ト交ル點が共點點ナルヲ證明セヨ。
13. 一ツノ四邊形ニ内接スル一組ノ圓錐曲線ハ之ヲ共焦點圓錐曲線ニ射影スルヲ得。
14. ニツノ圓錐曲線が二點ニ於テ相切スルルハ一ツノ曲線ニ切スル他ノ曲線ノ弦ハ其切點及其がニツノ曲線ノ切線ト交ル點ニ於テ調和的ニ截ラル。[同心圓ニ射影ス可シ]
15. 一組ノ圓錐曲線が皆定點 A 及 B ニ於テニツノ定直線ニ切スルルハ此等ノ曲線ニ就テ任意ノ與ヘラレタル直線ノ極點ハ他ノ一直線ノ上ニ在リ而シテ此二直線ハ AB ヲ調和ニ分ツ。[同心圓ニ射影ス可シ]
16. 四ツノ定點ヲ過ル圓錐曲線ハ任意ノ一ツノ截線ト「インヴォリューション」ヲ爲ス點ニ於テ交ル。[共轭圓ニ射影ス可シ]
17. 四ツノ定點ヲ過ル四ツノ圓錐曲線ニ就テ任意ノ一點ノ極線ハ一定ノ複比ノ束線ヲ作ル。[共轭圓ニ射影ス可シ]
18. 圓錐曲線ノ一雙ノ共轭徑ニ平行ナルニツノ與ヘラレタル直線 OAB, OCD が其曲線ト A, B, C, D ニ於テ交リ, P ハ其曲線上ノ任意ノ一點ナリ; 任

意ノ絞線カ束線 P(ABCD) ト a, b, c, d ニ於テ交ル. 復比 $\frac{ac \cdot bd}{bc \cdot ad}$ カ $\frac{OB \cdot OC + OA \cdot OD}{OA \cdot OC + OB \cdot OD}$ ニ等シキヲ證明セヨ. [先ツ圓ニ就テ證明シ然ル後之ヲ射影ス可シ.]

19. ニツノ圓ガ實點ニ於テ交ルルハ其ノ共通弦ハ其ノ共通切線ヲ二等分ス: 此定理ヲ射影セヨ.

20. 圓錐曲線ノ相反對極ハ他ノ圓錐曲線ニシテ相反ノ中心ヨリ之ヘ引ケル切線ガ實ナルカ或ハ相合スルカ或ハ虚ナルカニ從テ双曲線或ハ拋物線或ハ橢圓ナリ.

21. 準線ノ上ノ一點ニ就テ拋物線ノ相反對極ハ直角双曲線ナリ.

22. 第六規定理 11 ナ相反シテ一ツノ四邊形ニ内接スル圓錐曲線ノ中心ノ軌跡ハ一ツノ直線ナルヲ證明セヨ.

23. 一ツノ三角形ニ外接スル直角双曲線ハ皆垂心ヲ過ル: 此定理ヲ垂心ニ就テ相反セヨ.

24. 一ツノ圓錐曲線ガ三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ニ夫々 D, E, F ニ於テ切ス; D', E', F' ハ夫々 D, E, F ナ過ル徑ノ他ノ端ナリ; AD', BE', CF' ガ共點線ナルヲ證明セヨ.

25. 四點ヲ過ル一組ノ諸圓錐曲線ノ各ニ於テ一定ノ直線ニ共轭ナル徑ヲ引ケルハ此等ノ徑ハ皆共點線ナリ.

26. ABC ハ一ツノ三角形ナリ; AD, BE, CF ナ夫々 BC, CA, AB ヘ引キ, AD, BE, CF, AB ガ其三角形ノ平面ノ上ニ在ル任意ノ圓錐曲線ノ共轭徑ニ平行ナルルハ AD, BE, CF ガ共點線ナルヲ證明セヨ.

27. 二點ニ於テ相切スルニツノ圓錐曲線アリ, O ハニツノ共通切線ノ交點ナリ; 外ノ曲線ノ上ノ二點 P, Q ヨリ内ノ曲線ヘ二双ノ切線ヲ引キ一ツノ四邊形ヲ得; R ナ内ノ曲線ニ就テ PQ ノ極點トス. 其四邊形ノ對角線ハニツ共ニ R ナ過リ又其ノ一ツハ O ナ過ルヲ證明セヨ.

28. 一點 T ヨリ一ツノ圓錐曲線ヘ切線 TP, TP' ナ引キ, 更ニ其曲線ニ定點 A 及 B ニ於テ切スル他ノ圓錐曲線ヘ切線 TQ, TQ' ナ引ケルハ, PQ, P'Q',

P'Q, P'Q' ハ皆ニツノ曲線ト A 及 B ニ於テ切スル所ノ他ノ一ツノ圓錐曲線ニ切ス. 之ヲ證明セヨ.

雜 題

1. ニツノ與ヘラレタル線分ナ一直線上ニ、各他ヲ調和的ニ截ル様ニ置ケ.
2. 與ヘラレタル直線ノ上ニ一點ヲ、其直線及其點ヲ一ツノ與ヘラレタル三角形ノ頂點ト結ヒ付クル三ツノ直線ガ調和束線ヲ作ル様ニ定メヨ.
3. 轉倒法ニヨリテ次ノ事項ヲ證明セヨ: 三角形 ABC ノ角 C ガ直角ニシテ CD ガ AB ニ垂線ナルトハ

