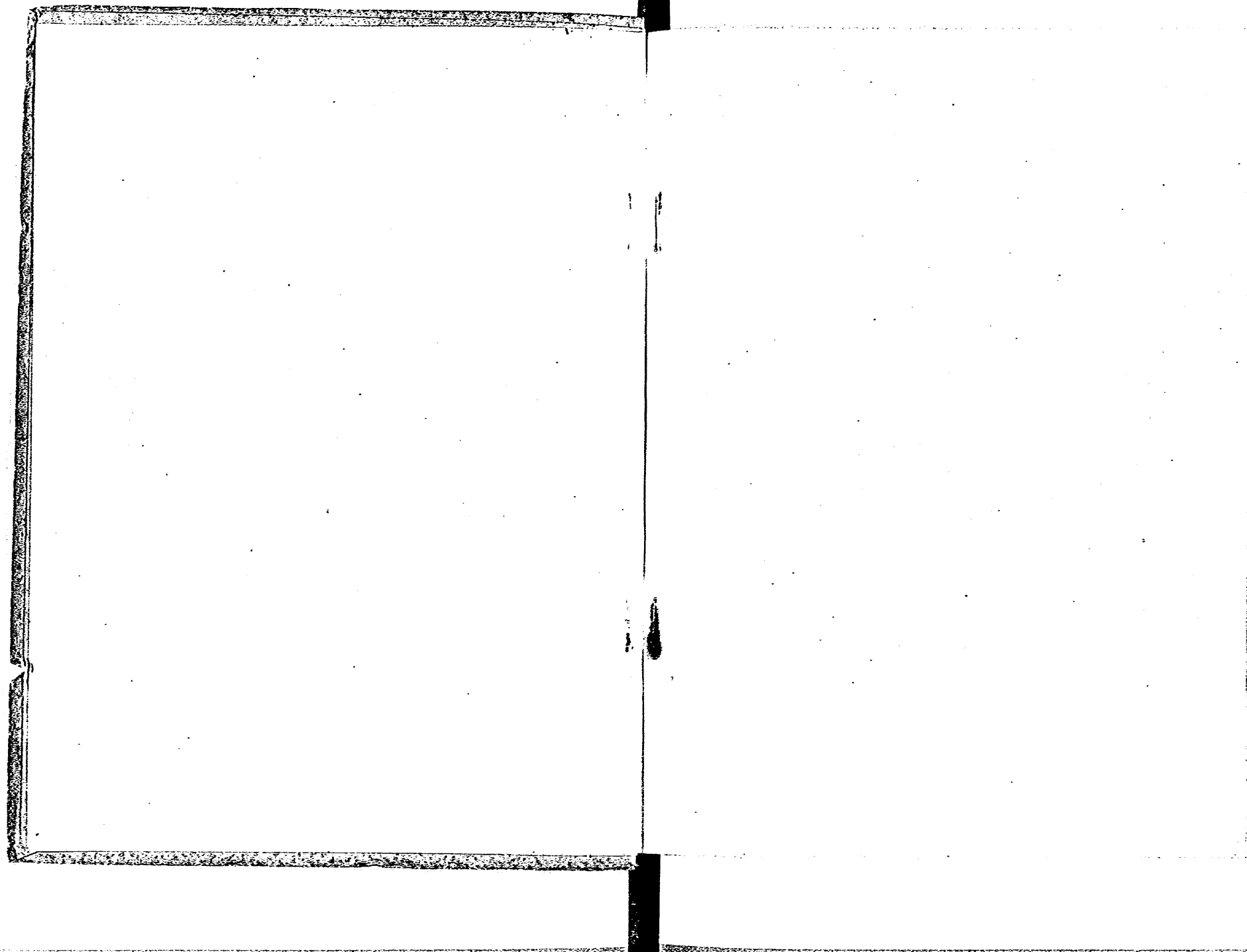
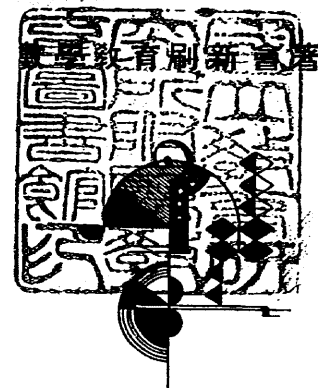
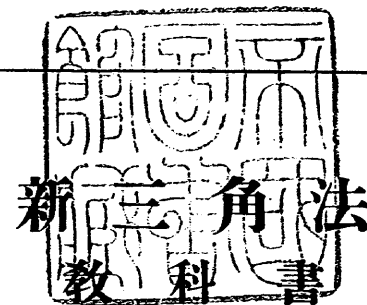


K220.43

112a







東京
金港堂書籍株式會社



序

本書ハ分ケテ三章トスル。第一章ニ於テハ三角函數ノ基礎觀念ヲ與ヘ、第二章ニ於テハ基礎公式ヲ、又第三章ニアツテハ簡單ナル應用ヲ知ラシメルコトヲ主眼トスル。

銳角ノ三角函數ハ平面幾何ニ於テ其ノ大意ヲ授ケタレバ成ルベク重複ヲ避ケルヲ要スト雖モ第一章ノ仕組ハ在來ノ多クノモノト趣ヲ異ニシ、銳角ト一般角ノ三角函數トノ區別ヲ餘リニ明確ナラシメザルコトニヨツテ生徒ノ程度ニ適合セシメ、且三角法トシテ獨立ノ教科書タラシムル様工夫シタ。

公式相互間ニハ出來得ル限リ連絡ヲ保チ以テ一ヨリ他ヲ誘導シ得ル様配列シ、學習經濟上ノ便ヲハカツタ。

三角形ノ解法ト測量上ノ應用トハ特ニ之ヲ同一章ニ收メ教授時數ノ節減ニモ便ナラシメタ。

以上本書編纂趣旨ノ大要ヲ述ベテ實際教授ノ參考タラシメントスルモノデアル。

昭和七年九月

編 者 識

第一章 三角函數

1. 角の正負	1	5. 眞數表と其の應用	13
2. 象 限	4	6. 負角の三角函數	20
3. 三角函數	5	7. 餘角の三角函數	22
4. 三角函數の値の求め方	11	8. 三角函數のグラフ	26
		9. 平方關係	27

第二章 加法及び減法定理

10. 加法の定理	33	12. 乗積の公式	38
11. 減法の定理	34		

第三章 三角形の解法

13. 三角形の原素	43	18. 三角形の面積	50
14. 正弦法則	44	19. 對數表	53
15. 餘弦法則	45	20. 三角形の解法	57
16. 二邊の和と差との比	47	21. 測量上の應用	63
17. 半角の正弦餘弦及び正切	48		

附 録

補 充 問 題	1	答	8
---------	---	---	---

附表 三角函數ノ對數表, 數ノ對數表,

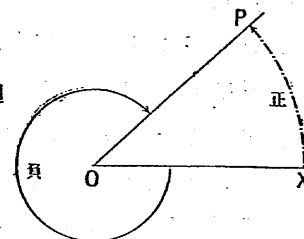
新三角法

教科書

第一章 三角函數

1. 角の正負 一平面上ニ於テ互ニ重ナリ
合フニツノ半直線 OX, OP ノ一方 OX ハ一定
不動ニシテ, 他方 OP

ノミガ此ノ平面上ニ
於テ點 O ノ周リニ廻
轉シ, ココニ角 XOP
ガ出來ルト考ヘルト



キ, OP ノ廻轉ノ仕方

ニ對シ矢ニ示スガ如クニ通リヲ考ヘルコトガ
出來ル. 此ノ如キ相異ナルニツノ廻轉ノ仕方
ヲ區別スルタメニ, 時計ノ針ト相反スル廻轉ヲ
正方向ノ廻轉ト云ヒ, 又時計ノ針ト同様ノ廻轉
ヲ負方向ノ廻轉ト云フ. 而シテ正方向ノ廻轉
ニヨツテ生ズル角ヲ正角, 又負方向ノ廻轉ニヨ

ツテ生ズル角ヲ負角ト云ヒ、OXヲ首線、OPヲ動徑ト云フ。

角ノ大小ハ動徑ノ廻轉ノ仕方及ビ多少ニヨツテ定マル。而シテ其ノ判定ハ代數學上ニ於ケル實數ノ大小ノ規約ニ從フモノトスル。例ヘバ

$$+375^\circ > +180^\circ > 0^\circ > -15^\circ > -400^\circ$$

以上ノ規約ニ從ヘバ

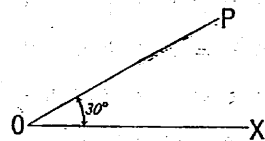
右圖ノ角 XOP ノ大サ

ニ對シテ種々ナル解釋ヲナシ得ル。例ヘバ之

ガ幾何學上ノ考ニヨル 30° ヲ表ハストキ、之ヲ正方向ニ^{*}2回ト 30° 廻轉シテ生ジタモノトスレバ 750° 、又3回ト 30° 廻轉シテ生ジタモノトスレバ 1110° 、又負方向ニ1回ト 330° 廻轉シテ生ジタモノトスレバ -690° ト考ヘラレル。

或角ノ表ハス正角ノウチ其ノ最小ナルモノヲ最小正角ト云フ、上ノ例デハ角 XOP ノ最小正角ハ 30° デアル。

*一般ニ動徑ガ首線ヲn回通過スルトキニ動徑ハn廻轉セリト云フ。



一般に最小正角が a° なる角の度数 θ は

$$\theta = a + n \cdot 360$$

と考へられる。ここに n は任意の正負の整数又は零を表はすものであつて、此の如き角 θ を一般角と云ふ。

例1. 最小正角ガ 60° ナルトキ、其ノ一般角ヲ求メヨ。

解 $60^\circ + n \cdot 360^\circ$ ガ所要ノ一般角デアル。

注意 $n \cdot 360^\circ$ ハ 360° ノ n 倍ノ意味デアル。

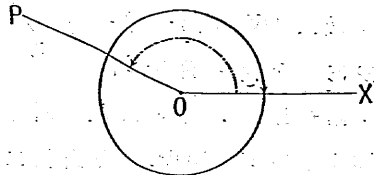
例2. -200° ナル角ノ最小正角ヲ求メヨ。

解 負ノ方向ニ一廻轉シ然ル後正ノ方向ニ最小正角 a° ダケ廻轉セルモノト考ヘル。故ニ一般角ノ公式ニ於テ $\theta = -200, n = -1$ ト置ケバ

$$-200 = a - 360 \quad \therefore a = 160 \quad \text{答 } 160^\circ$$

注意1 一般角ノ公式ニ於テ a ハ θ ノ表ハス多クノ角ノ中ノ何レカノ一ツト考ヘテヨイ。此ク考ヘルコトニヨツテモ上ノ問題ヲ解キ得ル。

注意2 三角法ニ於テハ角ノ單位ハ六十分法ニヨ



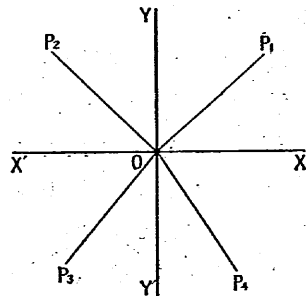
り、度、分、秒ヲ用ヒル。

類題 (1) 次ノ各角ノ動徑ノ位置ヲ定メヨ。

135°, -120°, 420°, -480°

(2) -240°, 750° ヲ表ハス角ノ最小正角ヲ求メヨ。
又各ノ一般角ヲ求メヨ。

2. 象限 一點Oニ於テ直交スル二直線
XOX', YOY' ニヨツテ分タレル平面ノ四部分
XOY, YOX', X'OY',
Y'OX' ヲ順次ニ第一
象限、第二象限、第三象
限、第四象限ト云ヒ、
OX ヲ首線トスルト
キ動徑 OP ガ第一象
限内ニアラバ角XOP₁
ヲ第一象限ノ角ト云フ。同様ニ圖ニ於ケル角
XOP₂, XOP₃, XOP₄ ハ夫夫第二象限、第三象限、第
四象限ノ角デアアル。



例 980° ハ第何象限ノ角カ。

解 $980^\circ = 360^\circ \times 2 + 260^\circ$

然ルニ 260° ハ第三象限ノ角デアアル。故ニ 980° モ亦第
三象限ノ角デアアル。

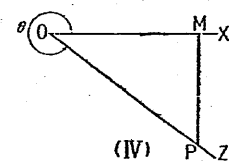
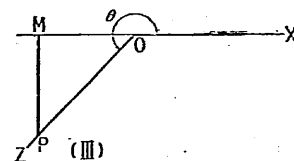
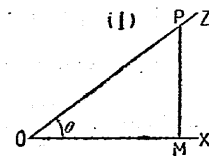
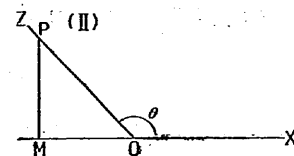
類題 (1) 次ノ角ハ夫夫第何象限ノ角カ。

120°, 315°15', 420°, -456°, -570°

(2) 一般角ガ $100^\circ + n \cdot 360^\circ$ ナル角ハ第何象限ノ角カ。
又此ノ角ノ半分ノ角ハ第何象限ノ角カ。

(3) 第一象限ニアル角ノ半分ノ角ハ必ズ第一象限
カ又ハ第三象限ニアルコトヲ示セ。

3. 三角函数 角XOZノ一邊OZ上ノ任意
ノ一點Pカラ他ノ邊OXニ下シタ垂線ノ足ヲ
Mトスルトキ角XOZヲ θ トスレバOP, OM, MP



ノ間ニ存在スル六ツノ比ニ對シテ次ノ如ク定
義スル。

i) $\frac{MP}{OP}$ を角 θ ノ正弦ト云ヒ $\sin\theta$ ト書く。

- ii) $\frac{OM}{OP}$ を角 θ の餘弦と云ひ $\cos\theta$ と書く。
 iii) $\frac{MP}{OM}$ を角 θ の正切と云ひ $\tan\theta$ と書く。
 iv) $\frac{OM}{MP}$ を角 θ の餘切と云ひ $\cot\theta$ と書く。
 v) $\frac{OP}{OM}$ を角 θ の正割と云ひ $\sec\theta$ と書く。
 vi) $\frac{OP}{MP}$ を角 θ の餘割と云ひ $\csc\theta$ と書く。

而シテ之等六ツノ比ヲ總稱シテ角 θ ノ三角函数ト云フ。

例ヘバ角 θ ガ 30° ナラバ幾何學デ知ル如ク直角三角形 OMP ニ於テ

$$\frac{MP}{OP} = \frac{1}{2}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

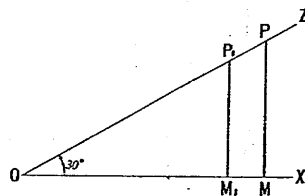
$$\frac{MP}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{OM}{MP} = \sqrt{3}$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{OP}{MP} = 2$$

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \csc 30^\circ = 2$$

而シテ之等ノ値ハ角ノ邊 OZ 上ノ點 P ノ取リ方如何ニヨツテ變ラヌ、例ヘバ圖ノ如ク P ノ代



リニ P_1 ヲ取ツテ垂線 $P_1 M_1$ ヲ下シテモ三角形 OMP ト $OM_1 P_1$ トハ相似ナルヲ以テ $OM_1 P_1$ ニツイテ上ノ如ク計算シテモ全ク同一ノ結果ヲ得ル。

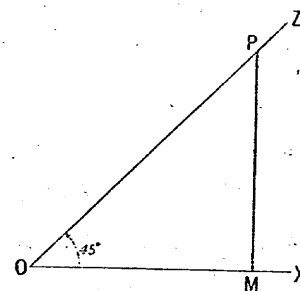
又例ヘバ 45° ナル角ニツイテ上ノ如ク計算スレバ次ノ結果ヲ得ル。

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ,$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ,$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2} = \csc 45^\circ$$

此ノ如ク三角函数ノ値ハ其ノ角ノ大サノ變ハルニツレテ變化スル。



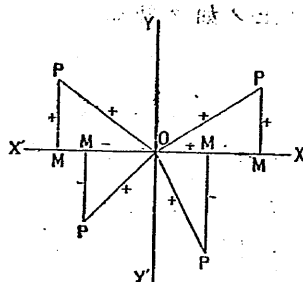
三角函数ノ値ハ次ノ如キ規約ニヨツテ定メル。即チ角 XOZ ヲ θ デ表ハシ、之ヲ或象限内ノ角ト考ヘルトキ

- (1) 動徑 OP は常に正。
- (2) θ が第一象限の角ならば OM, MP は共に正。
- (3) θ が第二象限の角ならば OM は負、 MP は正。

(4) θ が第三象限の角ならば OM , MP は共に負.