$$\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2}.$$
4. 次ノ定理ヲ轉倒セヨ: 一ツノ正方形ニ外接スル圓及之ニ内接スル圓ヲ描クヲ得、此ニツノ圓ノ中心ハ共ニ其正方形ノ對角線ノ交點ナリ.
5. 相交ラザル共軸圓ノ中、與ヘラレタル圓ト直交スル圓ヲ見出セ.
6. 直角三角形ノ斜邊ノ上ニ一點ヲ、他ノ二邊ヨリノ距離ノ二乗ノ和ガ極小ナル様ニ定メヨ.
7. 四双ノ點 B, B'; C, C'; D, D'; E, E' ガ共ニ二點 A, A' ニ就テ調和共轭點ナレハ (BCDE) = (B'C'D'E').
8. A, B ガ C, D ニ就テ調和共轭點ニシテ、P ガ同シ直線上ノ一點ナレハ (ABCP) + (ABDP) = 0.
9. 四點ヲ結ヒ付クル六ツノ直線ノ中點ハ一ツノ圓錐曲線ノ上ニ在リ.
10. 圓錐曲線ノ中心及其ノ上ノ三點ヲ與ヘテ、其ノ中ノ一點ニ於テノ切線ヲ作クルヲ求ム.
11. 拋物線ニ内接スル四邊形 ABCD 有リ; 其ノ二頂點 C 及 D ヲ過リ拋物線ノ軸ニ平行ニ引クル二直線ガ夫々 DA, BC ト P 及 Q ニ於テ交ルハ PQ ハ AB ニ平行ナリ.
12. 五點ヲ與ヘテ、之ヲ過ル圓錐曲線ガ一ツノ與ヘラレタル直線ト交ル點ヲ求ム.
13. L, M, N ハ三角形 ABC ノ三ツノ高サノ足ナリ; 三ツノ圓錐曲線ヲ、其ノ

一ツハ A ヲ過リ M, N ニ於テ BM, CN ニ切シ、一ツハ B ヲ過リ N, L ニ於テ CN, AL ニ切シ、他ノ一ツハ C ヲ過リ L, M ニ於テ AL, BM ニ切スル様ニ描ケルハ、此圓錐曲線ハ夫々 A, B, C ニ於テ同一ノ圓錐曲線ニ切ス.

11. 與ヘラレタル四ツノ直線ニ切スル拋物線ノ軸ノ方向ヲ見出セ.
15. 三角形 ABC ノ平面ニ一點 O 有リ、O ヲ過リ夫々三ツノ角 BOC, COA, AOB ノ補角ヲ二等分スル直線 OA', OB', OC' ガ夫々 BC, CA, AB ト A', B', C' ニ於テ交ルハ A', B', C' ハ共線點ニシテ六ツノ直線 OA, OB, OC, OA', OB', OC' ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス.
16. A, B, C ハ共線點ニシテ、A' ハ BC ニ就テ A ノ調和共轭點、B' ハ CA ニ就テ B ノ調和共轭點、C' ハ AB ニ就テ C ノ調和共轭點ナリ; 然ルハ A, A'; B, B'; C, C' ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス三双ノ共轭點ナリ.
17. 三角形ノ三邊ト夫々 P, Q, R ニ於テ交リ比 PQ:PR が不變ナル様ナル直線ノ包ミヲ求ム.
18. ニツノ圓ノ一ツノ交點ヲ過リ一ツノ直線ヲ、其ノ上ニニツノ圓ガ截リ取ルニ弦ガ與ヘラレタル比ヲ有スル様ニ引ケ. 斯ノ如キ直線ハ二ツ有ルヲ及種々ノ比ニ對スル無數ノ直線ガ「インヴォリューション」ヲ爲スヲ證明セヨ.
19. 與ヘラレタル直線ノ上ニ於テ相交ル一ツノ圓錐曲線ノ無數双ノ切線ガ他ノ一ツノ切線ヲ截ル點ハ「インヴォリューション」ヲ爲ス.
20. 圓錐曲線ニ内接スルニツノ四邊形有リ; 一ツノ四邊形ノ三邊ガ夫々他ノ四邊形ノ三邊ト交ル點ガ共線點ナルハ他ノ一雙ノ邊ノ交點モ亦同一ノ直線ノ上ニ在リ.
21. ニツノ相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル圓錐曲線ガ一ツノ共通焦點ヲ有ス、但此共通焦點ハ其ノ相似ノ中心ナラズ; 然ルハ此ニツノ曲線ノ共通弦及共通切線ニ切シ其ノ共通焦點ヲ焦點ニシタル拋物線ヲ描クヲ得.
22. 次ノ定理ヲ相反セヨ: 三角形ノ角ノ二等分線ハ邊ニ切スル點ノ中心ニ於テ三ツ冠相交ル.