(5) θ が第四象限の角ならば OM は正, MP は負.

依ツテ次ノ如ク言ハレル.



點 P が YOY' ノ右方ニアレバ OM ハ正, 左方ニアレバ負デアル. 又點 P が XOX' ノ上方ニアレバ MP ハ正, 下方ニアレバ負デアル. 而シテ OP ハ常ニ正デアル. 故ニ XOX' , YOY' ヲ座標軸ト考ヘルトキ OM 及ビ MP ハ點 P ノ横座標及ビ縦座標ヲ表ハスモノト考ヘラレル.

以上ニ依ツテ三角函数ノ値ノ符號ヲ定メレバ次表ノ如クナル.

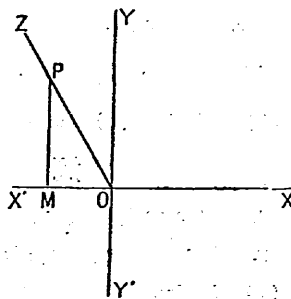
象限 函数	I	II	III	IV	象限 函数
$\sin$	+	+	-	-	cosec
$\cos$	+	-	-	+	$\sec$
$\tan$	+	-	+	-	$\cot$

例1. $\sin 120^\circ$ ノ値ヲ

求メヨ.

解 120° ハ第二象限ノ角ナル故 $\sin 120^\circ$ ハ正デア. 而シテ直角三角形 OMP ニ於テ角 POM ハ 60° ナルヲ以テ

$$\frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{答 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$



類題 $\sin 150^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

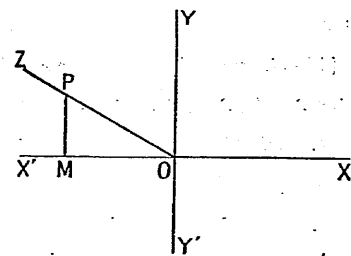
例2. $\cos 150^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

解 角 XOZ ヲ 150° トシ, 動徑 OZ 上ノ任意ノ點 P カラ $XOX' =$ 垂線 PM ヲ

下ス. OP ハ正, OM ハ負デアツテ $\cos 150^\circ$ ハ負トナル. 直角三角形 OMP ニ於テ角 POM ハ 30° デアルカラ OM ノ長サヲ

表ハス數ノ絶對値ヲ m , 又 OP ノ長サヲ表ハス數ヲ p トスレバ

$$\frac{OM}{OP} = -\frac{m}{p} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\therefore \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{答} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

類題 次ノ各三角函数ノ値ヲ求メヨ。

- (1) $\cos 120^\circ$ (2) $\tan 150^\circ$ (3) $\cot 210^\circ$

例題

1. 60° ノ三角函数ヲ求メヨ。

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

- (1) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (2) $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$

2. 角 A ハ 90° ヨリモ小ナル正角トスルトキ次ノ各關係ヲ證明セヨ。

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A, \quad \cot(90^\circ - A) = \tan A$$

3. 次ノ各方程式ヲ満足スル 90° 以下ノ正角 x ヲ求メヨ。

- (1) $\sin x = \cos 30^\circ$ (2) $\cos x = \sin 70^\circ$

次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。(4-6)

4. $2\sin 30^\circ - \sin 60^\circ \tan 30^\circ$

5. $(1 + \sin 45^\circ - 2\cos 60^\circ)(1 - \sin 45^\circ + 2\cos 60^\circ)$

6. $8\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ$

注意 $(\sin \theta)^n, (\tan \theta)^n$ 等ヲ夫夫 $\sin^n \theta, \tan^n \theta$ ト書ク。

7. $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \tan 30^\circ$ ヲ證明セヨ。

8. $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ ヲ満足スル x ノ値ヲ求メヨ。

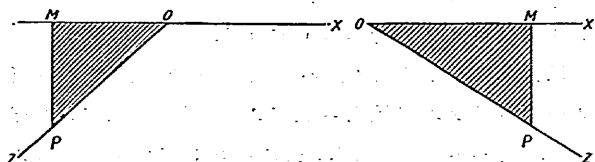
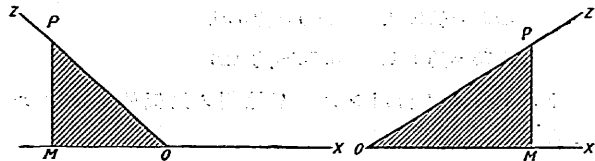
次ノ各等式ヲ證明セヨ。(9-11)

9. $\sin x \operatorname{cosec} x = 1, \quad \cos x \operatorname{cosec} x = \cot x$

10. $\tan x \cot x = 1, \quad \sin x \sec x = \tan x$

11. $\sin x \cos x \tan x \cot x \sec x \operatorname{cosec} x = 1$

4. 三角函数ノ値ノ求め方 任意ノ角 XOZ ノ三角函数ノ値ヲ求メルニハ、先ツ直角三角形 OMP ニツイテ幾何學的解法ニヨリ夫夫目的トスル二邊ノ比ヲ求メ、之ヲ所要ノ三角函数ノ値ノ絶對値トシ、前節ノ規約ニ從ツテ夫夫適當ノ符號ヲツケレバヨイ。故ニ如何ナル角ノ三



角函数デモ其ノ値ノ絶對値ハ 90° 以下ノ正角ノ三角函数ノ値ヲ求メルコトニヨツテ定メラレル。

三角函数ノ値ハ一般ニ無理數デアツテ、實際計算ニヨツテ其ノ近似値ヲ求メルコトハ相當困難ナル。然シ吾人ハ次ニ示スガ如キぐらふニヨツテ概略ノ値ヲ見出スコトガ出來ル。

注意 1. 正弦餘弦表示ノ圖ハ半徑 1 ナル四分圓ニ 1 分毎ノ目盛ヲシタモノデアル。故ニ例ヘバ $\sin 50^\circ$ ヲ求メルニハ 50° ノ目盛ヲ通過スル水平線ガ縦ノ目盛ノ何レヲ通過スルカタ見レバヨイ。又 $\cos 50^\circ$ ヲ求メルニハ 50° ノ目盛ヲ通過スル鉛直線ガ横ノ目盛ノ何レヲ通過スルカタ見レバヨイ。今二三ノ例ヲ示セバ

$$\sin 20^\circ \approx 0.34, \quad \cos 20^\circ \approx 0.94,$$

$$\sin 75^\circ \approx 0.97, \quad \cos 75^\circ \approx 0.26$$

此ノぐらふヲ利用シテ正割餘割ノ近似値ヲ求メルニハ

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

ナル關係ニヨツテ計算スレバヨイ。

注意 2. 正切表示ノ圖ハ半徑 1 ナル四分圓ノ半徑ノ一端ニ於ケル切線上ニ正切ノ値ヲ目盛シタモノデアル。例ヘバ $\tan 50^\circ \approx 1.2$ デアルコトガ分ル。餘切ノ値ヲ求メルニハ正切ノ逆數ヲ求メレバヨイ。

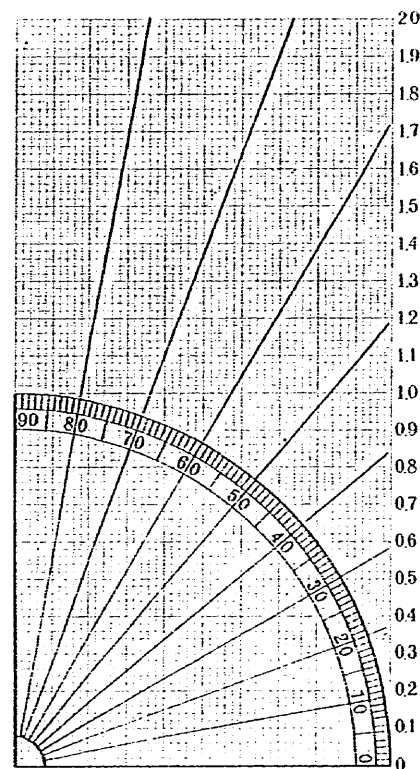
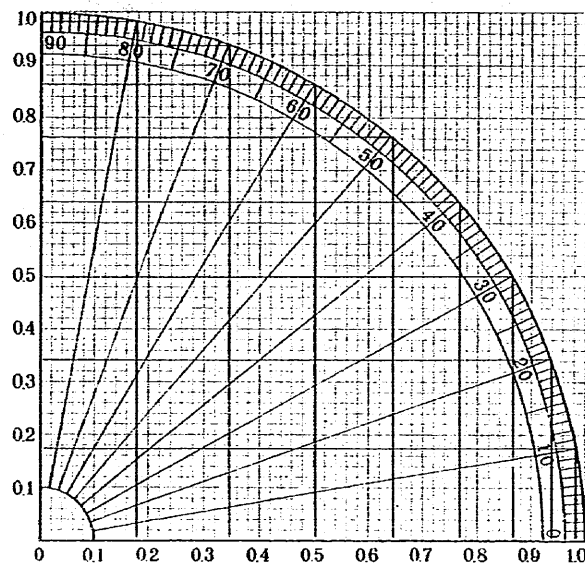
類題 (1) ぐらふニヨツテ次ノ各近似値ヲ求メヨ。

$$\sin 40^\circ, \cos 40^\circ, \sin 70^\circ, \cos 70^\circ, \tan 20^\circ, \tan 40^\circ$$

90°以下ノ正角ノ三角函数
近似値表示圖

(正切表示)

(正弦及ビ餘弦表示)



(2) ぐらふヲ用ヒテ各三角函数ノ絶對値ヲ見出スコトニヨリ、次ノ各近似値ヲ求メヨ。

$$\sin 130^\circ, \cos 140^\circ, \tan 135^\circ, \tan 165^\circ$$

(3) $\sin 0^\circ, \cos 0^\circ, \sin 90^\circ, \cos 90^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

(4) $\sin 180^\circ, \cos 180^\circ, \sin 270^\circ, \cos 270^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

注意 3. $\tan \theta$ = 於テ $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ トスルトキ θ ガ 90° ニ近ヅケバ $\tan \theta$ ノ値ハ非常ニ大トナリ θ ガ 90° ニ一致セル極限ニ於テハ如何ナル數ヨリモ大トナル、此ノコトヲ θ ガ 90° ノトキ $\tan \theta$ ハ無限大ニナルト云ヒ、 $\tan 90^\circ = \infty$ ト書ク。 θ ガ第二象限ノ角ナラバ $\tan \theta$ ハ負デアルカラ、 θ ガ 90° ヨリ大デハアルガ 90° ニ非常ニ近ヅケバ $\tan \theta$ ハ負デアツテ、其ノ絶對値ハ非常ニ大トナリ θ ガ 90° ニ一致セル極限ニ於テハ如何ナル數ヨリモ大トナル。此ノコトヲ θ ガ第二象限ニ於テ 90° ナラバ $\tan \theta$ ハ負ノ無限大ニナルト云ヒ、 $\tan 90^\circ = -\infty$ ト書ク。故ニ θ ガ増大シテ 90° ヲ通過スル瞬間ニ $\tan \theta$ ハ ∞ カラ $-\infty$ ニ變ズル。

(5) $\tan 0^\circ = 0, \cot 90^\circ = 0, \cot 0^\circ = \pm \infty$ ヲ説明セヨ。

5. 眞數表と其の應用 三角函数ハ實用上種々ナル場合ニ應用サレル、從ツテ其ノ便宜ヲハカルタメ吾人ハ 90° 以下ノ正角ノ三角函数

ノ値ヲ豫メ計算シ之ヲ表示シテ置クガヨイ此ノ表ヲ三角函数ノ真数表ト云フ第16頁ニ示スモノハ 1° 置キノ三角函数ノ値ヲ四捨五入法ヲ用ヒテ小数第四位マデ採ツテ作ツタ四桁ノ真数表デアル。

例 1. $\sin 35^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

解 表中左方ノ角ノ欄及ビ上方ノ函数ノ欄ヲ用ヒ、 35° ノ横罫ト $\sin$ ノ縦罫トノ交リヲ求メテ $\sin 35^\circ = 0.5736$ ヲ見出ス。

注意 0° カラ 45° マデノ三角函数ノ値ヲ表ニヨツテ求メルニハ本例ト同様ニスレバヨイ。 45° カラ 90° マデノ三角函数ヲ求メルニハ右方ノ角ノ欄ト下方ノ函数ノ欄トヲ用ヒル。

函数 角	$\sin$	$\cos$
35°	0.5736	0.8192

類題 (1) 次ノ角ノ正弦ノ値ヲ求メヨ。

$18^\circ, 37^\circ, 42^\circ, 53^\circ, 88^\circ$

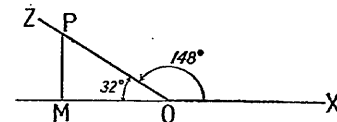
(2) 次ノ各値ヲ求メヨ。

$\cos 42^\circ, \sin 73^\circ, \tan 65^\circ, \cot 80^\circ, \sec 68^\circ$

例 2. $\tan 148^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

解 148° ハ第二象限ノ角デアルカラ $\tan 148^\circ$ ノ値ハ

負デアル。而シテ其ノ絶対値ハ $\tan 32^\circ$ ニ等シイ。



$$\therefore \tan 148^\circ = -\tan 32^\circ = -0.6249 \quad \text{答 } -0.6249$$

注意 90° ヨリモ大ナル角又ハ負角ノ三角函数ノ値ヲ求メルニハ、先ヅ其ノ角ガ第何象限ノ角ナルカニ從ヒ函数ノ符號ヲ決定シ、次ニ幾何學のニ考ヘテ首線又ハ其ノ延長ト動徑トノナス 90° 以下ノ正角ノ三角函数ヲ求メテ、ソレヲ絶対値トスレバヨイ。

類題 次ノ各角ノ正弦及ビ餘弦ノ値ヲ求メヨ。

$163^\circ, 215^\circ, 310^\circ, -25^\circ, -100^\circ, -260^\circ$

例 3. $\sin x = 0.6495$ ナル 90° 以下ノ正角 x ヲ求メヨ。

解 表ニヨツテ

$$0.6561 = \sin 41^\circ \quad 0.6428 = \sin 40^\circ$$

$$\therefore \sin 41^\circ - \sin 40^\circ = 0.0133$$

此ノ差 0.0133 ハ角ノ差 1° ニヨルモノデアル。而シテ $\sin x$ ト $\sin 40^\circ$ トノ差ハ

$$0.6495 - 0.6428 = 0.0067$$

今角ノ差ガ甚ダ小ナルトキ之ト三角函数ノ差トハ互ニ比例スルモノト考ヘレバ度ヲ單位トシテ

$$1 : (x - 40) = 0.0133 : 0.0067$$

函数 角	sin	cos	tan	cot	sec	cosec	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.0002	57.299	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.0014	19.107	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.0024	14.336	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.0038	11.474	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6693	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4585	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1031	2.3662	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2203	1.7431	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45°
	cos	sin	cot	tan	cosec	sec	函数

$$\therefore x - 40 = \frac{67}{133} = 0.5 \dots \dots \dots$$

$$\therefore x = 40.5 \dots \dots \dots \quad \text{答 約 } 40^{\circ}30'$$

注意 1. 二角ノ差ト其ノ三角函数ノ差トハ比例ス
ルモノデハナイガ表使用ノ多クノ場合ニハ略ボ比例
スルモノト考ヘテヨイ。

注意 2. 正弦, 正切, 正割ノ値ハ角ノ増大ト共ニ増大
スルガ, 餘弦, 餘切, 餘割ノ値ハ之ニ反スルコトニ注意セ
ネバナラス。但ココニ角ハ 90° 以下ノ正角トスル。

類題 次ノ方程式ヲ満足スル 90° 以下ノ正角 θ ヲ
求メヨ。

$$(1) \sin \theta = 0.8290 \quad (2) \cos \theta = 0.7489$$

$$(3) \tan \theta = 1.1711 \quad (4) \cot \theta = 1.6982$$

例 4. C ヲ直角

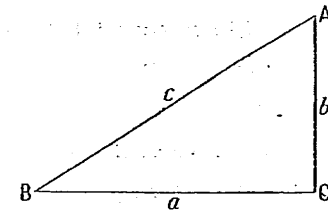
トスル三角形 ABC

ノ頂角 A, B, C ノ對

邊ヲ夫夫 a, b, c トス

レバ次ノ關係アル

コトヲ證明セヨ。



$$b = c \sin B = c \cos A = a \tan B = a \cot A$$

$$c = a \sec B = a \operatorname{cosec} A = b \sec A = b \operatorname{cosec} B$$

之三角函数ノ定義カラ直チニ得ラレル結果

デアル。

注意 總テ三角形 ABC ノ頂角 A, B, C ハ單ニ A, B, C
ト書き、其ノ對邊ハ夫夫 a, b, c ト書く。

類題 直角三角形 ABC ニ於テ

- (1) $A=32^\circ$, $c=12m$ ナルトキ a, b ヲ求メヨ。
- (2) $B=42^\circ$, $a=38.5m$ ナルトキ b, c ヲ求メヨ。
- (3) $c=250m$, $a=235m$ ナルトキ A ヲ求メヨ。
- (4) $a=3m$, $b=5m$ ナルトキ A ヲ求メヨ。

例 5. 塔 AB ト同ジ水平面上ニ立テル高サ
10m ノ樓 CD ノ基底 D カラ、塔ノ頂 Aヲ觀測シテ
仰角 45° ヲ得、又樓上 C カラ同ジク Aヲ觀測シテ
仰角 30° ヲ得タト云フ。塔 AB ノ高サヲ求メヨ。

解 塔ノ高サヲ xm トスレバ圖ニ於テ

$$AB=BD=CE,$$

$$EB=CD$$

從ツテ CE ハ xm , AE

ハ $(x-10)m$ デアル。

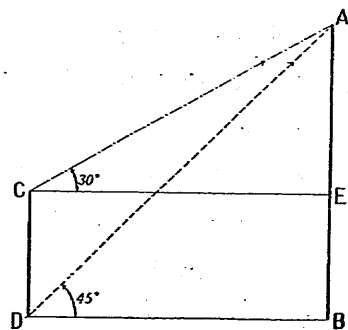
然ルニ直角三角形

ACE ニ於テ

$$AE=CE \tan C$$

$$\therefore x-10=x \tan 30^\circ$$

$$\therefore x(1-\tan 30^\circ)=10$$



$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}x=10$$

依ツテ $x=15+5\sqrt{3}$ ヲ得ル。

答 $5(3+\sqrt{3})m$

類題 或煙突ノ基底カラ 50m ナ距タル一地點ニ
於テ煙突ノ頂上ヲ望ミ仰角 60° ヲ得タト云フ。此ノ煙
突ノ高サヲ求メヨ。

例 題

1. $\sin x = \frac{5}{6}$ ナルトキ x ハ何度ト何度トノ間ノ角カ
但 $0 < x < 360^\circ$ トスル。(表ヲ用ヒヨ)

2. $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin x$ カラ x ヲ求メヨ。但 x ハ 90°
以下ノ正角トシ、表ヲ用ヒテ計算セヨ。

3. $\sin^2 30^\circ$, $\sin^2 45^\circ$, $\sin^2 \theta$ ハ等差級數ヲナスト云フ。
角 θ ヲ求メヨ。但 $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ トスル。

4. $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ。

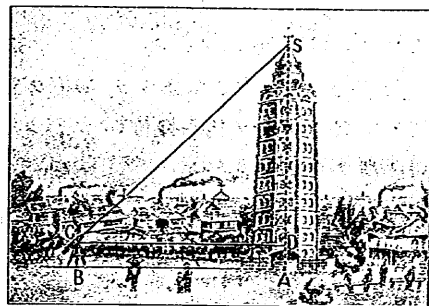
5. $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ カラ 90° 以下ノ
正角 x ヲ求メヨ。

6. 半徑 r ナル圓ノ中心角ガ θ ナルトキ、之ニ對ス
ル弦ノ長サヲ求メヨ。但 θ ハ劣角トス。

7. 長サ 15m ノ梯ノ一端ヲ壁ノ上緣ニ掛ケ、他端ヲ
地上ニ置ケバ壁ト梯トハ 60° ノ角ヲナスト云フ。壁ノ
高サヲ求メヨ。但壁ハ平地ト直角ヲナスモノトスル。

8. 或塔ヲ基底カラ 60m 隔ツタ地點ニ於テ觀測シ、

其ノ塔頂ノ
仰角 42° ヲ
得タト云フ。
眼高ヲ 1m
トシテ塔ノ
高サヲ求メ
ヨ。



注意 實

際測量ノトキノ觀測者ノ眼ノ高サヲ眼高ト云フ。眼高ヲ明示シナイ問題ニ於テハソレヲ 0 トシテ計算スル。

9. 或人河岸ニ立チテ對岸ノ塔頂ヲ望ミ仰角 57° ヲ得、ソレカラ 30m 後退シテ再ビ塔頂ヲ望ミ仰角 35° ヲ得タト云フ。此ノ塔ノ高サ及ビ河幅ヲ求メヨ。(表ヲ用ヒヨ)。

10. 高サ 18m ノ塔上ニ立ツ旗竿ヲ望ミ、尖端及ビ下端ノ仰角トシテ夫夫 $60^\circ, 45^\circ$ ヲ得タト云フ。旗竿ノ長サヲ求メヨ。

11. 鐵道線路ノ勾配ガ $\frac{1}{40}$ ナルトキ線路ト水平面トノナス角ヲ求メヨ。但道路又ハ鐵道線路等ノ勾配トハ、ソレガ水平面トナス角ノ正弦ノコトデアル。

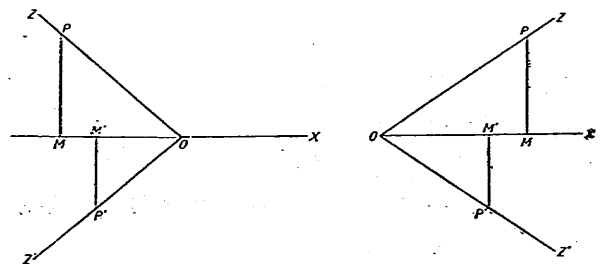
6. 負角の三角函数 本節ニ於テハ負角ノ

三角函数ト正角ノ三角函数トノ關係ヲ調べルコトニスル。

倍 θ ヲ正角トスルトキ、之ト $-\theta$ トノ屬スル象限ノ關係ハ次表ノ如クデアル。

角	象 限			
θ	I	II	III	IV
$-\theta$	IV	III	II	I

從ツテ此ノトキ θ ノ動徑上ノ一點 P カラ首線 OX ニ下ス垂線 PM ト $-\theta$ ノ動徑上ノ一點 P' カラ首線 OX ニ下ス垂線 P'M' トハ其ノ符號ヲ反對ニスル。然シ OM ト OM' トハ同符號デア



ル。而モ三角形 OMP ト OM'P' トハ相似デアル。

カラ直チニ次ノ關係ガ得ラレル.

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta & \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta & \cot(-\theta) &= -\cot\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

例 $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

類題 (1) 次ノ關係ヲ證明セヨ.

$$\sec(-\theta) = \sec\theta, \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

(2) 次ノ各値ヲ求メヨ.

$$\sin(-48^\circ), \cos(-135^\circ), \tan(-62^\circ)$$

7. **餘角の三角函数** 三角函数ノ定義ニヨ

リ次ノ關係ハ直チニ知ラレル.

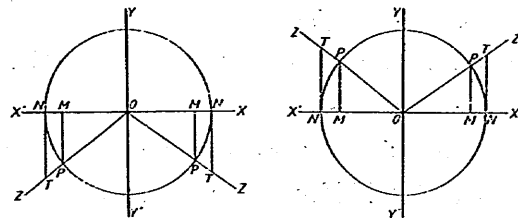
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \dots\dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \operatorname{cosec}\theta &= 1 \\ \cos\theta \sec\theta &= 1 \\ \tan\theta \cot\theta &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

従ツテ以下三角函数ノ性質ニ關スルコトハ正
弦及ビ餘弦ニ關スル研究ニヨツテ其ノ大部分
ヲ知ルコトガ出來ル.

*一般ニ角 α, β ニ於テ $\alpha + \beta = 90^\circ$ ナルトキ α, β ヲ互ニ他ノ餘角
ト云フ.

倍三角函数ノ値ハ角ノ邊ノ長サニ關係スル



コトナク唯角ノ大サノミニヨツテ定マル. 故
ニ角 XOZ ノ頂點Oヲ中心トシ、單位長ノ線分ヲ
半径トスル圓周ガ首線OXト交ル點ヲN、動徑
OZト交ル點ヲPトシ、且 $MP \perp OX, NT \perp OY$ トス
ルトキ、角 XOZ ヲ θ ト書ケバ

$$\sin\theta = MP, \cos\theta = OM, \tan\theta = NT$$

デアル. 此ノ如ク三角函数ノ値ヲ線分デ表ハ
スコトハ甚ダ便利ナルヲ以テ此ノ如クスルコ
トガ屢アル.

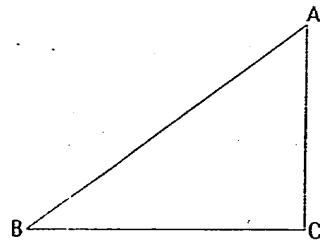
今Cヲ直角トスル

三角形ABCニツイテ

見レバ

$$B = 90^\circ - A, A = 90^\circ - B$$

$$\sin B = \frac{CA}{AB} = \cos A$$



*此ノ如ク單位長1ヲ半径トスル圓ヲ單位圓ト云フ.

$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - B) = \sin B$$

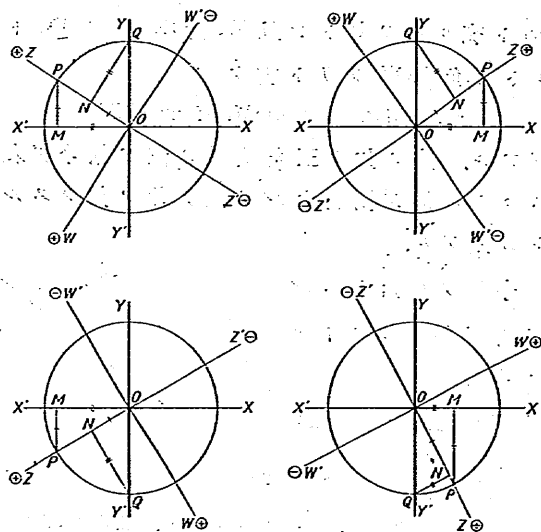
ナルコトガ知ラレル。從ツテ θ ラ 90° 以下ノ
正角トスルトキハ

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \dots (4)$$

從ツテ (2) ナル關係ニヨレバ

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta \dots (5)$$

然ルニ此ノ如キ關係ハ角 θ ノ如何ニ拘ラズ一
般ニ成立スルコトガ次ノ如クシテ知ラレル。



角 XOZ ラ θ トスルトキ, O ニ於テ ZZ' ト直交ス
ル直線 WW' ラ圖ノ如ク引ケ, 然ルトキ ZZ' , YY'
ガ單位圓ト交ル點ヲ夫夫 P, Q , 又 P, Q ヨリ夫夫
 XX' , ZZ' ニ下ス垂線ヲ PM, QN トスレバ $90^\circ - \theta$
ハ OZ ラ首線, OQ ラ動徑トスル角 ZOY デ表ハ
サレル。而シテ今 XX' , YY' ヲ舊座標軸, ZZ' ,
 WW' ヲ新座標軸ト呼ブトニスレバ θ ガ如何
ナル象限ノ角デアツテモ舊座標軸ニ關スル
 OM, MP ハ夫夫新座標軸ニ關スル NQ, ON ニ等
シイ。然ルニ

$$OM = \cos \theta, \quad MP = \sin \theta$$

$$NQ = \sin(90^\circ - \theta), \quad ON = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

即チ公式 (4) ガ成立スル。從ツテ (5) モ成立スル。

例 次ノ公式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \dots (6)$$

$$\text{解 } \sin(90^\circ + \theta) = \sin\{90^\circ - (-\theta)\} = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \cos\{90^\circ - (-\theta)\} = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

類題 (1) 次ノ各公式ヲ證明セヨ。

$$\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta, \quad \cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \dots (7)$$

$$\tan(\theta - 90^\circ) = -\cot\theta, \quad \tan(\theta + 90^\circ) = -\cot\theta.$$

(2) 次ノ各公式ヲ證明セヨ.

$$^*\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta, \quad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta, \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$$

(3) 次ノ各公式ヲ證明セヨ.

$$\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin\theta, \quad \cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos\theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = -\sin\theta, \quad \cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \cos\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

例 題

1. 次ノ各三角函数ヲ 45° 以下ノ正角ノ三角函数デ表ハセ.

$$\sin 72^\circ, \quad \cos(-135^\circ), \quad \tan 75^\circ$$

2. 表ヲ用ヒズニ $120^\circ, 135^\circ$ ノ正弦及ビ餘弦ノ値ヲ求メヨ.

3. 次ノ各値ヲ求メヨ.

$$\sin 855^\circ, \quad \cos(-1054^\circ), \quad \tan 1200^\circ$$

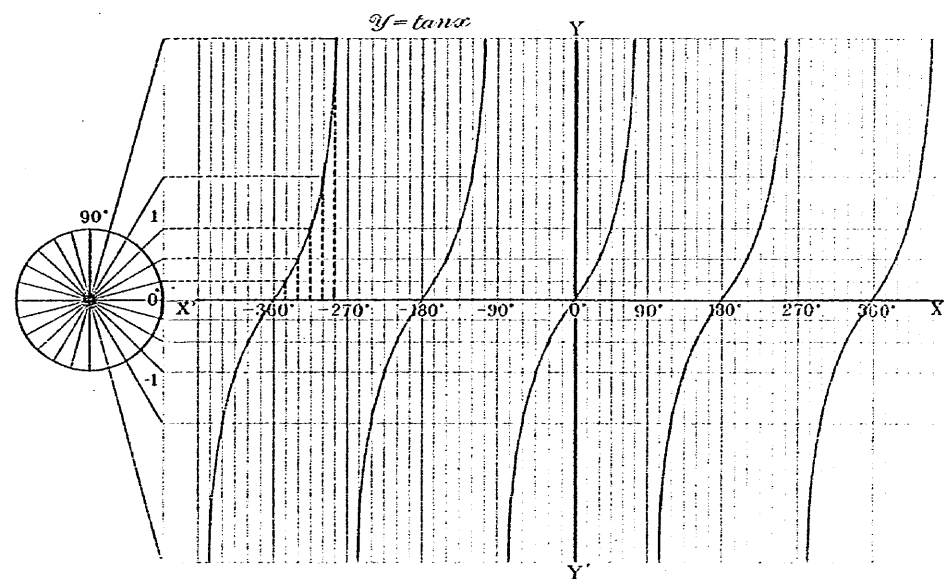
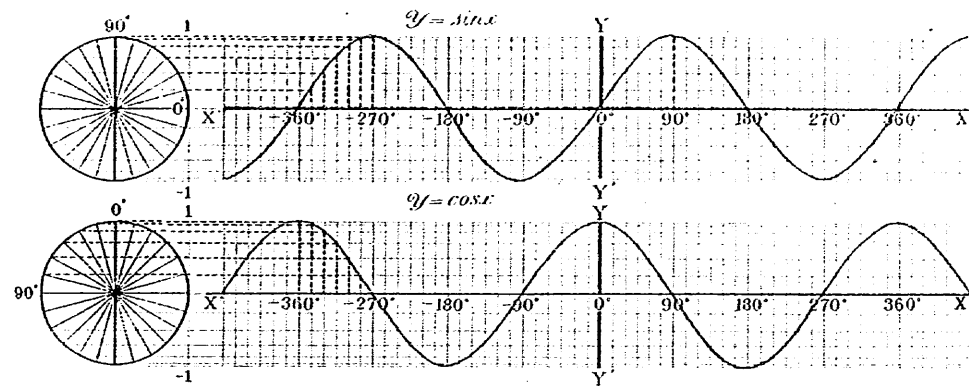
次式ノ値ヲ求メヨ (4-5).

$$4. \quad 2\cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3\sin 120^\circ \tan 135^\circ$$

$$5. \quad \frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A \cos 0^\circ}{\sin(90^\circ + A)}$$

8. 三角函数のぐらふ 前節ニヨレバ總テ

*一般ニ角 α, β = 於テ $\alpha + \beta = 180^\circ$ ナルトキ α, β ハ互ニ他ノ補角ナリト云フ.