23. 次ノ定理ヲ相反對極法ニ依リテ擴張セヨ:—拋物線ノ互ニ垂線ナル二ノ切線ハ準線ノ上ニ於テ相交ル。
24. 次ノ定理ヲ相反セヨ:—二ツノ同心圓 A 及 B ニ切スル圓 C ノ中心ノ軌跡ハ第三ノ同心圓ナリ; 而シテ C ト A 及 B トノ切點ハ C ノ中心及 A, B ノ共通中心ト共線點ナリ。
25. 次ノ定理ヲ二ツノ定圓ノ限點ノ一ツニ就テ相反セヨ:—一ツノ圓ガ二ツノ定圓ニ切スル点ハ二ツノ切點ノ結ビハ與ヘラレタル二ツノ圓ノ相似ノ中心ノ一ツヲ過ル。
26. P ハ焦點 S ナル圓錐曲線ノ上ノ一點ニシテ, S ヲ過リ SP ト與ヘラレタル角ヲ爲ス直線ガ P ニ於テノ切線ト T ニ於テ相交ル; 然ルルハ T ノ軌跡ハ與ヘラレタル圓錐曲線ト一ツノ同シ焦點及準線ヲ有スル圓錐曲線ナリ。
27. 第六編, 定理 9 ナ相反セヨ。
28. $ABCD$ ハ圓ニ内接セル四邊形ナリ; 三角形 ABG ノ D ニ就テノ相反對極チ abc トスルハ $abcd$ モ亦一ツノ圓ニ内接ス。
29. 次ノ定理ヲ相反セヨ:—楕圓ノ一ツノ焦點ヨリ其ノ切線ト與ヘラレタル角ヲ爲ス直線ヲ引ケルハ其ガ切線ト交ル點ノ軌跡ハ一ツノ圓ナリ。
30. 次ノ定理ヲ相反セヨ:—平面上ノ相等シキ二ツノ圓ノ共通切線ノ中二ツハ互ニ平行ナリ。
31. 圓錐曲線ニ外接セル四邊形ノ三雙ノ對頂點 $A, A'; B, B'; C, C'$ ナ與ヘラレタル點 O ト結ビ付クル直線ノ中, OA ガ A ノ極線ト a ニ於テ交リ, OB ガ B ノ極線ト b ニ於テ交リ, 逐次如斯ナルルハ七ツノ點 O, a, a', b, b', c, c' ナ過リ一ツノ圓錐曲線ヲ畫クヲ得 (Educational Times, 第五十九卷, 25 頁, 第 11, 710 號)。
32. 圓錐曲線ノ一ツノ切線ガ二ツノ定切線ト T 及 T' ニ於テ相交ル; R, R' ハ二ツノ定點ナリ; 然ルルハ TR 及 $T'R'$ ノ交點ノ軌跡ハ圓錐曲線ナリ。
33. AB, CD ハ圓錐曲線ノ互ニ共轭ナル二ツノ弦, P ハ其曲線上任意ノ一點ナリ; 然ルルハ $P(ABCD)$ ハ調和束線ナリ。

34. 一ツノ與ヘラレタル楕圓ト相等シク相似ニシテ且同心ナル一組ノ楕圓チ一ツノ圓ニ就テ相反スル時其ノ相反對極ノ一ツガ直角双曲線ナレハ皆同様ニシテ, 且次ノ式ニ依リテ定マレル外心率 e ナ有スル双曲線ト二點ニ於テ切ス,
- $$e'^2 + e^2 = 2, \text{ 但 } e \text{ ハ元ノ楕圓ノ外心率ナリ.}$$
35. 圓錐曲線上ノ一ツノ定點ヲ過リ與ヘラレタル方向ト相等シキ角ヲナス二ツノ直線ガ曲線ト再ヒ P, Q ニ於テ交ルルハ, PQ ハ一ツノ定點ヲ過ル。
36. 一ツノ正三角形ニ外接シ其ノ中心ヲ焦點トセル圓錐曲線ヲ畫ケルハ其ノ中通過ハ外接圓ノ直徑ノ三分ノ一ニ等シク, 其ノ外心率ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。
37. 與ヘラレタル三角形ノ頂點ヲ過ル直角双曲線及其ノ邊ニ切スル拋物線有リ; 双曲線ガ拋物線ノ準線ト交ル點ノ一ツヨリ拋物線ヘ引ケル切線ハ双曲線ノ漸近線ニ平行ナリ。準線上ノ二點ノ中何レヲ取ルヘキヤ。又此二點ガ相合スルルハ一ツノ曲線ハ合シタル點ニ就テ他ノ曲線ノ相反對極ナリ。
38. 三角形ノ垂心ヲ焦點トシ其ノ一邊ニ切シ他ノ二邊チ一ツ宛準線トセル二ツノ圓錐曲線ヲ畫ケルハ其ノ共轭軸ハ相等シ。
39. P ハ圓錐曲線上ノ一點, S ハ其ノ焦點ニシテ, PS ガ S 準線ト p ニ於テ交リ, P' ニ於テノ切線ガ其準線ト p' ニ於テ交ルルハ, P ノ位置ヲ變スルハ p, p' ガ共轭點ナル「イングォリューション」ヲ得。
40. 二ツノ圓錐曲線ノ一ツノ上ニ在ル一點ヲ其ノ四ツノ交點ト結ビ付ケテ作リタル束線ノ復比ハ他ノ曲線ノ切線上ニ四ツノ共通切線ガ作ル列點ノ復比ニ等シ。
41. 楕圓ニ内接スル一ツノ多角形アリ, 其ノ各邊ガ皆一ツノ焦點ニ於テ相等シキ角ニ對ス; 然ルルハ各邊ガ一ツ置キニ隣ル邊ト交ル點ハ與ヘラレタル楕圓ト一ツノ焦點及準線ヲ共有スル圓錐曲線上ニ在リ, 而シテ其交點ノ中相隣ル二點ヲ結ビ付クル弦ハ其焦點ニ於テ皆元ノ邊ト相等シキ角ニ對ス。
42. AB, PQ ハ圓錐曲線ノ一雙ノ共轭弦ナリ; QR チ AB ニ平行ニ引キ, 其ガ曲線ト R ニ於テ交レハ PR ハ AB チ二等分ス。
43. ABC ハ焦點 S ナル圓錐曲線ニ外接スル三角形ナリ; 夫々 SA, SP, SO

ニ垂線ナル直線が他ノ任意ノ切線ト夫々 a, b, c ニ於テ交レハ, Aa, Bb, Cc ハ共點線ナリ.

44. 任意ノ一點 O ナ過リ圓錐曲線ヘ四ツノ弦 OAA', OBB', OCC', ODD' ナ引キ
キハ O, A, B, C, D ナ過ル圓錐曲線ハ O, A', B', C', D' ナ過ル圓錐曲線ニ O ニ於
テ切ス, 又 $AB, BC, CD, A'B', B'C', C'D'$ ニ切スル一ツノ圓錐曲線ヲ畫クヲ得.