ノ角ノ三角函数ノ値ハ 45° 以下ノ正角ノ三角函数ノ値ヲ用ヒテ表ハスコトガ出来ル。ソシテ又次表ノ如キ結果ガ知ラレル。

角 度	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\sin$	0	$\nearrow \frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	1	$\searrow \frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	0	$\searrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	-1	$\nearrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	0
$\cos$	1	$\searrow \frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	0	$\searrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	-1	$\nearrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	0	$\nearrow \frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	1
$\tan$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow -1 \nearrow$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	∞	$-\infty$

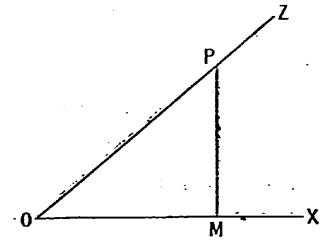
今單位圓ヲ用ヒルコトニヨツテ 90° 以下ノ正角ノ正弦、餘弦及ビ正切ノ値ヲ求メ、ソレ等ニ基ヅイテ夫夫ノぐらふヲ描ケバ別紙ノ如キモノガ得ラレル。之ヲ夫夫正弦曲線、餘弦曲線及ビ正切曲線ト云フ。

9. 平方關係 角 XOZ ヲ θ ト書ケバ三角函数ノ定義ニヨツテ

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP}, \quad \cos \theta = \frac{OM}{OP}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= \frac{MP^2 + OM^2}{OP^2} \end{aligned}$$

然ルニピタゴラスノ



定理 = 従へば $MP^2 + OM^2 = OP^2$ ナルヲ以テ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (12)$$

此ノ兩邊ヲ $\cos^2\theta$ 又ハ $\sin^2\theta$ デ割レバ

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \quad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta \quad (13)$$

例 1. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ナルトキ $\tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

但 θ ハ 90° 以下ノ正角トスル.

解 θ ハ 90° 以下ノ正角ナル故總テノ三角函数ハ正ナル. 而シテ (12) ニヨレバ

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}$$

答 $\frac{4}{3}$

類題 $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ナルトキ $\tan\theta$ 及ビ $\cot\theta$ ノ値ヲ求メヨ. $0 < \theta < 90^\circ$

例 2. $\tan\theta = a$ ナルトキ $\sin\theta$ ノ値ヲ a デ表ハ

セ. 但 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$

解 (13) ニヨリ

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + a^2$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{1+a^2}$$

次ニ (12) ニヨリ

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\text{答 } \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$$

注意 θ ハ第二象限ノ角ナル故 $\tan\theta$ ハ負デアル. 従ツテ a ハ負デアル. 然ルニ $\sin\theta$ ハ正デナクテハナラヌカラ答數ハ上ノ如クセネバナラス. 然シ若シ

$0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ナラバ $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ トスル.

類題 (1) 例 2 ニ於テ $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ トスレバ如何.

(2) $\tan\theta = \frac{8}{15}$ ナルトキ $\cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ. 但 θ ハ第三象限ノ角トスル.

例題

1. 如何ナル角 θ ニ對シテモ $\sin^2\theta \leq 1$ ナルコトヲ示セ.

2. 任意ノ角 θ ニ對シ方程式 $x^2 + x\cos\theta + 1 = 0$ ハ虚根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

3. 方程式 $x^2 - 2x\sin\theta + 1 = 0$ ガ等根ヲ有スルトキ角 θ ヲ求メヨ. 但 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

4. $1 - \cos\theta$ ノ變化ヲ調べ、且其ノ最大最小ヲ求メヨ.

5. $\sec\theta = -\frac{25}{7}$ ナルトキ $\cot\theta$ ヲ求メヨ.

但 $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ トスル.

次ノ等式ヲ證明セヨ. (6-8)

$$\begin{aligned} 6. \sin^4 A - \cos^4 A &= \sin^2 A - \cos^2 A \\ &= 2\sin^2 A - 1 = 1 - 2\cos^2 A \end{aligned}$$

$$7. \frac{\sec\theta}{\cos\theta} - \frac{\tan\theta}{\cot\theta} = 1$$

$$8. \tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

雑題 一

1. $\sin\theta = \frac{3}{7}$ ナル角 θ ナ作圖セヨ。但 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
2. $\tan\theta = \frac{5}{3}$ ナル角 θ ナ作圖セヨ。但 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
3. $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ナルトキ θ ノ變化ニ伴ナフ $\cot\theta$ ノ値ノ變化ヲ研究セヨ。
4. $\sin 60^\circ \cos 135^\circ - \tan 225^\circ \cos 300^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。
5. $4\sin^2 x = 1$ ニ適スル角 x ナ求メヨ。但 x ハ 360° 以下ノ正角トスル。
6. $\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta)$, $\sec(270^\circ + \theta)$, $\cot(540^\circ - \theta)$ ナ角 θ ノ三角函数デ表ハセ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。(7—15)

$$7. \sec\theta = \frac{1}{\sin\theta \cot\theta}$$

$$8. (\sin\Lambda + \cos\Lambda)^2 + (\sin\Lambda - \cos\Lambda)^2 = 2.$$

$$9. \frac{1}{\operatorname{cosec}\Lambda - \cot\Lambda} - \frac{1}{\sin\Lambda} = \frac{1}{\sin\Lambda} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\Lambda + \cot\Lambda}$$

$$10. \sin^4\Lambda + \cos^4\Lambda = 1 - 2\sin^2\Lambda\cos^2\Lambda$$

$$11. \frac{\operatorname{cosec}\Lambda - \cot\Lambda}{\sec\Lambda + \tan\Lambda} = \frac{\sec\Lambda - \tan\Lambda}{\operatorname{cosec}\Lambda + \cot\Lambda}$$

$$12. \tan^2\Lambda - \sin^2\Lambda = \tan^2\Lambda\sin^2\Lambda$$

$$13. \frac{1}{1+\cos\Lambda} + \frac{1}{1-\cos\Lambda} = 2(1+\cot^2\Lambda)$$

$$14. \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$15. (2-\cos^2\Lambda)(1+2\cot^2\Lambda) = (2+\cot^2\Lambda)(2-\sin^2\Lambda)$$

$$16. \cos\Lambda = \cos x \sin C, \cos B = \sin x \sin C \text{ ナルトキハ } \sin^2\Lambda + \sin^2B + \sin^2C = 2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

$$17. \sin\Lambda + \cos\Lambda = a, \sin\Lambda - \cos\Lambda = b \text{ ナルトキハ } a^2 + b^2 = 2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

18. 次ノ^{*}三角方程式ヲ解ケ。

$$(1) \tan x + \cot x = 2 \quad 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

$$(2) 3\sin x = 2\cos^2 x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(3) 2\cos x + 2\sqrt{2} = 3\sec x \quad 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

19. $\sin\theta + \cos\theta$ ナ最大ナラシムル正ノ最小角 θ ナ求メヨ。

20. $\sec x = m$ ナルトキ $\cot x$ ナ求メヨ。但 $180^\circ \leq x \leq 270^\circ$ トスル。

次式ヲ證明セヨ。(21—22)

$$21. \tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) = 1$$

$$22. \sin^2(\Lambda + 45^\circ) + \sin^2(\Lambda - 45^\circ) = 1$$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。(23—24)

^{*}未知角ニ關スル三角函数ヲ含ム方程式ヲ三角方程式ト云フ。

$$23. \cos A + \sin(270^\circ + A) + \sin(A - 270^\circ) + \cos(A + 180^\circ)$$

$$24. \frac{\sin(180^\circ - \theta) \cos(90^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta) \sin(90^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)}$$

$$25. 0^\circ < A < 90^\circ < B < 180^\circ, A+B > 180^\circ \text{ ナルトキハ } \sin A > \sin B \text{ ナルコトヲ証明セヨ.}$$

第二章 加法及び減法定理

10. 加法の定理 A, B を任意の二角とすれば次の公式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

之ヲ夫夫正弦及び餘弦ノ加法定理ト云フ.

證明 先ヅ A, B ハ其ノ和ガ 90° ヨリモ小ナル正角トスレバ角

XOY, YOZ ヲ夫夫

A, B トスルトキ角

XOZ ハ $A+B$ ヲ表

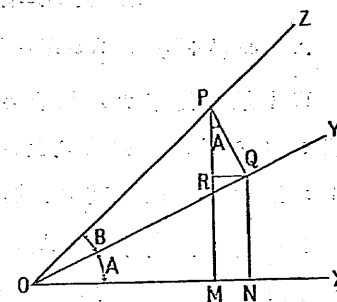
ハス. 今 OZ 上ノ

任意ノ一點 P ヨリ

OX, OY = 夫夫垂線

PM, PQ ヲ下シ, 又 Q ヨリ OX, PM = 夫夫垂線

QN, QR ヲ下セバ角 RPQ ハ A = 等シク



$$\sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

次 = 前頁ノ圖ニ於テ

$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{RQ}{PQ} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

以上最も簡単ナル場合ニ於ケル公式(14)ヲ證明シタノデアアルガ、此ノ公式ハ A, B ノ如何ニ關セズ正シイ。然シ其ノ證明ハココニ略ス。

11. 減法の定理 A, B を任意の二角とすれば次の公式が成立する:

$$\left. \begin{aligned} \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

之ヲ夫夫正弦及ビ餘弦ノ減法定理ト云フ。

證明 今 $90^\circ > A > B > 0^\circ$ トスレバ前節ノ如ク圖

ヲ作ルトキ角 XOZ ハ

A-B ヲ表ハシ

$$\sin(A-B) = \frac{MP}{OP}$$

$$= \frac{MR-RP}{OP} = \frac{NQ}{OP} - \frac{RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

同様ニシテ

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

例 $\sin 75^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

$$\text{解 } \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{答 } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

類題 次ノ各値ヲ求メヨ。(1-3)

$$(1) \sin 15^\circ \quad (2) \cos 15^\circ \quad (3) \tan 75^\circ$$

$$(4) A, B \text{ ハ共 } = 90^\circ \text{ 以下ノ正角デ } \sin A = \frac{1}{3}, \cos B = \frac{1}{2}$$

ナルトキ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ。

$$(5) 90^\circ \leq A \leq 180^\circ, 0^\circ \leq B \leq 90^\circ \text{ ナルトキ } \sin A = \frac{12}{13},$$

$\cos B = \frac{4}{5}$ ナラバ $\cos(A+B)$ 及ビ $\sin(A-B)$ ノ値ハ夫夫何程カ。

(6) 公式(14)及ビ(15)ヲ用ヒテ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left. \begin{aligned} \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (\text{正切ノ加法定理}) \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \quad (\text{正切ノ減法定理}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

(7) 次ニ示ス各公式ヲ證明セヨ。

$$\left. \begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned} \right\} (\text{二倍角ノ公式}) \dots\dots (17)$$

(8) 次ノ各公式ヲ證明セヨ。

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \end{aligned} \right\} (\text{半角ノ公式}) \dots\dots (18)$$

但複符號ハ角 $\frac{A}{2}$ ノアル象限ニヨツテ定メラルベキモノデアル。

例題

1. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

2. $\cos 75^\circ \cos 165^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

次式ヲ證明セヨ。(3-16)

$$3. \tan(45^\circ \pm \theta) = \frac{1 \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \theta} \quad 4. \cot(\Lambda \pm B) = \frac{\cot \Lambda \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot \Lambda}$$

$$5. \sin \Lambda = 2 \sin \frac{\Lambda}{2} \cos \frac{\Lambda}{2}$$

$$6. \cos \Lambda = \cos^2 \frac{\Lambda}{2} - \sin^2 \frac{\Lambda}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} = 2 \cos^2 \frac{\Lambda}{2} - 1$$

$$7. (\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm \sin 2\theta$$

$$8. \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$$

$$9. \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x$$

$$10. \sin 3\Lambda = 3 \sin \Lambda - 4 \sin^3 \Lambda$$

$$11. \sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$

$$12. \cos 3\Lambda = 4 \cos^3 \Lambda - 3 \cos \Lambda$$

$$13. \cos^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \cos \theta + \cos 3\theta)$$

$$14. \tan 3\Lambda = \frac{3 \tan \Lambda - \tan^3 \Lambda}{1 - 3 \tan^2 \Lambda}$$

$$15. \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad 16. \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

17. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正十邊形ノ一邊ノ長

サテ計算セヨ。

18. 半角ノ公式ニヨリ $\sin 22^\circ 30'$ 及 $\cos 22^\circ 30'$ ノ値ヲ求メヨ。

次ノ各式ヲ證明セヨ。(19—20)

$$19. \tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

$$20. \frac{1 \pm \sin A}{1 \mp \sin A} = \tan^2 \left(45^\circ \pm \frac{A}{2} \right)$$

$$21. \tan \frac{A}{2} = m \text{ ナルヲ知ツテ } \sin A \text{ 及 } \cos A \text{ ヲ求メヨ。}$$

$$22. \sin A : \sin \frac{A}{2} = 8 : 5 \text{ ナルトキ } \cos A \text{ ノ値ヲ求メヨ。}$$

12. 乗積の公式 公式(14)及ビ(15)ノ邊々ヲ相加ヘ又ハ相減ズルコトニヨツテ次ノ關係ガ得ラレル。

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2\sin A \cos B \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2\cos A \sin B \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2\cos A \cos B \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2\sin A \sin B \end{aligned} \right\} (19)$$

上ノ式ニ於テ $A+B=C$, $A-B=D$ ト置ケバ

$$A = \frac{C+D}{2}, \quad B = \frac{C-D}{2}$$

ナルヲ以テ此ノ公式ハ又次ノ如クニモ書ケル。

$$\left. \begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \cos C - \cos D &= -2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

以上ノ公式(19)及ビ(20)ハ正弦及ビ餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ直シ、或ハ積ヲ和又ハ差ノ形ニ直ストキニ用ヒラレルモノデアル。

例 1. $\sin 3\theta + \sin 5\theta$ ヲ積ノ形ニ直セ。

$$\begin{aligned} \text{解 } \sin 3\theta + \sin 5\theta &= 2\sin \frac{3\theta+5\theta}{2} \cos \frac{5\theta-3\theta}{2} \\ &= 2\sin 4\theta \cos \theta \quad \text{答 } 2\sin 4\theta \cos \theta \end{aligned}$$

類題 (1) $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ$ ヲ簡單ニセヨ。

(2) $\cos 100^\circ - \cos 80^\circ$ ヲ簡單ニセヨ。

(3) $\sin 50^\circ + \cos 50^\circ$ ヲ簡單ニセヨ。

例 2. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{公式(19)ヲ用ヒテ} \\ \cos 75^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \cos(75^\circ+15^\circ) + \cos(75^\circ-15^\circ) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos 90^\circ + \cos 60^\circ \} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{答 } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

類題 $\sin 75^\circ \cos 15^\circ \cos 30^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

例 題

1. 次式ヲ簡單ニセヨ.

(1) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

(2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$

2. $\sin x \sin(90^\circ - x) = \frac{1}{2}$ ナルトキ角 x ヲ求メヨ. 但
 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ トスル.

次式ヲ證明セヨ. (3-4)

3. $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$

4. $\sin \frac{3A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} (\sin 2A + \sin A)$

5. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

雑 題 二

次ノ各等式ヲ證明セヨ. (1-5)

1. $\cos A + \sin B = 2 \sin \left(45^\circ - \frac{A-B}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{A+B}{2} \right)$

2. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x+45^\circ) = \sqrt{2} \cos(x-45^\circ)$

3. $\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

4. $\cos(A+B) \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

5. $\sin(45^\circ - \theta) \sin(45^\circ + \theta) = \frac{1}{2} \cos 2\theta$

6. $A+B=45^\circ$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

次ノ各等式ヲ證明セヨ. (7-9)

7. $\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A$

$$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$$

8. $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C$

$$- \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B$$

9. $\tan(A+B+C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan C \tan A - \tan B \tan C}$$

10. $A+B+C=180^\circ$ ノトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

11. 次式ヲ證明セヨ.

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$$

$$= 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}$$

12. $x =$ 關スル方程式 $x^2 - 2x \cot \theta - 1 = 0$ ノ根ヲ求メヨ.

13. 方程式 $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 1 = 0$ ノ根ガ $\tan A, \tan B$
 ナルトキ $\tan(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

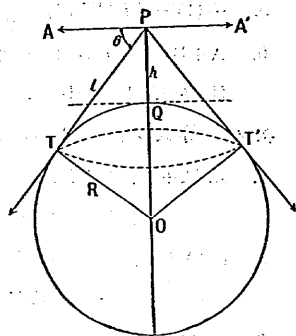
14. 地球ヲ完全ナル球ト假定スルトキ $PQ(\lambda)$ ヲ眼高
 トスレバ切線 $PT(\theta)$ ヲ視界半径水平線 AP ト PT トノ
 ナス角 $\angle APT(\theta)$ ヲ地平俯角ト云フ. 然ルトキ次ノ關係

$$R = \frac{h \cos \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad h = l \tan \frac{\theta}{2}$$

小ナルモノトシテ

$$l \approx \sqrt{2R\hbar}$$

ナルコトヲ證明セヨ.



第三章 三角形の解法

13. 三角形の原素 總て三角形は三つの角と三つの邊とより成る、之等を三角形の原素と云ふ。

三角形ノ原素間ニハ種々ナル相互關係ガアル。今角 A, B, C ノ對邊ヲ夫夫 a, b, c トスレバ

$$A+B+C=180^\circ, \quad a+b>c, \quad a \sim b < c$$

ノ如キハ其ノ最モ簡單ナル例デアル。本章ニ
於テハ三角函數ヲ用フルコトニヨツテ原素間
ニ成立スル或等式關係ヲ研究セントスルモノ
デアル。

例 三角形 ABC = 於テ $\sin A = \sin(B+C)$ ナルコトヲ證明セヨ.

解 $A+B+C=180^\circ$ ナルヲ以テ

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

$$\therefore \sin A = \sin \{180^\circ - (B + C)\} = \sin(B + C)$$

類題 $\triangle ABC$ 二於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。(1—4)

$$(1) \cos A = -\cos(B+C) \quad (2) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$$

$$(3) \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$$

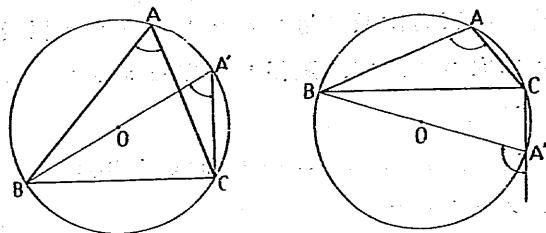
$$(4) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

(5) $C=90^\circ$ ナルトキハ $\sin 2A = \sin 2B$ ナルコトヲ證明セヨ.

14. 正弦法則 三角形 ABC に於ては次の公式が成立つ.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (正弦法則)} \dots\dots (21)$$

證明 三角形 ABC ノ外接圓 O ヲ畫キ其ノ半徑ヲ R トセヨ.



今 B ヲ通ル直径ヲ BA' トスレバ

$$A' = A \text{ 又ハ } A' = 180^\circ - A$$

$$\therefore \sin A' = \sin A$$

然ルニ直角三角形 A'BC に於テ $BC = A'B \sin A'$ ナルヲ以テ $a = 2R \sin A$ トナル.

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様ニシテ $\frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R$ ラ得ル.

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

注意 上ノ證明デハ $\triangle ABC$ ヲ直角三角形トセズ一般的ニ考ヘタモノデアルガ ABC ガ直角三角形ノトキニモ上ノ公式ハ成立スル.

例 三角形 ABC に於テハ $a \sin B = b \sin A$ ナルコトヲ證明セヨ.

解 公式 (21) ニヨツテ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \therefore a \sin B = b \sin A$$

類題 $\triangle ABC$ に於テ次ノ關係ヲ證明セヨ.

$$(1) b \sin B - c \sin C = a \sin(B - C)$$

$$(2) \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 0 \text{ ナルトキハ } C = 90^\circ$$

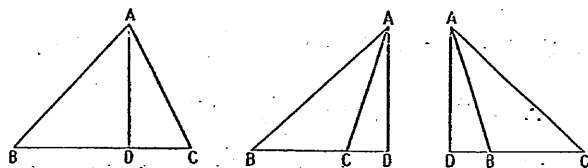
$$(3) \sin A + \sin C > \sin B$$

$$(4) C = 2B \text{ ナルトキハ } c^2 - b^2 = ab$$

15. 餘弦法則 三角形 ABC に於ては次の公式が成立する.

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases} \text{ (第一餘弦法則)} \dots\dots (22)$$

証明 頂点 A カラ 邊 BC = 垂線 AD ヲ下セバ



$$BC = AB \cos B + AC \cos C$$

$$\therefore a = c \cos B + b \cos C = b \cos C + c \cos B$$

同様ニシテ他ノ二式モ証明サレル。

公式(22)ノ第一,第二,第三ノ兩邊ニ夫夫 $a, -b, -c$ ヲ掛ケテ邊々相加ヘレバ

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

此ノ如クシテ次ノ公式ガ得ラレル。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (\text{第二餘弦法則}) \dots (23)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

例 $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = 3 + \sqrt{3}$ ノトキ A, B, C ヲ求メヨ。

解 公式(23)ニヨリ

$$\cos A = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times (3 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\cos B = \frac{(3 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{6} \times (3 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

從ツテ $A = 30^\circ, B = 45^\circ$ ヲ得ル。

$$\therefore C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

答 $A = 30^\circ, B = 45^\circ, C = 105^\circ$

類題 $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。(1—2)

$$(1) a + b + c = (b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C$$

$$(2) b \cos A - a \cos B = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

$$(3) a : b : c = 2 : 3 : 4 \text{ ノトキ } \cos A, \cos B, \cos C \text{ ヲ求メヨ。}$$

$$(4) \text{一角ガ } 60^\circ \text{ デ二邊ガ夫夫 } 4\text{cm}, 3\text{cm} \text{ ナル平行四邊形ノ兩對角線ノ長ヲ求メヨ。}$$

16. 二邊の和と差との比 三角形 ABC に於ては次の公式が成立する。

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}} \quad (\text{正切法則}) \dots (24)$$

証明 正弦法則ニヨレバ

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

上ノ公式ハ又次ノ如クニモサレル。

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \quad (25)$$

例 $\cos \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{c} \sin \frac{C}{2}$ ヲ證明セヨ。

解 正弦法則ニヨリ

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\therefore \cos \frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{c} \sin \frac{C}{2}$$

類題 $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{c} \cos \frac{C}{2}$$

17. 半角の正弦餘弦及び正切 公式(23)ニヨ
レバ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 - \cos A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \end{aligned}$$

從ツテ今 $a+b+c=2p$ トスレバ

$$a+b-c=2(p-c), \quad a-b+c=2(p-b)$$

$$\therefore 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

此ノ如クシテ次ノ公式ガ得ラレル。

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

又公式(23)ヲ用ヒ $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$ ニヨリ

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(26), (27) を用ヒテ邊々ノ割算ヲ行ヘバ

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

例 $c \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = (p-b) \cos \frac{C}{2}$ ヲ證明セヨ.

解 公式 (26), (27) ニヨリ

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{p-b}{c} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{p-b}{c} \cos \frac{C}{2}$$

$$\therefore c \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = (p-b) \cos \frac{C}{2}$$

類題 次ノ各等式ヲ證明セヨ.

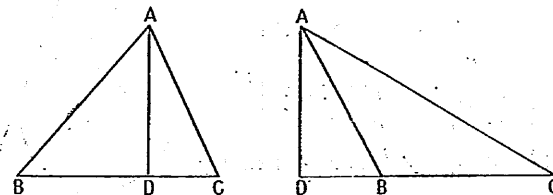
$$(1) a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = p$$

$$(2) \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$(3) (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}$$

18. 三角形の面積 三角形 ABC ノ面積ヲ S,
A カラ BC ヘノ垂線ヲ AD トスレバ角 B ノ大
サ如何ニ拘ラズ

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} ac \cdot \frac{2}{ac} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$



依ツテ次ノ公式ヲ得ル.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \dots\dots\dots (29)$$

(Heron) ノ 公式

例 三邊ガ夫夫 4cm, 5cm, 7cm ナル三角形ノ
面積ヲ求メヨ.

解 今 cm ヲ長サノ單位ニトシテ $p = \frac{1}{2}(4+5+7) = 8$
ナルヲ以テ

$$p-a=4, \quad p-b=3, \quad p-c=1$$

$$\therefore S = \sqrt{8 \times 4 \times 3 \times 1} = 4\sqrt{6} \quad \text{答 } 4\sqrt{6} \text{ 平方根}$$

類題 (1) 三邊ガ夫夫 26m, 35m, 51m ナル三角形
ノ面積ヲ求メヨ.

$$(2) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} \text{ ヲ證明セヨ.}$$

(3) 三角形 ABC ノ内接圓ノ半径ヲ r, 角 A 内ノ傍

接圓ノ半徑ヲ r' トスルとき次ノ

公式ヲ證明セヨ.

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2}, \quad r' = p \tan \frac{A}{2} \dots (30)$$

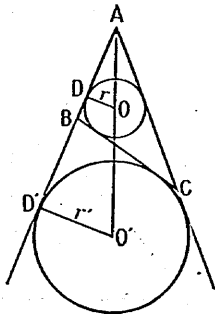
$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ r' &= \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \end{aligned} \right\} (31)$$

(4) $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑ヲ

R トスレバ

$$S = \frac{abc}{4R}$$

ナルコトヲ證明セヨ.



例題

1. 三邊ガ夫夫 13, 14, 15 ナル三角形ノ内接圓及ビ三ツノ傍接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

2. 三角形ノ面積ガ 96 デ三ツノ傍接圓ノ半徑ガ夫夫 8, 12, 24 ノとき三邊ノ長サヲ求メヨ.

三角形 ABC = 於テ次ノ關係ヲ證明セヨ. (3-5)

3. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$

4. $a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$

5. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, 但 S ハ面積, R ハ外接圓ノ半徑.

6. $\cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C}$ ナルトキハ $b = c$ ナルコトヲ證明セヨ.

7. 三角形 ABC = 於テ $B=2A$ ナルトキハ $b=2a \cos A$ ナルコトヲ證明セヨ.

8. a, b, c ガ等差級数ヲナスときハ $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ モ亦等差級数ヲナス. 逆ハ如何.

9. $\triangle ABC$ ノ中線 AD ノ長サハ $\frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. $\triangle ABC$ ノ角 A ノ二等分線ノ長サヲ d トスレバ $d = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$ ナルコトヲ證セ.

11. 四邊形ノ兩對角線ヲ m, m' トシ, 其ノ夾角ヲ θ トスレバ面積ハ $\frac{1}{2} mm' \sin \theta$ ナルコトヲ證明セヨ.

12. $\triangle ABC$ = 於テ $a:b:c = 2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$ ナルトキ A, B, C ヲ求メヨ.

13. $a \cos A = b \cos B$ ノとき ABC ハ直角三角形ナルカ, 又ハ二等邊三角形ナルコトヲ證セ.

19. 對數表 三角函數ノ對數ヲ求メルニハ先ヅ眞數表ニヨツテ三角函數ノ値ヲ見出し, 後數ノ對數表ニヨツテ計算スレバヨイコトニナルガ常ニ此ノ如クスルノハ實用上不便デアル. 故ニ通常三角函數ノ對數ヲ表ニシタモノ即チ三角函數の對數表ヲ用ヒル.

本書附表ノ三角函數ノ對數表ハ $10'$ 飛ビノ四

注意 比例部分表ニヨツテ 15ニ對スル角ヲ求メル
ニハ先ヅ差 32ノ欄ニ於テ 15ニ最
モ近キ 12.8ニ對應スル 4ヲ求メ
ル。

$$\begin{array}{r} 15 \\ 12.8 \cdots \cdots 4 \\ \hline 22 \end{array}$$

次ニ残り 22ニ最モ近キ 19.2ニ對
應スル 6ヲ求メル。

$$\begin{array}{r} 22 \\ 19.2 \cdots \cdots 0.6 \\ \hline 28 \\ 25.6 \cdots \cdots 0.08 \end{array}$$

次ニ残り 28ニ最モ近キ 25.6ニ對
應スル 8ヲ求メ以テ、4'68トスル。

類題 次ノ式カラ 90°以下ノ正角ヲ求メヨ。

- (1) $\log \sin x = \bar{1}.9876$ (2) $\log \cos x = \bar{1}.4890$
(3) $\log \tan x = \bar{1}.7684$ (4) $\log \cot x = \bar{1}.6747$

例 題

1. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ ヲ知ツテ $\log \sin 60^\circ$ ヲ求メ
ヨ。
2. $\log \cos x - \log \cos 76^\circ 40' = \log \sin 68^\circ 30'$ ニ適スル 90°以下
ノ正角 x ヲ求メヨ。

	32	33
1	3.2	
2	6.4	
3	9.6	
4	12.8	
5	16.0	
6	19.2	
7	22.4	
8	25.6	
9	28.8	

15	
12.8	4'
22	
19.2	6
28	
25.6	8

3. $4\sin^2 x + 5\sin x - 6 = 0$ ニ適スル 90°以下ノ正角 x ヲ
求メヨ。

4. $\frac{b}{a} = \tan \theta$ トシテ

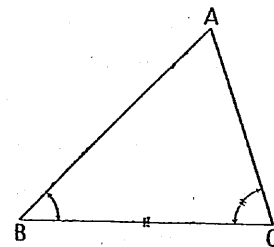
- (1) $a+b$ ヲ對數計算ニ便利ノ形ニセヨ。
(2) $\frac{a-b}{a+b}$ ヲ對數計算ニ便利ノ形ニセヨ。

20. 三角形の解法 三角形ニ於テハ六ツノ
原素ノ内何レカ三ツノ原素(共ニ角ナル場合ヲ
除ク)ヲ知レバ他ノ三ツノ原素モ定マル。而シ
テ三ツノ原素ヲ知ツテ他ノ三ツノ原素ヲ求メ
ルコトヲ其ノ三角形ヲ解クト云フ。

三角形ノ解法ヲ大別シテ次ノ四通リトスル。

- i) 一邊ト二角トヲ知ル場合。
ii) 二邊ト其ノ夾角トヲ知ル場合。
iii) 三邊ヲ知ル場合。
iv) 二邊ト其ノ一邊
ノ對角トヲ知ル場合。

第1 一邊ト二角ト
ヲ知ル場合 例ヘバ B,
C 及ビ a ヲ知ルモノト
スル。此ノ場合ハ次ノ



如クシテ解ケル.

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

例 $a = 142m$, $B = 63^\circ 25'$, $C = 48^\circ 42'$ トシテ此ノ三角形ヲ解ケ.

$$\text{解 } A = 180^\circ - (63^\circ 25' + 48^\circ 42') = 67^\circ 53'$$

b, c ヲ求メルタメ對數計算ヲ行ヘバ

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log a = 2.1523$$

$$\log \sin A = 1.9669$$

$$\log \sin B = 1.9515$$

$$\log \sin C = 1.8758$$

ナルヲ以テ

$$\log a = 2.1523$$

$$\log a = 2.1523$$

$$\log \sin B = 1.9515$$

$$\log \sin C = 1.8758$$

$$-\log \sin A = 0.0331$$

$$-\log \sin A = 0.0331$$

$$\therefore \log b = 2.1369$$

$$\log c = 2.0612$$

$$\therefore b = 137.1$$

$$\therefore c = 115.1$$

答 $A = 67^\circ 53'$, $b = 137.1m$, $c = 115.1m$

類題 次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ解ケ.

$$(1) \quad a = 234m, \quad B = 40^\circ 53', \quad C = 72^\circ 28'$$

$$(2) \quad A = 32^\circ 47', \quad B = 44^\circ 17', \quad b = 372.7m$$

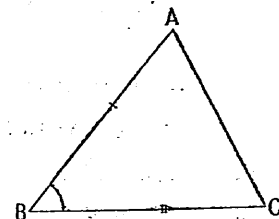
第2 二邊ト其ノ夾角トヲ知ル場合 例へ

バ a, c 及ビ B ヲ知ルト

$$\text{キハ } A + C = 180^\circ - B = \text{ヨ}$$

ツテ $A + C$ ヲ求メ次ニ

$$\tan \frac{A - C}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cot \frac{B}{2}$$



カラ $A - C$ ヲ求メ、上ノ

結果ト組合セテ A, C ヲ定メル. 然ルトキハ以

下第1ノ場合ニヨツテ b ヲ決定スルコト、出
來ル.

例 $a = 175m$, $c = 56m$, $B = 48^\circ$ ナル三角形ヲ解ケ.

$$\text{解 } A + C = 132^\circ, \quad \tan \frac{A - C}{2} = \frac{119}{231} \cot 24^\circ$$

$$\therefore \log \tan \frac{A - C}{2} = \log 119 + \log \cot 24^\circ - \log 231$$

$$\log 119 = 2.0755$$

$$\therefore \frac{A - C}{2} = 49^\circ 9' 36''$$

$$\log \cot 24^\circ = 0.3514$$

$$\therefore A - C = 98^\circ 19' 12''$$

$$-\log 231 = 3.6364$$

$$\therefore A = 115^\circ 9' 41''$$

$$\therefore \log \tan \frac{A - C}{2} = -0.0633$$

$$C = 16^\circ 50' 19''$$

次ニ b ヲ求メル計算ヲ行フ.