45. 一ツノ圓錐曲線ガ OA, OB ニ夫々 A, B ニ於テ切シ, 他ノ圓錐曲線ガ OB, OC ニ夫々 B, C ニ於テ切スルキハ此二ツノ曲線ノ他ノ共通切線ハ皆 AC ノ上
ニ於テ相交ル.

46. 一ツノ三角形ニ外接シ, 其ノ頂點ニ於テ同一ノ直線ニ切スル無數ノ圓錐
曲線アリ; 此頂點ヲ過リ任意ノ一ツノ直線ヲ引ク. 然ルキハ其ガ諸曲線
ヲ截ル點ニ於テノ切線ハ皆底邊ノ上ニ於テ相交ル.

47. 一般ニ與ヘラレタル四ツノ點ヲ過リ, 或ル圓ニ就テ各他ノ相反對極ナル
二ツノ圓錐曲線有ルヲ證明シ又此圓ノ中心ヲ見出ス作圖法ヲ與ヘヨ.

48. 任意ノ二ツノ圓錐曲線ガ共ニ二ツノ定點ヲ過リ又他ノ一定點ニ於テ相
切スルキハ其ノ共通切線ハ曲線ノ切點ヲ過ル一定直線ノ上ニ於テ相交ル.

49. 次ノ定理ヲ射影ニ依リテ擴張セヨ:— CA, CB ガ拋物線ノ二ツノ切線ニ
シテ切點弦 AB 上ノ一點 D ヨリ此二ツノ切線ニ平行ニ二ツノ直線 DE, DF ナ
引キ二ツノ切線ト夫々 E, F ニ於テ交ルキハ, EF ハ亦拋物線ノ切線ナリ.

50. 二ツノ圓錐曲線ガ三次ノ切觸ヲ爲スキハ一ツノ曲線ノ任意ノ切線ハ其
ノ切點及其他ノ曲線及共通切線ト交ル點ニ於テ調和的ニ截ラル.

51. 次ノ定理ヲ, (1) A 點ニ就テノ相反對極法ニ依リ, (2) 射影ニ依リテ, 廣
張セヨ:— 中心 O ナル定圓ガ一ツノ與ヘラレタル直線ニ A 點ニ於テ切ス, 然
ルキハ與ヘラレタル圓及直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ焦點 O , 頂點 A ナ
ル拋物線ナリ.

52. 與ヘラレタル三點ヲ過ル直角双曲線ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

63. ユークリッド第三編定理 32 (菊池大蔵著平面幾何學 II, 定理 23) ナ射影
ニ依リテ擴張セヨ.

54. 次ノ定理ヲ射影セヨ:— 一ツノ正方形ニ内接セル圓及外接セル圓ヲ畫
キヲ得, 而シテ其二圓ノ中心ハ共ニ對角線ノ交點ナリ.

55. 與ヘラレタル圓錐曲線一ツノ圓ニ射影シ, 曲線ノ一焦點ガ中心ニ射
影スル様ニセヨ; 而シテ之ニ依リテ次ノ事項ヲ證明セヨ:— (1) 圓錐曲線ノ
二ツノ定切線ガ任意ノ切線ノ上ニ截リ取ル分ハ其ノ焦點ニ於テ一定ノ角ニ
對シ; (2) 圓錐曲線ノ一焦點ニ於テ一定ノ角ニ對スル弦ノ包ミハ之ト一ツノ
焦點及準線ヲ共有スル一ツノ圓錐曲線ナリ.

56. 拋物線ノ次ノ性質ヲ射影ニ依リテ圓ノ性質ヨリ推究セヨ:— 拋物線
ノ二ツノ切線ノ交點ヲ其ノ切點弦ノ中點ト結ビ付クル直線ハ曲線ノ軸ニ平
行ニシテ, 曲線ハ之ヲ二等分ス.

57. 射影ニ依リテ次ノ定理ヲ擴張セヨ:— 與ヘラレタル一點ヨリ一組ノ同
心圓ヘ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ハ與ヘラレタル點及共通ノ中心ヲ過ル圓
ナリ.

58. 二ツノ圓錐曲線 S 及 S' ガ四ツノ點 A, B, C, D ニ於テ交ル; 若シ AB ノ S
ニ就テノ極點ガ S' ノ上ニ在レハ CD ノ S ニ就テノ極點モ亦 S' ノ上ニ在リ.

59. 圓錐曲線 B ノ共轭徑ニ平行ニ引ケル他ノ圓錐曲線 A ノ切線ノ交點
ハ A ト同シ中心ヲ有シ, B ニ相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル圓錐曲線 C ノ上
ニ在リ.

60. 二組ノ點 $A, B, C, \dots$ 及 $A', B', C', \dots$ ガ各一ツノ直線ノ上ニ在リ
テ互ニ等箇ナルモ配景ニ在ラザルキハ AA', BB', CC' 等ノ包ミハ二ツノ直線
ニ切スル圓錐曲線ナリ.

61. 一點 O ナ過リ一ツノ圓錐曲線ノ弦 OAA', OBB', OCC', ODD' , 等ヲ引キ,
 $AB', AC', AD', \dots$ 及 $A'B, A'C, A'D, \dots$ ナ結ビ付クルキハ A 及 A' ナ頂點トセル
此二ツノ束線ハ等箇ナリ, 而シテ A ナ頂點トセル束線ト O ナ頂點トセル束
線トハ O ガ曲線ノ上ニ在ルニ非ラザレハ等箇ナルヲ無シ.

62. 與ヘラレタル一ツノ三角形ニ内接シ其ノ一邊ニ與ヘラレタル一點ニ
於テ切スル數多ノ圓錐曲線ヲ畫クキハ他ノ二邊トノ切點ハ等箇ニシテ且
同點ニ在ル列點ヲ爲ス.

63. ニツノ列點 $A, B, \dots$, 及 $A', B', \dots$ が中心 S に就テ配景ニ在リ;
 J, J' ナ夫々各列點ヲ含ム直線ノ上ニ在リテ他ノ列點ノ無究遠ノ點ニ對應
 スル點トセハ

$$JA \cdot JA' = JB \cdot JB' = \dots = JS \cdot JS.$$

S が二直線ヨリ等距離ニ在リテ二直線ヲ其ノ交點ヲ旋リテ回轉セシメ (S
 が在ル角が減少スル様ニ) 遂ニ相合セシムル迄ハ斯ノ如クニシテ得タル所
 ノ列點ノ性質ハ如何. 其ノ中心及複點ヲ定メヨ.

64. 一ツノ四邊形ニ内接セル圓錐曲線ニ就テ與ヘラレタル一直線ノ極點
 ノ軌跡ハ他ノ一直線ナリ; 此定理ヲ共焦圓錐曲線ヲ射影シテ證明セヨ.

65. 同シ頂點ノ二ツノ等箇束線ノ複線ヲ作レ.



附 錄.

(此附錄ノ趣旨ニ付テハ諸君ヲ見ヨ.)

複比, インヴォリューション及相反對極

定 義

一組ノ共線點ヲ列點ト稱シ, 其諸點ヲ含ム直線ヲ列點
 ノ基線ト稱シ, 其各點ヲ列點ノ點或ハ元素ト稱ス. 一組
 ノ共點線ヲ束線ト稱シ, 其ノ交ル點ヲ束線ノ頂點ト稱シ,
 其各直線ヲ束線ノ射線或ハ元素ト稱ス.

四ツノ點 A, B, C, D ヨリ成ル列點ニ於テ比 $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ ヲ
 此列點ノ複比ト稱シ, $(ABCD)$ ヲ以テ之ヲ表ス; 此定義ニ
 於テ二點 A, B ハ共軛點ナリトス.

定 理 1.

四ツノ共線點 A, B, C, D ノ複比 $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ ハ射影ノ爲ニ

變スルコト無シ.

射影ノ中心ヲ S トシ、列點ノ任意ノ他ノ直線上ノ射影
ヲ A', B', C', D' トシ;

SI', SJ が夫々二ノ基線ニ平行ニシテ之ト夫々 I', J ニ於
テ交ルトセヨ。然ルルハ

相似三角形 $SAJ, A'SI'$ ニヨリ、 $JA:JS=IS:I'A'$;

又相似三角形 $SCJ, C'SI'$ ニ於テ、 $JC:JS=IS:I'C'$;

$$\therefore JA:I'A'=JC:I'C'=JS:IS;$$

即矩形 $JA.I'A'$ ハ對應點 A 及 A' ノ何レノ双ニ就テモ不
變ナリ。此常量ヲ k トセハ、 $I'A'=\frac{k}{JA}$, $I'C'=\frac{k}{JC}$;

$$\text{故ニ} \quad I'C' \sim I'A' = \frac{k(JA-JC)}{JA \cdot JC};$$

$$\therefore A'C' = \frac{-k}{JA \cdot JC} \cdot AC.$$

$$\text{同様ニ} \quad B'C' = \frac{-k}{JB \cdot JC} \cdot BC,$$

$$A'D' = \frac{-k}{JA \cdot JD} \cdot AD,$$

$$B'D' = \frac{-k}{JB \cdot JD} \cdot BD.$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

定義. 四ノ射線 SA, SB, SC, SD ニヨリ成ル束線ニ於テ其

ノ任意ノ截線ノ上ノ列點ノ複比ヲ其束線ノ複比ト稱シ、
 $S(ABCD)$ ナ以テ之ヲ表ス。

附言. 四ノ文字 A, B, C, D ノ中任意ノ二ヲ交換シ又
他ノ二ヲ交換スレハ複比ノ價ハ變ヒズ; 即

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA);$$

之ヲ證明セシニハ此四ノ複比ヲ次ノ如ク書スルヲ以テ
足レリトス:

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{DB \cdot CA}{CB \cdot DA}.$$

四ノ文字 A, B, C, D ノ排列法二十四アルヲ以テ、此四點
ニ就テ二十四ノ複比有リ; 然レモ此ノ中四ノ宛相等シキ
ヲ以テ異ル比ハ六アルノミニシテ、其ノ中三ノ他ノ三
ノ反比ナリ。

定理 2.

複比 $(ABCD)$ ナ λ トスレハ其四點ヲ以テ作レル他ノ

$$\text{五ノ比ハ} \quad \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1} \quad \text{ナリ.}$$

證明 本文ニ同シキテ以テ略ス、以下同シ。

系 $P(=\lambda)$, $Q\left(=\frac{1}{1-\lambda}\right)$, $R\left(=\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$ 及其ノ反數ヲ以テ

六、ノ複比ヲ表ハセハ

$$P \cdot Q \cdot R = -1, \quad Q + \frac{1}{R} = R + \frac{1}{P} = P + \frac{1}{Q} = 1.$$

定 理 3.

等角束線ノ複比ハ相等シ.

系 1. A, B, C, D ヲ圓ノ上ノ四ツノ定點トシ, P ヲ其ノ上ノ任意ノ一點トズレハ三ツノ角 APB, BPC, CPD ガ不變ナルヲ以テ複比 $P(ABCD)$ ハ不變ナリ.

系 2. 圓ノ四ツノ定點 A, B, C, D ニ於テノ切線ガ任意ノ一點 P ニ於テノ切線ト夫々 A', B', C', D' ニ於テ交ルトセハ, 角 $A'OP = \frac{1}{2}POA$, 角 $B'OP = \frac{1}{2}POB$ ナルヲ以テ, 角 $A'OB' = \frac{1}{2}AOB$ ニシテ即不變ナリ, 同様ニ二ツノ角 $B'OC'$ 及 $C'OD'$ モ亦不變ナルヲ以テ, $(A'B'C'D')$ ハ不變ナリ.