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} \quad \therefore \log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$$

$$\log c = 1.7482$$

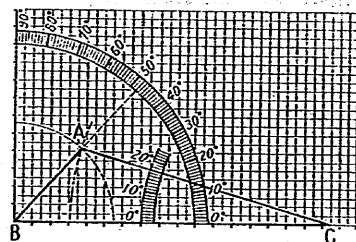
$$\log \sin B = 1.8711$$

$$-\log \sin C = 0.5381$$

$$\therefore \log b = 2.1574 \quad \therefore b = 143.7$$

$$\text{答 } A = 115^\circ 41'', C = 16^\circ 50' 19'', b = 143.7m$$

注意 實用上圖
ノ如ク方眼紙及ビ
分度器ヲ用ヒ縮圖
ヲ畫イテ見テモ解
ノ大體ヲ知ルコト
ガ出來ル。



類題 (1) 上

ノ例ニ於テ b ヲ求メルニハ

$$b = \frac{(a+c) \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}}$$

ナル公式ニヨルコトガ出來ルコトヲ證セ。

次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$(2) b = 674, \quad c = 378, \quad A = 42^\circ 30'$$

$$(3) a = 568, \quad b = 234, \quad C = 38^\circ$$

第3 三邊ヲ知ル場合 此ノトキハ次ノ公
式ニヨルコトガ出來ル。

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

例 $a = 7m, b = 8m, c = 9m$ ナル三角形ヲ解ケ。

$$\text{解 } p = 12, \quad p-a = 5, \quad p-b = 4, \quad p-c = 3$$

$$\therefore r = \sqrt{5}$$

$$\therefore \log \tan \frac{A}{2} = \log \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \log 5 = \bar{1}.6505$$

$$\text{從ツテ } \frac{A}{2} = 24^\circ 5' 34'' \quad \therefore A = 48^\circ 11' 8''$$

$$\text{同様ニシテ } B = 58^\circ 24' 38'', C = 73^\circ 24' 26'' \text{ ヲ得ル。}$$

$$\text{答 } A = 48^\circ 11' 8'', B = 58^\circ 24' 38'', C = 73^\circ 24' 26''$$

注意 上ノ答數ノ和ヲ作レバ $180^\circ 12'$ トナツテ 180°
ヲ超過スルコト $12'$ デアル。此ノ種ノ計算ニヨレバ
多少ノ誤差ヲ生ズルハ止ムナキコトデアル。

類題 次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$(1) a = 109, \quad b = 71, \quad c = 100$$

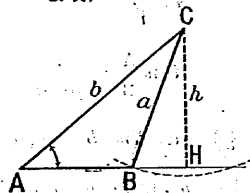
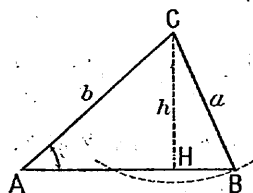
$$(2) a = 39.4, \quad b = 47.3, \quad c = 26.9$$

第4 二邊ト其ノ一邊ノ對角トヲ知ル場合

例ヘバ a, b 及ビ A ヲ知ルモノトスレバ

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

(A < 90° の場合)



カラ B ラ求メ、次ニ

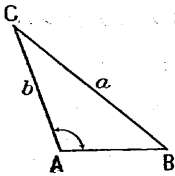
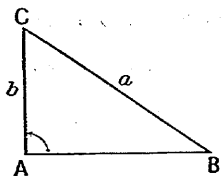
$$C = 180^\circ - (A + B)$$

トシテ、C ラ求メ最後ニ

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

ニヨツテ c ガ定マル。

(A ≥ 90° の場合)



例 B = 30°, b = 50√3, c = 150 ナル三角形ヲ解ケ。

$$\text{解 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore C = 60^\circ \text{ 又ハ } 120^\circ$$

$$\therefore A = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\text{又ハ } A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

C = 60°, A = 90° ナラバ直角三角形デアツテ a = 100√3

(A < 90°)

$$h = b \sin A$$

1. a = h ナラバ解一ツ
2. h < b ≤ a ナラバ解一ツ
3. h < a < b ナラバ解二ツ
- (兩意ノ場合)
4. a < h ナラバ不能

(A ≥ 90°)

1. a > b ナラバ解一ツ
2. a ≤ b ナラバ不能

トナル。又 C = 120°, A = 30° ナラバ二等邊三角形デアツテ a = 50√3 トナル。

答 C = 60°, A = 90°, a = 100√3 ; C = 120°, A = 30°, a = 50√3

類題 a = 250, b = 125, A = 120° ナル三角形ヲ解ケ。

例題

1. 三邊ノ長サガ夫夫 20, 21, 29 ナル三角形ノ最大角ヲ求メヨ。
2. 三邊ノ長サガ夫夫 15, 18, 21 ナル三角形ノ内接圓及ビ外接圓ノ半径ヲ求メヨ。
3. b : c = 2 : √3, B = C + 30° ナル三角形ヲ解ケ。
4. 周圍 a + b + c 及ビ二角 A, B ラ知ツテ三角形ヲ解ク方法ヲ考ヘヨ。

21. 測量上ノ應用 三角形ノ解法ヲ應用シテ距離又ハ高サ等ヲ測定スルコトガ出來ル。

例 1. 平地上ニ直立セル高サ PQ ノ頂 P ラ之ト同一鉛直面内ニ於テ地點 A, B カラ望ミ夫夫仰角 α, β ラ得タト云フ。基線 AB ノ長サヲ a トシテ高サ PQ ラ求メヨ。

解 高サ PQ ラ h トスレバ

$$h = AP \sin \alpha$$

然ルニ $\triangle PAB$ ニ於テ

$$\frac{AP}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{a}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore AP = \frac{a \sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

之ヲ上ノ式ニ代入ス

レバ

$$h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\text{答 } \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

例 2. 平地上ノ一地點 A カラ空中ニアル飛行機 P ヲ望ミ仰角 α ヲ得タ、又之ト同時ニ此ノ平地上ニ一點 B ヲ求メ角 $PAB = \beta$, $AB = a$, 角 $ABP = \gamma$ ナルコトヲ知ツタ。依ツテ飛行機 P ノ高サヲ求メヨ。

解 飛行機ノ高サヲ $PQ(h)$

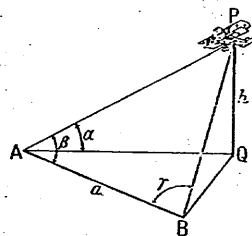
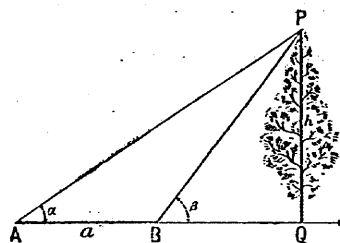
トスレバ $\triangle PAB$ カラ

$$AP = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\therefore h = AP \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\text{答 } \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

例 3. 或湖畔ノ一地點 A カラ對岸ノ一地點



C ニ到ル直線距離ヲ求メルタメ、便宜基線 AB (長サ a) ヲ定メ、角 BAC, ABC ヲ測ツテ夫夫 α, β ヲ得タト云フ。然ラバ距離 AC ハ何程カ。

解 三角形 ABC

ヲ解クコトニヨツ

テ

$$AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{答 } \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



例 4. 何レニモ近ヅキ得ザル二點 C, D 間ノ距離ヲ測ルタメ適當ニ基線 AB (a) ヲ定メ、角 BAC, BAD, ABC, CBD, ABD ヲ測ツテ夫夫 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ ヲ得タト云フ。C, D 間ノ距離ヲ求メヨ。

解 先ヅ三角形

ABC ヲ解イテ

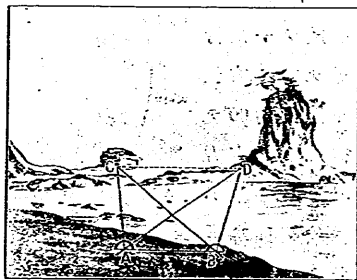
$$BC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

次ニ三角形 ABD ヲ

解イテ

$$BD = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \theta)}$$

最後ニ三角形 CBD ヲ解クコトニヨツテ

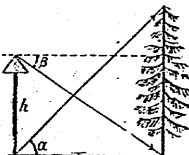


答 * $CD = \frac{(BC+BD)\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{D-C}{2}}$ 但 $D = \angle BDC, C = \angle BCD$

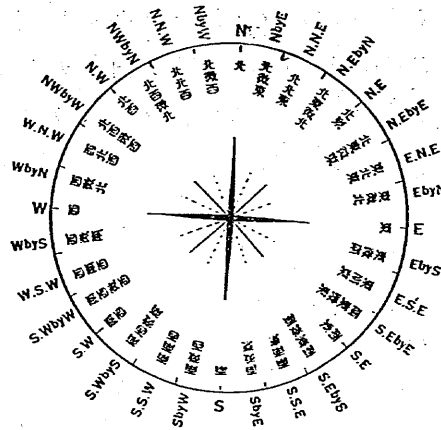
注意 上ノ例ニ於テ直線 AC, AD, AB ガ同一平面上ニアルモノトハ限ラス. BA, BC, BD ニツイテモ同様デアル.

例題

1. 塔ノ基底カラ或樹木ノ頂ノ高度(仰角)ヲ測レバ α デ、又塔ノ頂ニ登ツテ其ノ樹木ノ根元ノ俯角ヲ測レバ β デアルト云フ. 今此ノ塔ノ高サヲ h トスレバ樹木ノ高サハ何程カ.



2. 地點 A ニ於テ飛行船ヲ望ミ、方位正南、仰角 60° ヲ得、又 A ノ東方 3km ノ地點 B ニ於テ同時ニ此ノ飛行船ヲ

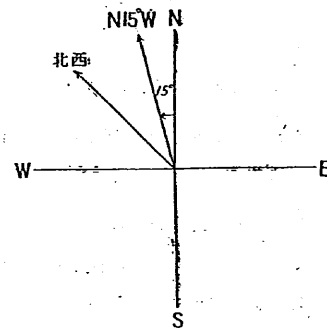


* 第20節第2例題(1)参照

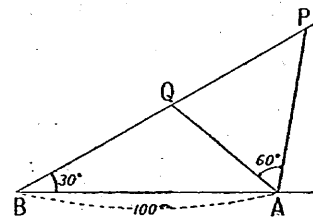
望ミ仰角 30° ヲ得タト云フ. 飛行船ハ地上何程ノ高サニアルカ.

3. 相等シイ高サノ二本ノ煙突ガアル. 今或人其ノ基底ヲ結ブ直線上ノ一點ニ於テ之ニ近イ方ノ煙突ノ頂ノ高度ヲ測ツテ 60° ヲ得、更ニ此ノ點カラ其ノ直線ニ垂直ノ方向ニ 20m 歩ンダ後兩煙突ノ頂ノ高度ヲ測ツテ夫夫 $45^\circ, 30^\circ$ ヲ得タト云フ. 二本ノ煙突ノ高サ及ビ其ノ基底間ノ距離ヲ求メヨ.

4. 南進シツツアル汽船ガ正西ニ二個ノ燈臺ヲ見タ. ソレカラ一時間航行シタ後ニハ一ツハ北西ニ一ツハ $N15^\circ W$ (北 15° 西)ニ見エタト云フ. 兩燈臺ノ距離ヲ 8km トスレバ此ノ汽船ノ速サハ毎時何程カ.



5. 或人ガ直線狀ノ道路ヲ進行中二物體 P, Q ヲ望メバ其ノ最大角ハ 60° デアル、今此ノ位置ヲ A トスルトキ、之ヨリ 100m 歩ンデ B ニ到レバ B, Q, P ガ



一直線上ニ來テ其ノ直線ト道路トハ 30° ノ角ヲナスト云フ. P, Qノ距離ヲ求メヨ.

6. 或地點Aカラ $N\alpha^\circ E$ ノ方向ニアル地點Cニ到ル距離ヲ測ルタメ, Aカラ $N\beta^\circ E$ ノ方向ニ d 米ノ基線ABヲ定メレバ, BカラCノ方位ハ $N\gamma^\circ W$ デアルト云フ. A, Cノ距離ヲ求メヨ.

7. 太陽ノ方位 $S\theta^\circ E$, 仰角 α° ナルトキ平地ニ建テテ東西ニ擴ガル高サ l 米ノ板牆ノ影ノ厚サ如何.

雑題三

1. $\sec A = \frac{17}{15}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{61}{11}$ ノトキ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ. 但 A, B ハ 90° 以下ノ正角トスル.

2. $\tan \alpha = \frac{m}{m+1}$, $\tan \beta = \frac{1}{2m+1}$ ナラバ $\tan(\alpha+\beta) = 1$ ナルコトヲ證明セヨ.

3. $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{1 + \sin 2\theta}$ ナラバ $-45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ ナルコトヲ證明セヨ. 但 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

4. 次ノ方程式カラ θ ヲ消去セヨ.

$$(1) \begin{cases} a \sin \theta + b \cos \theta = m \\ b \tan \theta - a = n \sec \theta \end{cases} \quad (2) \begin{cases} a \sin \theta + b \cos \theta = 1 \\ b \sin \theta + a \cos \theta = \sin 2\theta \end{cases}$$

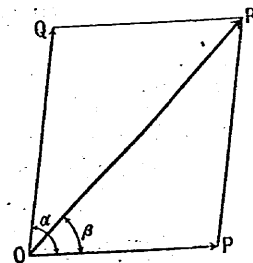
5. $\cos 1\theta - 4\cos 2\theta + 3 = 8\sin^4 \theta$ ヲ證明セヨ.

6. 一點ニ働ク二ツノ力 P, Q ノ作用線ノナス角ヲ α トシ, 其ノ合力ガ P ノ作用線トナス角ヲ β トスレバ

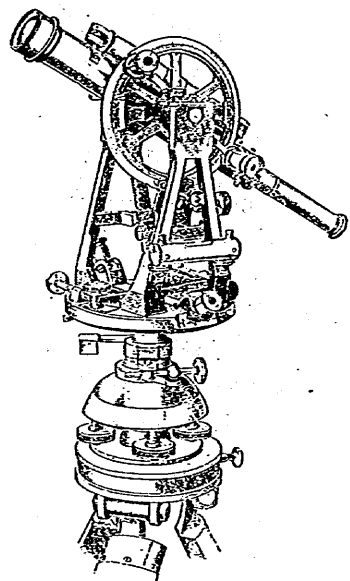
$$\cot \beta = \frac{P}{Q} \operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha$$

ナルコトヲ證明セヨ.

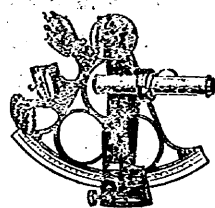
7. $\triangle ABC$ ニ於テ $90^\circ < C$ ナラバ $\tan A \cdot \tan B < 1$ デアル.



測量用具



(経緯儀)



(六分儀)



(測針) (測鎖)

戦争と測量



第十六世紀カラ第十七世紀ニカケテノ歐洲大陸ハ戦争ノ巷デアツタ。此ノ時代ニ於ケル三角法ガ如何ニ利用サレタカハ當時ノ著作物ニヨツテモ知ルコトガ出来ル。

(れおなるとつ！ぶれるノ書(1607年)ニヨル。)

補 充 問 題

I. 第一章ノ分

1. 次式ノ値ヲ求メヨ.

$$(1) \cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{3}{4} \tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$$

$$(2) \frac{\cos 15^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} \quad (3) (\operatorname{cosec} 15^\circ - \cot 45^\circ)^2$$

2. $\tan A = 2 - \sqrt{3}$ ナルトキ $\sin A, \cos A$ ノ値ヲ求メヨ.
但 $0^\circ < A < 90^\circ$

3. $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{5}{4}$ ノトキ, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ノ値如何.

4. 正角 A, B ノ和ガ 90° ヨリモ小ナルトキ, 作圖ニヨリ $\sin A + \sin B > \sin(A+B)$ ナルコトヲ證セヨ.

5. $\cot A = \frac{p}{q}$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{p \cos A - q \sin A}{p \cos A + q \sin A}$$

6. $\cos A = x, \tan A = y$ カラ A ヲ消去セヨ.

7. $\sin A = \sqrt{2} \sin B, \tan A = \sqrt{3} \tan B$ ナルトキ正ノ鋭角 A, B ヲ求メヨ.

8. $\frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} = 2 + \sqrt{3}$ ナルトキ $\cos \theta$ ヲ求メヨ.

9. 頂角 A , 底邊 a ナル二等邊三角形ノ面積ハ

$$\frac{a^2 \cos \frac{A}{2}}{4}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

10. 正 n 邊形ノ一邊ノ長サガ a ナルトキ、此ノ正 n 邊形ノ (1) 内接圓ノ半徑; (2) 面積; (3) 外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

11. A, B ガ正ノ銳角ナラバ

$$(1) \sin A + \cos A > 1 \quad (2) \tan A + \cot A \geq 2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. $\sin \theta + \cos \theta = a$ ナルトキ、 $\sin \theta, \cos \theta$ ノ方程式

$$2x^2 - 2ax + a^2 = 1$$

ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

13. 一直線上ニ 1km ズツ距テテ設ケタ三ツノ觀測所カラ同時ニ或一ツノ飛行機ノ仰角ヲ測リ夫々 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ヲ得タト云フ。此ノ飛行機ノ高サヲ求メヨ。

14. 或港カラ甲船ハ北 30° 西ニ向ヒ、乙船ハ南 60° 西ニ向ツテ夫々一時間ニ 8km 及ビ $8\sqrt{3}\text{km}$ ノ速サデ同時ニ出發シタ。然ラバ一時間後ニ於ケル兩船ノ距離及ビ甲カラ乙ヘノ方向如何。

15. 或煙突ノ基點ト同一水平面上此ノ基點カラ北 60° 東ノ方向ニ 40m 進ンダ地點 A ニ於テ煙突ノ頂ノ仰角ヲ測ラントシタガ障害物ノタメニ之ヲ望ミ得ザリシ故 A カラ正南ニ 60m 進ンダ地點 B ニ於テ其ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タト云フ。此ノ煙突ノ高サヲ求メヨ。

16. 平地上ノ一點ニ於テ半徑 r ナル輕氣球ノ張ル

角ハ a 、仰角ハ β ノトキ球ノ高サ h ハ

$$h = r \sin \beta \operatorname{cosec} \frac{a}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

17. 一直線ヲナス道路上ノ二點 A, B ノ距離 1000m ノトキ、 A カラ道路外ノ一樹木 P ヲ望メバ $\angle PAB = 35^\circ$ 、又 B カラ之ヲ望メバ $\angle PBA = 72^\circ$ デアルト云フ。 P ト道路トノ距離ヲ求メヨ。(眞數表使用)

II. 第二章ノ分

次ノ恒等式ヲ證明セヨ。(18—23)

$$18. \cos(90^\circ - A) - \tan A \sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) = \sin A(1 - \tan A)$$

$$19. \cos \theta (1 + 2 \tan \theta) (\tan \theta + 2) = 2 \sec \theta + 5 \sin \theta$$

$$= \frac{\sin \theta (4 + 5 \sin 2\theta)}{\sin 2\theta}$$

$$20. \sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A$$

$$21. \sec \theta \pm \tan \theta = \tan \left(45^\circ \pm \frac{\theta}{2} \right)$$

$$22. 1 + \tan 65^\circ + \tan 70^\circ = \tan 65^\circ \tan 70^\circ$$

$$23. \cos nA \cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A = 0$$

$$24. \sin x + \sin^2 x = 1 \quad \text{ノトキ} \quad \cos^2 x + \cos^4 x = 1 \quad \text{ノコトヲ證セ。}$$

$$25. \sin A = p, \tan 2A = q \quad \text{ナルトキ} \quad \frac{q^2}{1+q^2} = 4p^2(1-p^2) \quad \text{ナル}$$

コトヲ證明セヨ。

26. $\tan B = \sin A$, $\cos B = \cos A$ ナルトキ, $A - B$ ハ 0 又ハ 360° ノ整数倍ナルコトヲ證明セヨ.

27. 0° カラ 360° マデノ間ニ於テ $2\cos^2\theta - 1$ ノ符號ヲ正ナラシメル θ ノ範圍ヲ定メヨ.

28. $\cos\alpha = \frac{11}{61}$, $\sin\beta = \frac{9}{41}$ ナルトキ $\cos(\alpha - \beta)$ ノ値ヲ求メヨ. 但 α, β ハ第一象限ノ角トスル.

29. 次式ノ値ヲ求メヨ.

$$(1) 8 \sin 20^\circ \sin 40^\circ - 4 \cos 20^\circ$$

$$(2) \frac{\sin(180^\circ + \theta) \tan^2(180^\circ - \theta)}{\cos(270^\circ + \theta)} - \frac{\cos(270^\circ + \theta) \sec^2 \theta}{\cos(270^\circ - \theta)}$$

30. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ正ノ銳角デ,

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{1}{5}, \tan \gamma = \frac{1}{7}, \tan \delta = \frac{1}{8}$$

ノトキハ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 45^\circ$ ナルコトヲ證明セヨ.

31. $\alpha = \frac{180^\circ}{17}$ ナルトキ $\frac{\cos \alpha \cos 13\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = -\frac{1}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

32. $\tan B = \frac{2 \sin A \sin C}{\sin(A + C)}$ ナルトキハ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級數ヲナス.

33. 任意ノ角 A ニツイテ次式ヲ證明セヨ.

$$(1) \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \}$$

$$(2) \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \}$$

34. $1 + \tan(45^\circ + B) = \frac{2 \tan C}{\tan C - 1}$ ナルトキハ次ノ關係ノ成立スルコトヲ證セ.

$$\tan B \tan C = 1$$

35. $\tan A = -\frac{b}{a}$ ナルトキ $a \cos 2A + b \sin 2A = a$ ナルコトヲ證セ. 但 a, b ハ正, $\sin 2A > 0$ トス.

36. $\sin 3\theta = n \sin \theta$ ナルトキ, n ハ 3 ト -1 トノ間ニナクテハナラスコトヲ證セ. 但 $\sin \theta \neq 0$.

37. $A + B + C = 180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(1) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1$$

$$(2) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C + 2$$

III. 第三章ノ分

(三角形ノ内角ヲ A, B, C ; 其ノ對邊ヲ a, b, c ; $a + b + c = 2p$ トス)

38. $\sin A = \cos B \cos C$ ナルトキ, $\tan B + \tan C = 1$ ナルコトヲ證セ.

39. $A = 2C$ ナルトキ $b = c$ 又ハ $a^2 = bc + c^2$ ナルコトヲ證セ.

$$40. a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c) \sin \frac{A}{2} \text{ ヲ證明セヨ.}$$

$$41. \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}\right) : \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right) = (a - b) : c \text{ ヲ證}$$

明セヨ。

42. $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ ナルトキハ, a, b, c ハ等差級数ヲナスコトヲ證セ。

43. $(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} = 0$ ヲ證セ。

44. a, b, c ガ等差級数ヲナストキ, 其ノ三角形ノ最大角ヲ θ , 最小角ヲ φ トスレバ

$$4(1 - \cos \theta)(1 - \cos \varphi) = \cos \theta + \cos \varphi$$

ナルコトヲ證セ。

45. a, b, c ガ等差級数ヲナストキハ $B \leq 60^\circ$ ナルコトヲ證セ。

46. A, B, C カラ夫々其ノ對邊ニ引ク垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ垂足三角形 DEF ノ三邊ハ

$$EF = a \cos A, FD = b \cos B, DE = c \cos C$$

ナルコトヲ證セ。

47. 三角形 ABC ニ於テ

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

ナルトキハ, 此ノ三角形ハ直角三角形デアル。

48. $b = a(\sqrt{3} - 1)$, $C = 30^\circ$ ナルトキ $\tan A$ ヲ求メヨ。

49. 等速度ヲ以テ垂直ニ上昇スル輕氣球ノ高度ヲ測レバ, 1km ダケ昇ツタトキハ a デ, 其ノ後 15 分時ヲ經タトキニハ θ トナツタト云フ。然ラバ上昇ノ速度ハ毎時幾 km カ。

50. AB ハ水平面上ノ一直線デ, 其ノ長サハ $2a$ 米デアル。今 A 及ビ B カラ或山ノ頂ヲ望メバ其ノ仰角ハ共ニ θ デアル。又 AB ノ中點 C カラ此ノ頂ヲ望メバ仰角ハ φ デアルト云フ。然ラバ此ノ山ノ高サヲ h 米トスレバ

$$h = \frac{a \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\sin(\varphi + \theta) \sin(\varphi - \theta)}}$$

ナルコトヲ證セヨ。

答

例題(10—11頁)

1. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

2. $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ = 2$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

3. (1) 60° (2) 20° 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

6. $4\frac{1}{4}$ 7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

例題(19—20)

1. 56° と 57° との間及 $\varepsilon 123^\circ$ と 124° との間

2. 80° 3. 60° 及 $\varepsilon 120^\circ$ 4. $\frac{7}{4}$

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6. $2r \sin \frac{\theta}{2}$ 7. $7.5m$

8. $55m$ 餘 9. 高サ約 $50.93m$, 河幅約 $42.72m$

11. 約 $13.2m$ 11. 約 $1^\circ 26'$

例題(26)

1. $\cos 18^\circ$, $-\sin 45^\circ$, $\cot 15^\circ$ 2. 正弦 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

餘弦 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sqrt{3}$

4. $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$ 5. 3

例題(29—30)

3. 90° 又 $\varepsilon 270^\circ$ 4. 最大2, 最小0 5. $\frac{7}{24}$

雜題一. (30—32)

4. $-\frac{2+\sqrt{6}}{4}$

5. $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

6. $\operatorname{cosec} \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $-\cot \theta$

18. (1) $45^\circ, 225^\circ$ (2) $30^\circ, 150^\circ$ (3) $\pm 45^\circ$

19. 45° 20. $\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ 23. 0 24. 0

例題(37—38)

1. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. $-\frac{1}{4}$

17. $\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$

18. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

21. $\cos A = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

$\sin A = \pm \frac{2m}{1+m^2}$ 22. $\frac{7}{25}$

例題(40)

1. (1) 0 (2) $4 \cos 4x \cos 2x \cos x$ 2. 45°

雜題二. (40—42)

12. $\cot \theta \pm \operatorname{cosec} \theta$

13. $2+\sqrt{3}$

例題(52—53)

1. 內接圓ノ半徑4, 傍接圓ノ半徑14, 12, 10.5

2. 12, 16, 20 12. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

例題(56—57)

1. 1.9376

2. $77^\circ 36' 30''$

3. $48^\circ 34' 32''$

10	答
----	---

4. (1) $\frac{\sqrt{2}a}{\cos \theta} \sin(45^\circ + \theta)$ (2) $\tan(45^\circ - \theta)$

例題(63)

1. 90° 2. $2\sqrt{6}$, 10.7 3. $A=30^\circ$, $B=90^\circ$,

$C=60^\circ$, $a:b:c=1:2:\sqrt{3}$

例題(66-68)

1. $h \tan \alpha \cot \beta$ 2. 1.837km 3. 高さ 24.49m,

距離 51.56m 4. 10.93km 5. 63.4m

6. $\frac{d \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)}$ 米 7. $l \cot \alpha \cos \theta$ 米

難題三. (68-69)

1. $\frac{645}{1037}$ 4. (1) $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ (2) $a^2 + b^2 = 1$

補充問題

1. (1) 0 (2) $3-2\sqrt{2}$ (3) $3-2\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 3. $\frac{115}{128}$

5. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ 6. $x^2(y^2+1)=1$ 7. $A=45^\circ$, $B=30^\circ$

8. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10. (1) $\frac{a}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}$ (2) $\frac{n}{4} a^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$

(3) $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$ 13. 1224.7m 14. 16km, 南 30° 西

15. 30.55m 17. 570.45m 27. $0^\circ \leq \theta < 45^\circ$, $135^\circ < \theta < 225^\circ$,