定義. 二ツノ列點或ハ束線ノ複比ガ相等シキ時ハ之ヲ等複比ナリト稱ス. 列點或ハ束線ノ元素ガ四ツヨリ多クシテ其ノ一ツノ任意ノ四元素ガ之ニ對應スル他ノ四元素ト相等シキ複比ヲ有スル時ハ之ヲ等番ナリト稱ス.

二ツノ列點ノ相對應スル二點ヲ結ビ付クル直線ガ共點線ナルトハ之ヲ配景ニ在リト云フ; 其ノ交點ヲ配景ノ中

心ト稱ス. 二ツノ束線ノ相對應スル二線ノ交點ガ共線點ナルトハ之ヲ配景ニ在リト云フ; 其線ヲ配景ノ軸ト稱ス.

附言. 一ツノ列點ガ他ノ列點ヨリ一度若クハ數度ノ射影ニ依リテ生スル様ナル時ハ此二ツノ列點ハ射影的ナリト云フ. 二ツノ束線ガ夫々一ツノ截線ノ上ニ二ツノ射影的列點ヲ作ル様ナル時ハ此二ツノ束線ハ射影的ナリト云フ.

三ツノ點 A, B, C ヨリ成ル列點ハ他ノ任意ノ三ツノ點 A', B', C' ヨリ成ル列點ト常ニ射影的ナリ. 其ノ證明ハ次ノ如シ:— AA' ヲ結ビ付ケ其ノ上ニ任意ノ二點 S, S' ヲ取リ; $SB, S'B'$ ヲ引キ $B'' =$ 於テ交ラシメ, $SC, S'C'$ ヲ引キ $C'' =$ 於テ交ラシメ, $B''C''$ ヲ結ビ付ケ SS' ト $A'' =$ 於テ交ラシメヨ. 然ルトハ $A'B'C'$ ハ ABC ヨリ二度ノ射影ニ依テ生スルコトヲ得, 即先ツ ABC ヲ S ヨリ $A''B''C''$ ニ射影シ, 次ニ $A''B''C''$ ヲ S' ヨリ $A'B'C'$ ニ射影スルナリ.

若シ A' ガ A ト合セル時ハ二ツノ列點ハ直ニ配景ニ在リ配景ノ中心ハ BB' 及 CC' ノ交點ナリ.

若シ二ツノ基線ガ相合セル時ハ先ツ一ツノ列點 $A'B'C'$ ヲ任意ノ中心 O ヨリ任意ノ他ノ直線 A, B, C へ射影スルコト必要ナリ.

若シ A', B' ガ夫々 A, B ト合セル時ハ先ツ A ヲ過ル二ツノ

截線 s_1, s_2 及一ノ中心 S を取り, ABC を S より s_1 ノ上ニ射影シ, $A'B'C'$ を S より s_2 ノ上ニ射影スルヲ必要ナリ.

各四ツノ點ヨリ成ル二ツノ列點 $ABCD, A'B'C'D'$ が等複比ナレハ此二ツハ射影的ナリ (定理 1 ノ逆).

$A'B'C'$ ハ常ニ ABC ヨリ射影ニ依リテ生スルヲ得. 之ニ依リテ生スル D ノ對應點ヲ D'' トセヨ. 然ルルハ $A'B'C'D''$ ノ複比ハ $ABCD$ ノ複比ニ等シキヲ以テ (定理 1), $A'B'C'D'$ ノ複比ニ等シ. 故ニ D'' ハ D' ト合シ, 二ツノ列點 $ABCD, A'B'C'D'$ ハ射影的ナリ.

二ツノ東線ニ就テモ亦同様ナリ.

二ツノ等複比列點或ハ東線ノ射影ハ亦二ツノ等複比列點或ハ東線ナリ.

定理 4.

二ツノ等複比列點ヲ, 相對應スル三双ノ元素ヲ結ビ付クル三直線が共點線ナル様ニ置ク時ハ, 第四双ヲ結ビ付クル直線モ亦之ト共點線ナリ.

系. 二ツノ等複比列點ニ於テ相對應スル一雙ノ元素が合スル時ハ, 他ノ相對應スル元素ヲ結ビ付クル直線ハ共點線ナリ.

定理 5.

二ツノ等複比東線ヲ, 相對應スル三双ノ射線ノ三交點ガ一直線上ニ在ル様ニ置ク時ハ, 第四双ノ交點モ亦其直線上ニ在リ.

系. 二ツノ等複比東線ニ於テ相對應スル一雙ノ射線が合スル時ハ他ノ相對應スル元素ノ交點ハ共線點ナリ.

定理 6.

東線ノ頂點ガ一ツノ圓錐曲線⁽¹⁾ノ上ニ在リテ其ノ射線ガ其曲線上ノ四ツノ定點ヲ過ル時ハ斯ノ如キ東線ハ皆等複比ナリ.

圓錐曲線チ一ツノ圓ニ射影スルハ定理 3 系 1 及其ノ附言ニ依リテ直ニ此定理ヲ得.

系. 四ツノ定點チ一點ト結ビ付クル直線ガ一定ノ複比ヲ有スル東線ナルルハ斯ノ如キ點ノ軌跡ハ一ツノ圓錐曲線ナリ.⁽²⁾

⁽¹⁾ 圓錐曲線トハ圓ヲ射影シテ得ル所ノ曲線ナリトシ其ノ性質ハ此所ニ要セス.

⁽²⁾ 145 頁ノ註ヲ見ヨ; 但シ同所 (7) ニ言ヘル證明ハ此所ニ掲ケル能ハズ.