$315^\circ < \theta \leq 360^\circ$ 28. $\frac{980}{2501}$ 29. (1) -2 (2) 1

48. $-(2+\sqrt{3})$ 49. $\frac{4 \sin(\theta-a)}{\cos \theta \sin a}$ 軒

昭和七年九月十二日 印刷
昭和七年九月十五日 發行
昭和七年十月三日 訂正再版印刷
昭和七年十月七日 訂正再版發行

新三角法

教科書

新制度
定價
金四拾七錢

不許
複製

著作者 數學刷新會

代表者 伊藤政治

東京市神田區今川小路二丁目十一番地

發行兼印刷者 金港堂書籍株式會社

代表者 原安三郎

東京市神田區今川小路二丁目十一番地

發賣所 金港堂書籍株式會社

振替口座東京八八一五番

新三角法教科書
附 表

三角函数ノ對数表

1

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分 度
0 0	3.4637		3.4637		2.5363	0	0.0000	0 90
10	3.4637	3011	3.4637	3011	2.5363	0	0.0000	50
20	3.7648	1760	3.7648	1761	2.2352	0	0.0000	40
30	3.9408	1250	3.9409	1249	2.0591	0	0.0000	30
40	2.0658	969	2.0658	969	1.9342	0	0.0000	20
50	2.1627	792	2.1627	792	1.8373	0	0.0000	10
1 0	2.2419	669	2.2419	670	1.7581	1	1.9999	0 89
10	3088	580	3089	580	6911	0	9999	50
20	3668	511	3669	512	6331	0	9999	40
30	4179	458	4181	457	5819	1	9999	30
40	4637	413	4638	415	5362	0	9998	20
50	5050	378	5053	378	4947	1	9998	10
2 0	2.5428	348	2.5431	348	1.4569	0	1.9997	0 88
10	5776	321	5779	322	4221	1	9997	50
20	6097	300	6101	300	3899	0	9996	40
30	6397	280	6401	281	3599	1	9996	30
40	6677	263	6682	263	3318	0	9995	20
50	6940	248	6945	243	3055	1	9995	10
3 0	2.7188	235	2.7194	235	1.2806	1	1.9994	0 87
10	7423	222	7429	223	2571	0	9993	50
20	7645	212	7652	213	2348	1	9993	40
30	7857	202	7865	202	2135	1	9992	30
40	8059	192	8067	194	1933	1	9991	20
50	8251	185	8261	185	1739	1	9990	10
4 0	2.8436	177	2.8446	178	1.1554	0	1.9989	0 86
10	8613	170	8624	171	1376	1	9989	50
20	8783	163	8795	165	1205	1	9988	40
30	8946	158	8960	158	1040	1	9987	30
40	9104	152	9118	154	0882	1	9986	20
50	9256	147	9272	143	0728	2	9985	10
5 0	2.9403		2.9420		1.0580		1.9983	0 85
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
5 0	2.9403		2.9420		1.0580		1.9983	0 85
10	2.9545	142	2.9563	143	1.0437	1	9982	50
20	2.9682	137	2.9701	138	1.0299	1	9981	40
30	2.9816	134	2.9836	135	1.0164	1	9980	30
40	2.9945	129	2.9966	130	1.0034	1	9979	20
50	1.0070	125	1.0093	127	0.9907	2	9977	10
6 0	1.0192	122	1.0216	123	0.9784	1	1.9976	0 84
10	0311	119	0336	120	9664	1	9975	50
20	0426	115	0453	117	9547	2	9973	40
30	0539	113	0567	114	9433	1	9972	30
40	0648	109	0678	111	9322	1	9971	20
50	0755	107	0786	108	9214	2	9969	10
7 0	1.0859	104	1.0891	105	0.9109	1	1.9968	0 83
10	0961	102	0995	104	9005	2	9966	50
20	1060	99	1096	101	8904	2	9964	40
30	1157	97	1194	98	8806	1	9963	30
40	1252	95	1291	97	8709	2	9961	20
50	1345	93	1385	94	8615	2	9959	10
8 0	1.1436	91	1.1478	93	0.8522	1	1.9958	0 82
10	1525	89	1569	91	8431	2	9956	50
20	1612	87	1658	89	8342	2	9954	40
30	1697	85	1745	87	8255	2	9952	30
40	1781	84	1831	86	8169	2	9950	20
50	1863	82	1915	84	8085	2	9948	10
9 0	1.1943	80	1.1997	82	0.8003	2	1.9946	0 81
10	2022	79	2078	81	7922	2	9944	50
20	2100	78	2158	80	7842	2	9942	40
30	2176	76	2236	78	7764	2	9940	30
40	2251	75	2313	77	7687	2	9938	20
50	2324	73	2389	76	7611	2	9936	10
10 0	1.2397	73	1.2463	74	0.7537	2	1.9934	0 80
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
10 0	1.2397		1.2463		0.7537		1.9934	0 80
10	2468	71	2536	73	7464	3	9931	50
20	2538	70	2609	73	7391	2	9929	40
30	2606	68	2680	71	7320	2	9927	30
40	2674	68	2750	70	7250	3	9924	20
50	2740	66	2819	69	7181	2	9922	10
11 0	1.2806	66	1.2887	68	0.7113	3	1.9919	0 79
10	2870	64	2953	66	7047	2	9917	50
20	2934	64	3020	67	6980	3	9914	40
30	2997	63	3085	65	6915	2	9912	30
40	3058	61	3149	64	6851	3	9909	20
50	3119	61	3212	63	6788	2	9907	10
12 0	1.3179	60	1.3275	63	0.6725	3	1.9904	0 78
10	3238	59	3336	61	6664	3	9901	50
20	3296	58	3397	61	6603	2	9899	40
30	3353	57	3458	61	6542	3	9896	30
40	3410	57	3517	59	6483	3	9893	20
50	3466	56	3576	59	6424	3	9890	10
13 0	1.3521	55	1.3634	58	0.6366	3	1.9887	0 77
10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50
20	3629	54	3748	57	6252	3	9881	40
30	3682	53	3804	56	6196	3	9878	30
40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20
50	3786	52	3914	55	6086	3	9872	10
14 0	1.3837	51	1.3968	54	0.6032	3	1.9869	0 76
10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50
20	3937	50	4074	53	5926	3	9863	40
30	3986	49	4127	51	5873	3	9859	30
40	4035	49	4178	51	5822	3	9856	20
50	4083	48	4230	52	5770	3	9853	10
15 0	1.4130	47	1.4281	51	0.5719	4	1.9849	0 75
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分 度
15 0	1.4130		1.4281		0.5719		1.9849	0 75
10	4177	47	4331	50	5669	3	9846	50
20	4223	46	4381	49	5619	3	9843	40
30	4269	46	4430	49	5570	4	9839	30
40	4314	45	4479	49	5521	3	9836	20
50	4359	45	4527	48	5473	4	9832	10
16 0	1.4403		1.4575		0.5425		1.9828	0 74
10	4447	44	4622	47	5378	3	9825	50
20	4491	44	4669	47	5331	4	9821	40
30	4533	42	4716	46	5284	4	9817	30
40	4576	43	4762	46	5238	3	9814	20
50	4618	42	4808	46	5192	4	9810	10
17 0	1.4659		1.4853		0.5147		1.9806	0 73
10	4700	41	4898	45	5102	4	9802	50
20	4741	41	4943	45	5057	4	9798	40
30	4781	40	4987	44	5013	4	9794	30
40	4821	40	5031	44	4969	4	9790	20
50	4861	40	5075	44	4925	4	9786	10
18 0	1.4900		1.5118		0.4882		1.9782	0 72
10	4939	39	5161	43	4839	4	9778	50
20	4977	38	5203	42	4797	4	9774	40
30	5015	38	5245	42	4755	4	9770	30
40	5052	37	5287	42	4713	5	9765	20
50	5090	36	5329	42	4671	4	9761	10
19 0	1.5126		1.5370		0.4630		1.9757	0 71
10	5163	36	5411	41	4589	5	9752	50
20	5199	36	5451	40	4549	4	9748	40
30	5235	36	5491	40	4509	5	9743	30
40	5270	35	5531	40	4469	4	9739	20
50	5306	35	5571	40	4429	5	9734	10
20 0	1.5341		1.5611		0.4389		1.9730	0 70
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分 度
20 0	1.5341		1.5611		0.4389		1.9730	0 70
10	5375	34	5650	39	4350	5	9725	50
20	5409	34	5689	39	4311	4	9721	40
30	5443	34	5727	38	4273	5	9716	30
40	5477	34	5766	39	4234	5	9711	20
50	5510	33	5804	38	4196	5	9706	10
21 0	1.5543		1.5842		0.4158		1.9702	0 69
10	5576	33	5879	37	4121	5	9697	50
20	5609	33	5917	38	4083	5	9692	40
30	5641	32	5954	37	4046	5	9687	30
40	5673	32	5991	37	4009	5	9682	20
50	5704	31	6028	37	3972	5	9677	10
22 0	1.5736		1.6064		0.3936		1.9672	0 68
10	5767	31	6100	36	3900	5	9667	50
20	5798	31	6136	36	3864	5	9661	40
30	5828	30	6172	36	3828	5	9656	30
40	5859	31	6208	35	3792	5	9651	20
50	5889	30	6243	36	3757	5	9646	10
23 0	1.5919		1.6279		0.3721		1.9640	0 67
10	5948	29	6314	35	3686	5	9635	50
20	5978	29	6348	35	3652	5	9629	40
30	6007	29	6383	34	3617	6	9624	30
40	6036	29	6417	35	3583	5	9618	20
50	6065	28	6452	34	3548	5	9613	10
24 0	1.6093		1.6486		0.3514		1.9607	0 66
10	6121	28	6520	33	3480	6	9602	50
20	6149	28	6553	34	3447	6	9596	40
30	6177	28	6587	34	3413	6	9590	30
40	6205	27	6620	33	3380	6	9584	20
50	6232	27	6654	33	3346	5	9579	10
25 0	1.6259		1.6687		0.3313		1.9573	0 65
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
25 0	1.6259		1.6687		0.3313		1.9573	0 65
10	6286	27	6720	33	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40
30	6340	27	6785	32	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	32	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	33	3150	6	9543	10
26 0	1.6418		1.6882		0.3118		1.9537	0 64
10	6444	26	6914	32	3086	7	9530	50
20	6470	26	6946	31	3054	6	9524	40
30	6495	25	6977	31	3023	6	9518	30
40	6521	25	7009	32	2991	6	9512	20
50	6546	24	7040	31	2960	7	9505	10
27 0	1.6570		1.7072		0.2928		1.9499	0 63
10	6595	25	7103	31	2897	7	9492	50
20	6620	25	7134	31	2866	6	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30
40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20
50	6692	24	7226	30	2774	7	9466	10
28 0	1.6716		1.7257		0.2743		1.9459	0 62
10	6740	24	7287	30	2713	6	9453	50
20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40
30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
29 0	1.6856		1.7438		0.2562		1.9418	0 61
10	6878	22	7467	29	2533	7	9411	50
20	6901	23	7497	30	2503	7	9404	40
30	6923	22	7526	29	2474	7	9397	30
40	6946	23	7556	30	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	7	9383	10
30 0	1.6990		1.7614		0.2385		1.9375	0 60
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
30 0	1.6990		1.7614		0.2386		1.9375	0 60
10	7012	22	7644	30	2356	7	9368	50
20	7033	21	7673	29	2327	7	9361	40
30	7055	22	7701	28	2299	8	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	7	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	8	9338	10
31 0	1.7118		1.7788		0.2212		1.9331	0 59
10	7139	21	7816	28	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	29	2155	8	9315	40
30	7181	21	7873	28	2127	7	9308	30
40	7201	20	7902	29	2098	8	9300	20
50	7222	21	7930	28	2070	8	9292	10
32 0	1.7242		1.7958		0.2042		1.9284	0 58
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	28	1930	8	9252	20
50	7342	20	8097	27	1903	8	9244	10
33 0	1.7361		1.8125		0.1875		1.9236	0 57
10	7380	19	8153	28	1847	8	9228	50
20	7400	20	8180	27	1820	9	9219	40
30	7419	19	8208	28	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	27	1765	8	9203	20
50	7457	19	8263	28	1737	9	9194	10
34 0	1.7476		1.8290		0.1710		1.9186	0 56
10	7494	18	8317	27	1683	9	9177	50
20	7513	19	8344	27	1656	8	9169	40
30	7531	18	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	19	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	9	9142	10
35 0	1.7586		1.8452		0.1548		1.9134	0 55
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分度
35 0	1.7586		1.8452		0.1548		1.9134	0 55
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	18	8533	27	1467	9	9107	30
40	7657	17	8559	26	1441	9	9098	20
50	7675	18	8586	27	1414	9	9089	10
36 0	1.7692		1.8613		0.1387		1.9080	0 54
10	7710	18	8639	26	1361	10	9070	50
20	7727	17	8666	27	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	9	9052	30
40	7761	17	8718	26	1282	10	9042	20
50	7778	17	8745	27	1255	9	9033	10
37 0	1.7795		1.8771		0.1229		1.9023	0 53
10	7811	16	8797	26	1203	9	9014	50
20	7828	17	8824	27	1176	10	9004	40
30	7844	16	8850	26	1150	9	8995	30
40	7861	17	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	25	1098	10	8975	10
38 0	1.7893		1.8928		0.1072		1.8965	0 52
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30
40	7957	16	9032	25	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
39 0	1.7989		1.9084		0.0916		1.8905	0 51
10	8004	15	9110	26	0890	10	8895	50
20	8020	16	9135	25	0865	11	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	15	9187	26	0813	10	8864	20
50	8066	16	9212	25	0788	11	8853	10
40 0	1.8081		1.9238		0.0762		1.8843	0 50
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分度
40 0	1.8081		1.9238		0.0762		1.8843	0 50
10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50
20	8111	15	9289	26	0711	11	8821	40
30	8125	14	9315	26	0685	11	8810	30
40	8140	15	9341	26	0659	10	8800	20
50	8155	15	9366	25	0634	11	8789	10
41 0	1.8169		1.9392		0.0608		1.8778	0 49
10	8184	15	9417	25	0583	11	8767	50
20	8198	14	9443	26	0557	11	8756	40
30	8213	15	9468	25	0532	11	8745	30
40	8227	14	9494	26	0506	12	8733	20
50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
42 0	1.8255		1.9544		0.0456		1.8711	0 48
10	8269	14	9570	26	0430	12	8699	50
20	8283	14	9595	25	0405	11	8688	40
30	8297	14	9621	26	0379	12	8676	30
40	8311	13	9646	25	0354	11	8665	20
50	8324	13	9671	25	0329	12	8653	10
43 0	1.8338		1.9697		0.0303		1.8641	0 47
10	8351	14	9722	25	0278	12	8629	50
20	8365	13	9747	26	0253	11	8618	40
30	8378	13	9773	25	0227	12	8606	30
40	8391	13	9798	25	0202	12	8594	20
50	8405	14	9823	25	0177	12	8582	10
44 0	1.8418		1.9848		0.0152		1.8569	0 46
10	8431	13	1.9874	25	0126	12	8557	50
20	8444	13	1.9899	25	0101	13	8545	40
30	8457	13	1.9924	25	0076	13	8532	30
40	8469	12	1.9949	25	0051	12	8520	20
50	8482	13	1.9975	25	0025	13	8507	10
45 0	1.8495		0.0000		0.0000		1.8495	0 45
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

數 對 數 表

10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	004	038	072	106*	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	863	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	000	007	014	021*	028	035	041	048	055*
19	783	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	216	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	014	031	048*	065	082	099	116	133*	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	011	024	038*	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004	009	015	020	025*
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	133	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	123	133	143	150	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	376	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	676	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	007	016	024*	033	042	050	059	067*	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

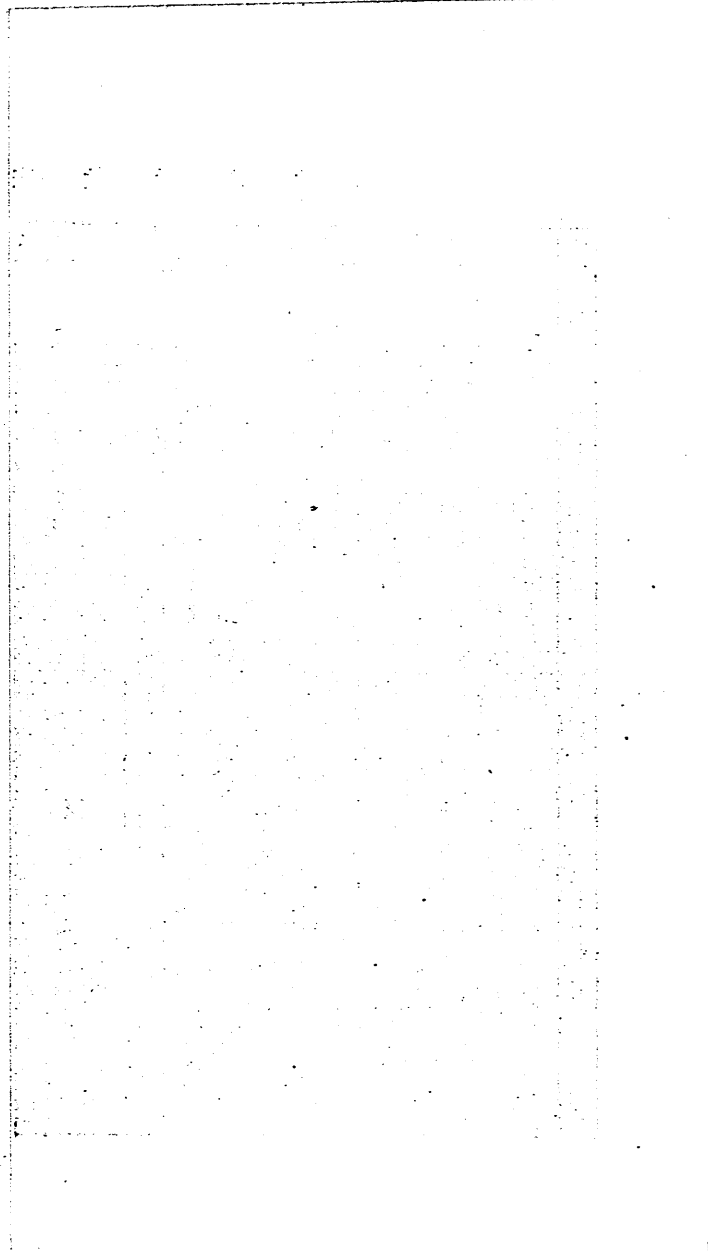
	11	12	13
1	1.1	1.2	1.3
2	2.2	2.4	2.6
3	3.3	3.6	3.9
4	4.4	4.8	5.2
5	5.5	6.0	6.5
6	6.6	7.2	7.8
7	7.7	8.4	9.1
8	8.8	9.6	10.4
9	9.9	10.8	11.7
	32	33	34
1	3.2	3.3	3.4
2	6.4	6.6	6.8
3	9.6	9.9	10.2
4	12.8	13.2	13.6
5	16.0	16.5	17.0
6	19.2	19.8	20.4
7	22.4	23.1	23.8
8	25.6	26.4	27.2
9	28.8	29.7	30.6
	53	54	55
1	5.3	5.4	5.5
2	10.6	10.8	11.0
3	15.9	16.2	16.5
4	21.2	21.6	22.0
5	26.5	27.0	27.5
6	31.8	32.4	33.0
7	37.1	37.8	38.4
8	42.4	43.2	44.0
9	47.7	48.6	49.5
	75	76	77
1	7.5	7.6	7.7
2	15.0	15.2	15.4
3	22.5	22.8	23.1
4	30.0	30.4	30.8
5	37.5	38.0	38.5
6	45.0	45.6	46.2
7	52.5	53.2	53.9
8	60.0	60.8	61.6
9	67.5	68.4	69.3

數ノ對數表

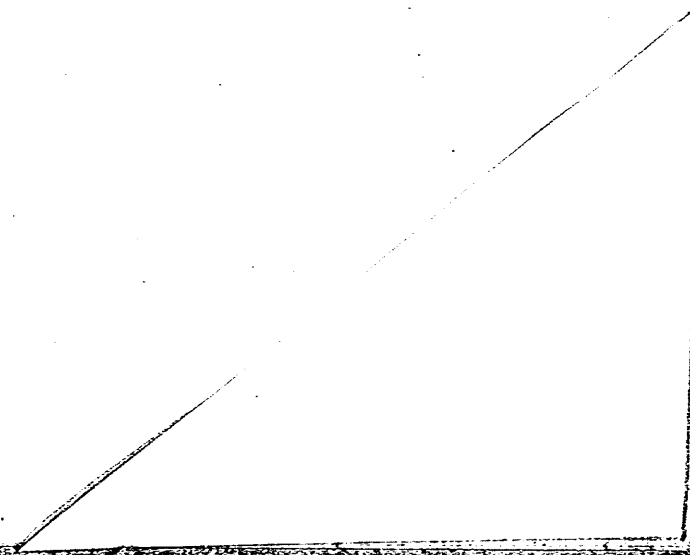
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	004	038	072	106*	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	1173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	000	007	014	021*	028	035	041	048	055*
19	783	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	014	031	048*	065	082	099	116	133*	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	727	733	739	745	751	756	762	768	774
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	011	024	038*	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004	009	015	020	025*
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	133	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	007	016	024*	033	042	050	059	067*	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

比例分部表

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.3
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.7
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.9
	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.1	5.2
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.2	10.4
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.3	15.6
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.4	20.8
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.5	26.0
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.6	31.2
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.7	36.4
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.8	41.6
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.9	46.8
	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	71	73	74
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.1	7.3	7.4
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	14.2	14.6	14.8
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.3	21.9	22.2
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	28.2	29.2	29.6
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	35.5	36.5	37.0
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	42.6	43.8	44.4
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	49.7	51.1	51.8
8	42.4	43.0	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	56.8	58.4	59.2
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	63.9	65.7	66.6
	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	95	97	98	99
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	9.5	9.7	9.8	9.9
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	19.0	19.4	19.6	19.8
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	28.6	29.1	29.4	29.7
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	38.0	38.8	39.2	39.6
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	47.5	48.5	49.0	49.5
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	57.0	58.2	58.8	59.4
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	66.5	67.9	68.6	69.3
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	76.0	77.6	78.4	79.2
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	85.5	87.3	88.2	89.1



K220.43-112a



345
380