定理 7.

列點ノ基線が一ツノ圓錐曲線ニ切シ、其點ガ其ノ四ツノ定切線ノ上ニ在ルキハ斯ノ如キ列點ハ皆等復比ナリ。

圓錐曲線ヲ一ツノ圓ニ射影スレハ定理 3 系 2 及其ノ附言ニ依リテ直ニ此定理ヲ得。

系. 四ツノ定直線ト交リテ一定ノ復比ノ列點ヲ作ル直線ハ皆一ツノ圓錐曲線ニ切ス。

調和列點ニ就テノ附言

調和列點ノ定義ニ依リテ、 $(ABCD) = -1$ ナル時ハ $ABCD$ ガ調和列點ナルヲ明ナリ。而シテ $(ABCD) = -1$ ナル時ハ $(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = -1$ ナルヲ以テ $(ABDC) = (ABCD)$ ナリ即 $ABCD$ ガ調和列點ナル時ハ二點 C 及 D (或ハ A 及 B) ヲ置換ルモ列點ノ復比ノ値ヲ變スルヲ無シ。

逆ニ $(ABCD) = (ABDC)$ ナル時ハ、 $(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)}$;

$\therefore (ABCD) = \pm 1$; 而シテ $(ABCD) = +1$ ナル爲ニハ四ツノ點ノ中何レカ相合スルカ或ハ無窮遠ニ在ルヲ必要ナルハ容易ニ見ルヘシ; 故ニ $(ABCD) = -1$ ニシテ列點ハ調和的ナリ。

「インヴォリューション」

定義及説明

二ツノ列點 $A, B, \dots$ 及 $A', B', \dots$ ガ其ノ二ツノ基線ヨリ等距離ニ在ル一點ニ就テ配景ニ在リ、基線ノ交點ヲ中心トシテ之ヲ回轉セシメ基線ガ全ク相合シタル時生スル處ノ二ツノ相重リタル列點ハ「インヴォリューション」ヲ爲スト云フ。

基線ノ外ノ一點 S ヨリ $A, B, \dots$ 及 $A', B', \dots$ へ引クル直線ヲ以テ作リタル二ツノ相重リタル束線ハ「インヴォリューション」ヲ爲スト云フ。

「インヴォリューション」ニ於テ元素ハ一雙宛相互ニ共轭ナリ。一ツノ元素ヲ二組ノ何レニ屬スルトスルモ之ニ對應スル元素ハ同一ニシテ即其ノ共轭元素ナリ。故ニ二組ノ元素ヲ異リタルモノト見ルノ必要無ク之ヲ一雙宛互ニ共轭ナル一組ノ元素ト見ル方便ナリ。

「インヴォリューション」ハ二組ノ射影的元素ノ重リ合フタルモノナルヲ以テ其ノ射影モ亦「インヴォリューション」ナルヲ明ナリ。

二ツノ共線射影的列點ガ「インヴォリューション」ヲ爲ス時無

究遠ニ對應スル二ツノ點 (I' 及 J') ハ相合ス. 此點ヲ O トスレハ $OA, OA' = OB, OB' = \dots\dots\dots = \text{常量}$ (定理 1 ノ證明前部ニ於ケル如ク證明ス). O ヲ「イソゾリユーション」ノ中心ト稱ス; 此點ハ元ノ二ツノ基線ノ交點ナリ.

「イソゾリユーション」ヲ爲ス元素ノ中自ラ已ニ對應スルモノヲ其「イソゾリユーション」ノ複元素ト稱ス.

「イソゾリユーション」ノ複元素ハ其ノ常量ガ正ナル時ノミ實ニシテ二ツ有リ.

定理 8.

「イソゾリユーション」ノ二ツノ複點及一雙ノ共轭點ハ調和列點ヲ作ル.

定理 9.

「イソゾリユーション」ヲ爲ス點(或ハ射線)ノ一組ニ於テ任意ノ四元素ノ複比ハ其ノ共轭元素ノ複比ニ等シ.

系 1. $A, A'; B, B'; C, C'$ ガ「イソゾリユーション」ヲ爲ス三雙ノ共轭元素ナレハ $(ABCB') = (A'B'C'B)$ ナリ.

系 2. A, B, C, A', B', C' ガ六ツノ共線點ニシテ $(ABCB') = (A'B'C'B)$ ナル時ハ $A, A'; B, B'; C, C'$ ハ「イソゾリユーション」ヲ爲ス三雙ノ共轭元素ナリ.

定理 10.

「イソゾリユーション」ハ二雙ノ共轭元素ニ依リテ定マル.

A, A' 及 B, B' ナルヘラレタル二雙ノ元素トセヨ. 然ルルハ任意ノ一元素 C ヲ取レハ其ノ共轭元素 C' ハ $(ABCB') = (A'B'C'B)$ ナルヲ以テ不變ナリ; 即各雙ノ共轭元素ハ一定ナリ.

發賣所

各府縣下賣捌所
同支社

大阪市東區博勞町四丁目十七番屋敷

大日本圖書株式會社

東京市京橋區銀座一丁目廿二番地

專務取締役 佐久間貞一
左ノ代表者

東京市京橋區銀座一丁目廿二番地
大日本圖書株式會社

數藤 斧三郎

島根縣土族

東京市本鄉區弓町壹丁目十四番地
菊池 大麓

東京府平民

發行兼
印刷者
同
翻譯者

理學博士

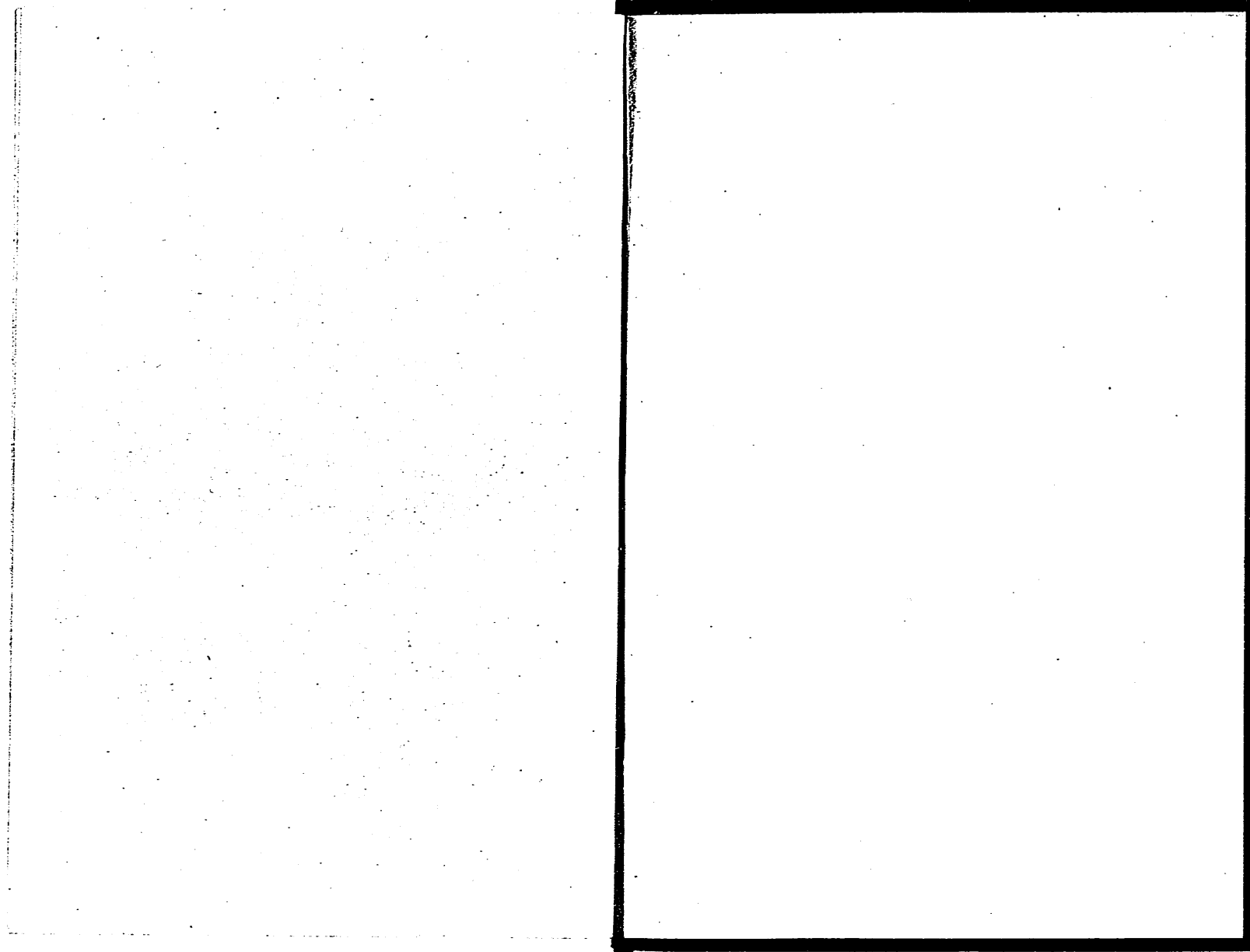


明治廿八年九月五日發行
明治廿八年九月二日印刷

定價金七十錢

大日本圖書株式會社特約販賣所

北道 村上商店。川南。魁文會。二堂。富貴堂。東本町 丸善。林平。大倉。水野。青野。三友。內田。杉本。文林堂。北隆館。文星堂。中西屋。東京堂。文會堂。勉強堂。二松堂。松尾。東海堂。有隣堂。十字屋。森江。榮昌。弘集堂。丸屋。勉強堂。新堀 北光社。高菜。梶張。野島。西村。萬松堂支店。目黒。三野 水野。高野。牛馬。燒平堂。土著。多田屋。森城野 明文堂。川又。寺田。楠木野 煥平。黨分館。青木。三重。岩田。安居。六角。永東。川湖。靜野 吉見。谷崎屋。三原屋。大石。山梨野 柳正堂。嚴家野 郁文堂。郁文堂支店。長野。日新堂。水琴堂。朝陽館。西澤。盛文堂。森城野 藤時。英華堂。龜野 甲斐山。嚴手野 佐藤文明堂。森野 青霞堂。今泉。今泉支店。山形野 盛文堂。牧野。八文字屋。秋田野 晴堂。東海林。藤島。田縣 中田。學海堂。清明堂。京都野 若林。文進堂。松田。南波。大阪野 金川。柳原。小谷。松村。開成館。寶文館。三宅。北村。今井。植田。六角野 熊谷。石田。福浦。竹內。護師寺。西村。中井。長崎野 松村。森野 文進堂。敵防館。廣野 廣田。福井野 品川。川野 宇都宮。森野 德岡。今井。久松堂。島根野 安達。川岡。板倉。岡山野 奧田。武內。廣島野 秋善館。芸香堂。原田。山口野 舍英堂。梅龍堂。日新堂。日新堂支店。趙世館。北野 平安堂。德島野 靜壽堂。香川野 開益堂。開文會。愛媛野 向井。土肥。岡部。藤原。出知野 富士屋。福岡野 佐野。横濱野 博文社。金文堂。大分野 甲斐。中園。梅津。佐賀野 牧川。平井。北野 長崎。高崎野 修進堂。谷。鹿野 吉田。金光堂。中野野 小澤。大野 新高堂。



[illegible]